

江口・沖・松村方程式の解の構造

Structure of stationary solutions of Eguchi-Oki-Matsumura Model

千葉工業大学・工学部 花田孝郎 (Takao Hanada)

Chiba Institute of Technology.
 一橋大学・経済学部 石村 直之 (Naoyuki Ishimura),
 Faculty of Economics,
 Hitotsubashi University.
 日本大学・理工学部 中村正彰 (Masaaki Nakamura),
 College of Science and Technology,
 Nihon University.

0. 合金の相分離

成分が A, B 2種の金属の合金は高温では均一な状態が安定である。これを急激に冷やし(焼入れ, quenching という), その後 徐々に温度を下げてゆく(焼き鈍し, annealing という)とき, ある臨界温度を越えて低下すると, A 成分の多い部分と B 成分の多い部分に分離してゆくことが知られている。これを相分離という。

J. W. Cahn - J. E. Hilliard [4] はこの現象を熱力学的な観点から濃度 u を未知関数とする有名な Cahn-Hilliard 方程式を導入して調べた。その解は興味深い漸近挙動をもち, 単調な定常解への収束が知られている。

江口-沖-松村 (T.Eguchi- K. Oki-S. Matsumura) [10] はそれまで研究されてきた濃度 u のみの方程式に, オーダー・パラメータ v を考慮した方程式系を導入した。

この論文では この解の定常解の構造について得られた結果を報告する。

1. 江口-沖-松村 方程式

合金が滑らかな境界 $\partial\Omega = \Gamma$ を持つ有界領域である容器 $\Omega \subset R^n$ にあるものとし, 合金の総量は変わらないものとする。すなわち成分 A の濃度を u とすれば,

$$(1) \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx = m.$$

そして オーダー・パラメータを v とし, この系の熱力学的なポテンシャルを表す, バルク自由エネルギー $f(u, v)$ と, 次の u, v のエネルギー関数 $F(u, v)$ を導入した。

$$(2) \quad F(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ f(u, v) + \frac{H}{2} |\nabla u|^2 + \frac{K}{2} |\nabla v|^2 \right\} dx,$$

$$(3) \quad f(u, v) = \frac{1}{2} au^2 - \frac{1}{2} bv^2 + \frac{1}{4} b'v^4 + \frac{1}{2} gu^2v^2.$$

ここで a, b', g, K, H は正定数で, b は温度が低下するにつれて, 負から正へ増加する関数

定常状態を表す方程式は, μ を化学ポテンシャルとして

$$(4) \quad \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \mu,$$

で与えられる。

従って運動方程式 (江口・沖・松村方程式系, EOM 系) は 次の方程式系で与えられる。

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -LH\nabla^4 u + L\nabla^2 \frac{\partial f(u, v)}{\partial v},$$

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = MK\nabla^2 v - M \frac{\partial f(u, v)}{\partial v},$$

$$(7) \quad \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x, t) dx = m,$$

$$(8) \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} = -bv + b'v^3 + gu^2v,$$

$$(9) \quad \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = au + guv^2.$$

境界条件は Neumann 境界条件を想定して, 初期値を考慮する。

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ on } \Gamma,$$

$$(11) \quad u(0, x) = u_0, \quad v_0(0, x) = v_0.$$

この系は Cahn-Hilliard 方程式の一般化の一つであり, Cahn-Hilliard 方程式の解の $t \rightarrow \infty$ における漸近挙動は良く知られている。

我々は EOM 系 (5), (6) について, 解の時間発展を 1 次元問題について調べた。

2. 空間 1 次元問題

1 次元問題は各係数を適宜変換することによって, 次の方程式に変換される。

$$(12) \quad \begin{cases} u_t = -\varepsilon^2 u_{xxxx} + ((a + v^2)u)_{xx} & \text{in } 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v_t = v_{xx} + (b - u^2 - v^2)v & \text{in } 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u_x = u_{xxx} = v_x = 0 & \text{at } x = 0 \text{ and } l, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \quad v|_{t=0} = v_0 & \text{on } 0 \leq x \leq l, \quad yx \end{cases}$$

ε, a は温度依存の正定数で, $b \in \mathbf{R}$ はこの方程式系における重要なパラメータで臨界温度を越えて低下するにつれ, 負から正に変化する。ここでは b は正の問題を扱う。実は負ならば解の挙動は自明なものになることがわかっている。

ここで全質量 u は保存される。すなわち次の関係が成り立つ。

$$(13) \quad \frac{1}{l} \int_0^l u(x, t) dx = m.$$

初期条件を次の様に与えておく。

$$(u_0)_x = (u_0)_{xxx} = (v_0)_x = 0 \quad (x = 0, l), \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{l} \int_0^l u_0(x) dx = m.$$

Cahn-Hilliard 方程式のこれまでの研究 [11][8][24] を見ると, EOM 方程式系 (12) の解 $(u(x, t), v(x, t))$ は $t \rightarrow \infty$ のとき, 下記の定常問題の解 $(u(x), v(x))$ に収束することが

期待される。

$$(14) \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 u_{xxxx} + ((a+v^2)u)_{xx} = 0 & \text{in } 0 < x < l, \\ v_{xx} + (b-u^2-v^2)v = 0, & \text{in } 0 < x < l, \\ u_x = u_{xxx} = v_x = 0 & \text{at } x = 0 \text{ and } l, \\ (1/l) \int_0^l u \, dx = m. \end{cases}$$

(注意) この系は常に自明な解 $u \equiv m, v \equiv 0$ を持つ。

また $b \leq 0$ のときは、最大値の原理により、自明な解しか存在しない。

一方 $b > m^2$ のときは、もう一つの自明な解 $u \equiv m, v \equiv \pm\sqrt{b-m^2}$ を持つ。

非定常問題の解の存在とその漸近的挙動については次の定理が得られている。

Theorem 1.

$$u_0, v_0 \in H^2(0, l), \quad (u_0)_x = (v_0)_x = 0 \quad \text{at } x = 0, l,$$

$$(1/l) \int_0^l u_0 \, dx = m.$$

このとき、 $\forall T > 0$ に対して、EOM系(5), (6)の解 (u, v) で

$$u \in L^2((0, T); H^4(0, l)) \cap L^\infty([0, T]; H^2(0, l)),$$

$$v \in L^2((0, T); H^2(0, l)) \cap L^\infty([0, T]; H^1(0, l)).$$

を満たすものが存在する。

これらの初期値に対する解 (u, v) は $t \rightarrow \infty$ の時、定常問題(14)の解に収束する。

3. 1次元定常方程式系の解の構造

EOM系のアトラクターを解析することは興味深く、また重要な問題である。

非定常EOM系の解が漸的に定常EOM系の解に収束するならば、では定常EOM系の解の構造はどのようなものであろうか。

EOM系の性質からエネルギー関数

$$(15) \quad F[u, v] := \int_0^l \left(\frac{\varepsilon^2}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} v_x^2 + \frac{a}{2} u^2 + \frac{1}{4} v^4 - \frac{b}{2} v^2 + \frac{1}{2} u^2 v^2 \right) dx.$$

の臨界点は定常解になる。

またEOM系の任意の解 (u, v) に対して

$$(16) \quad \frac{d}{dt} F[u, v](t) = - \int_0^l \{ -\varepsilon^2 u_{xxx} + ((a+v^2)u)_x \}^2 dx - \int_0^l v_t^2 dx \leq 0,$$

が成り立つことも注意しておく。

我々は次ぎの様な定常解の存在証明に成功した。

Theorem 2. 定常方程式系(14)は、十分大きな $b \gg m^2$ に対して、少なくとも一つの単調な非自明定常解を持つ。

とくに任意の整数 $k \geq 2$ と、 k によって定まる十分大きな $b \gg m^2$ に対して、非単調な非自明定常解で、その導関数が正確に $(k-1)$ 回符号を変えるものを持つ。

Proof. (i) 単調な非自明解の存在

既に注意して置いたが、定常 EOM 系の解は汎関数 F の臨界点としても与えられるから、次ぎの許容関数空間

$$\mathcal{A} := \{(u, v) \in (H^1(0, l))^2 \mid \\ u_x = v_x = 0 \text{ at } x = 0, l \text{ and } \frac{1}{l} \int_0^l u \, dx = m\}$$

での F の挙動を調べれば良い。

自明解 $(m, 0)$ と $(m, \pm\sqrt{b-m^2})$ に対する値は

$$\frac{1}{l} F[m, 0] = \frac{a}{2} m^2, \\ \frac{1}{l} F[m, \pm\sqrt{b-m^2}] = \frac{a}{2} m^2 - \frac{1}{4} (b-m^2)^2 \quad \text{if } b > m^2$$

である。

F は下に有界であるから、非自明解の存在は試験関数 $(u, v) \in \mathcal{A}$ で、次ぎの性質を持つものの存在を示せば良いことがわかる。

$$(17) \quad \frac{1}{l} F[u, v] < \frac{a}{2} m^2 - \frac{1}{4} (b-m^2)^2.$$

そのために、次の試験関数を使う。

$$(18) \quad u(x) = m - \delta \cos \frac{\pi x}{l} \\ v(x) = \pm \sqrt{b - (m - \delta \cos \frac{\pi x}{l})^2}.$$

ここで、 $\delta > 0$ はパラメータで、 $b > (m + \delta)^2$ としておく。

明らかに $(u, v) \in \mathcal{A}$ であり、また

$$\frac{1}{l} F[u, v] = \frac{a}{2} m^2 - \frac{1}{4} (b-m^2)^2 + (\varepsilon^2 (\pi/l)^2 + a) \frac{\delta^2}{4} \\ + \frac{\delta^2 \pi^2}{2l^2} \int_0^l \frac{(m - \delta \cos(\pi x/l))^2 \sin^2(\pi x/l)}{b - (m - \delta \cos(\pi x/l))^2} dx \\ - \frac{m^2 \delta^2}{2} - \frac{3}{32} \delta^4 + \frac{\delta^2}{4} (b-m^2)$$

である。

$b = 2m^2$, $\delta = m/4$ ととると

$$\frac{1}{l} F[u, v] = \frac{1}{l} F[m, \pm\sqrt{b-m^2}] - \frac{131}{2^{13}} m^4 \\ + \left(\frac{\varepsilon^2 (\pi/l)^2 + a}{64} + \frac{\pi^2}{32l^2} \int_0^l \frac{(4 - \cos(\pi x/l))^2 \sin^2(\pi x/l)}{32 - (4 - \cos(\pi x/l))^2} dx \right) m^2,$$

となり、必要ならば十分 m を大きくとれば不等式が成り立つ。

従って非自明定常解が存在する。

またこれらの試験関数は単調であるから、この範囲で最小化して得られる非自明解も単調である。

(ii) 導関数が符号を変える非単調な解の存在

上で得られた単調非自明解を利用して、その導関数が $(k-1)$ ($k \leq 2$) 回符号を変える非単調な解 (u^k, v^k) の存在を示そう。

区間 $[0, l]$ を k 個の部分区間 $[(i-1)l/k, il/k]$ ($i = 1, 2, \dots, k$) に分けて、部分区間 $[0, l/k]$ で上の最小化操作を行う。

$b \gg m^2$ ならば少なくとも一つは単調な非自明解で

$$(u^k, v^k) \text{ s.t. } u_x^k = v_x^k = 0 \text{ at } x = 0, l/k$$

を満たすものがあるはずである。

そこで $i = 1, 2, \dots, k$ について帰納的に次ぎの様に $[(i-1)l/k, il/k]$ で $u^k(x)$ を定める。

$$u^k(x) = \begin{cases} u^k(x - ((i-1)l/k)) & i \text{ is odd} \\ u^k(-x + (il/k)) & i \text{ is even,} \end{cases}$$

v^k に付いても同様に $[0, l]$ に拡張する。すると (u^k, v^k) は確かに求める条件を満たす解になっている。

□

(注意). この非単調非自明解を変分法の枠内で求めることもできる。すなわち、任意の整数 $k \geq 2$ に対して、許容関数の空間

$$\mathcal{A}^k := \{(u, v) \in \mathcal{A} \mid u_x \text{ と } v_x \text{ は正確に } (k-1)\text{-回符号を変える}\}$$

を導入し、ここで最小値を見付ければ良い。

そのための \mathcal{A}^k の試験関数として、 δ を $b > (m + \delta)^2$ を満たすパラメータとして

$$u^k(x) = m - \delta \cos \frac{k\pi x}{l},$$

$$v^k(x) = \pm \sqrt{b - (m - \delta \cos \frac{k\pi x}{l})^2},$$

をとる。するとこれらに関する局所的な最小値, 最大値は u^k と v^k の最小値, 最大値と同じ値をとる。

$b = 2m^2$, $\delta = m/4$ として、計算すると、先と同様にして

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} F[u, v] &= \frac{a}{2} m^2 - \frac{1}{4} (b - m^2)^2 + (\varepsilon^2 (k\pi/l)^2 + a) \frac{\delta^2}{4} \\ &\quad + \frac{\delta^2 k^2 \pi^2}{2l^2} \int_0^l \frac{(m - \delta \cos(k\pi x/l))^2 \sin^2(k\pi x/l)}{b - (m - \delta \cos(k\pi x/l))^2} dx \\ &\quad - \frac{m^2 \delta^2}{2} - \frac{3}{32} \delta^4 + \frac{\delta^2}{4} (b - m^2) \\ &= \frac{1}{l} F[m, \pm \sqrt{b - m^2}] - \frac{131}{2^{13}} m^4 \\ &\quad + \left(\frac{\varepsilon^2 (k\pi/l)^2 + a}{64} + \frac{k^2 \pi^2}{32l^2} \int_0^l \frac{(4 - \cos(k\pi x/l))^2 \sin^2(k\pi x/l)}{32 - (4 - \cos(k\pi x/l))^2} dx \right) m^2, \end{aligned}$$

となるので、 m を大きくとれば良いことが分かる。(注意終)

4. 数値シミュレーション

1次元問題に対する数値シミュレーションの結果を簡単に示しておく。

降旗大介等 ([14][12][13]) が Cahn-Hilliard 方程式のために考案した安定な数値計算スキームにヒントを得た次ぎの様な計算スキームに対して考察する。

$x_k = k\Delta x$ ($k = 0, 1, \dots, n$) $\Delta x = l/n$ に対して応用すると, $(u(x_k, t), v(x_k, t))$ の近似値 (U_k, V_k) に対する離散化した自由エネルギー $F^n[U, V]$ は次の様になる。

$$F^n[U, V] = \Sigma \left(\frac{\varepsilon^2}{2} ((\nabla_+ U_k)^2 + (\nabla_- U_k)^2) + \frac{1}{2} ((\nabla_+ V_k)^2 + (\nabla_- V_k)^2) \right. \\ \left. + \frac{a}{2} U_k^2 + \frac{1}{4} V_k^4 - \frac{b}{2} V_k^2 + \frac{1}{2} U_k^2 V_k^2 \right) \Delta x.$$

∇_+ と ∇_- はそれぞれ x についての前進差分と後退差分を表す。

$$\nabla_+ U_k = \frac{1}{\Delta x} (U_{k+1} - U_k), \quad \nabla_- U_k = \frac{1}{\Delta x} (U_k - U_{k-1}).$$

また Σ は [14][12][13] によって Cahn-Hilliard 方程式の計算に用いられた台形公式による数値積分を表す。

$(u(x_k, t + \Delta t), v(x_k, t + \Delta t))$ の近似値 (\bar{U}_k, \bar{V}_k) を求めるために次の陰形式スキームを用いることができる。

$$\frac{\bar{U}_k - U_k}{\Delta t} = \nabla^2 \left(-\varepsilon^2 \nabla^2 \frac{\bar{U}_k + U_k}{2} + a \frac{\bar{U}_k + U_k}{2} \right. \\ \left. + \frac{\bar{U}_k \bar{V}_k + U_k V_k}{2} \frac{\bar{V}_k + V_k}{2} \right), \\ \frac{\bar{V}_k - V_k}{\Delta t} = \nabla^2 \frac{\bar{V}_k + V_k}{2} + b \frac{\bar{V}_k + V_k}{2} \\ - \frac{\bar{U}_k \bar{V}_k + U_k V_k}{2} \frac{\bar{U}_k + U_k}{2} - \frac{\bar{V}_k^2 + V_k^2}{2} \frac{\bar{V}_k + V_k}{2}.$$

ここで $\nabla^2 := \nabla_+ \nabla_-$ は2階の中心差分公式である。

このスキームで計算すると、離散化されたエネルギーは時間に対して減少していることも示すことができる。

$$F^n[\bar{U}, \bar{V}] \leq F^n[U, V].$$

しかし我々には実際の計算にはつぎの陽形式スキームを用いた。

$$\frac{\bar{U}_k - U_k}{\Delta t} = -\varepsilon^2 \nabla^4 U_k + \nabla^2 ((a + V_k^2) U_k), \\ \frac{\bar{V}_k - V_k}{\Delta t} = \nabla^2 V_k + (b - U_k^2 - V_k^2) V_k.$$

境界条件はつぎのように与えた。

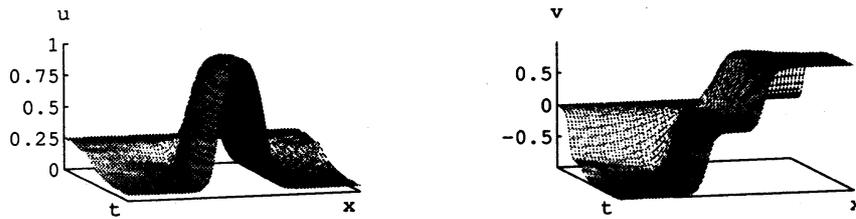
$$U_{-1} = U_1, \quad U_{n-1} = U_{n+1} \quad \text{in place of } u_x = 0 \text{ at } x = 0 \text{ and } l, \\ V_{-1} = V_1, \quad V_{n-1} = V_{n+1} \quad \text{in place of } v_x = 0 \text{ at } x = 0 \text{ and } l, \\ U_{-2} = U_2, \quad U_{n-2} = U_{n+2} \quad \text{in place of } u_{xxx} = 0 \text{ at } x = 0 \text{ and } l.$$

定数は次の値を用いた。

$$l = \frac{\sqrt{2}}{16}, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad a = \frac{125}{512}, \quad m = \frac{\sqrt{5}}{50}.$$

我々は local degree of order v がパターン形成に重要な役割をはたしていることも見ることができる。 b の臨界値は $b = 125/32$ となる。

b を $\beta > 0$ となるようにとると、解 $w^0 = (u^0, v^0) = (m, \sqrt{\beta})$ が現れる。そしてこの解はゼロ次元では安定であるが、1次元問題では不安定であることも見た。

FIGURE 1. (u, v) の他の解への収束

初期値

$$\begin{aligned} u^0(x) &= m, \\ v^0(x) &= \sqrt{\beta} + \epsilon \cos(k\pi x), \end{aligned}$$

で, ϵ を $0 < \epsilon^2 < \beta$, $v(0, x) > 0$ になるように十分小さくとると, $v(t, x)$ は常に正の値をとる。これは図 1 の場合とは違った様相を示している。

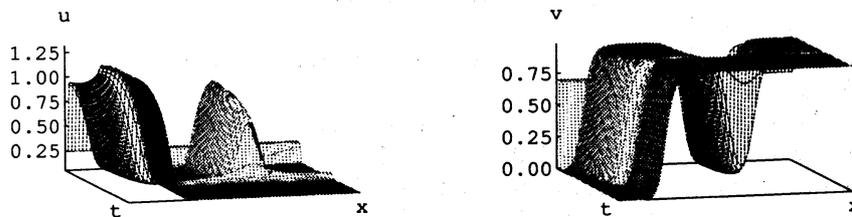
$v(t)$ の $t \rightarrow \infty$ の時の極限関数は $\sqrt{\beta}$ と正の値の間を振動している。

この極限 $w(t) = (u(t), v(t))$ を w^1 とする。

この解に対する数値結果をみると, $u(t)$ の振動は $v(t)$ に従って起きている。(図 2)

ここで $0 \leq t \leq 4096$ で残りのパラメータは図 1 と同じ値とした。しかし, $v(t)$ と $u(t)$ の振動の数は初めは 1 で, 次に 3, そして長時間後に再び 1 に戻る。

解 w^1 に対する他の結果も, 振動が $k > 1$ である初期値から始めた結果をふくめて, 大体 1 回の振動であることを示している。

FIGURE 2. (u, v) の w^1 への収束

定常解の安定性を調べるためにエネルギー F の図 (図 3). を見てみよう。

正の β ($b > 0.5$) に対しては, 解 w^1 はエネルギーが最小なのを見れば安定である。

また他の解 (ここでは w^2, \dots, w^8) でエネルギーが w^0 よりも小さいものが見える。負の β ($b < 0.5$) に対しては解 w^0 が小さな摂動に対しては安定であるようである。

しかし, w^0 より小さなエネルギーを持つ解を得ることができる。これらの解は比較的大きな摂動を w^0 に加えることによって得られる。

これらはこの解の安定性を否定するわけではないが, 定常解の単独性は否定しているように見える。

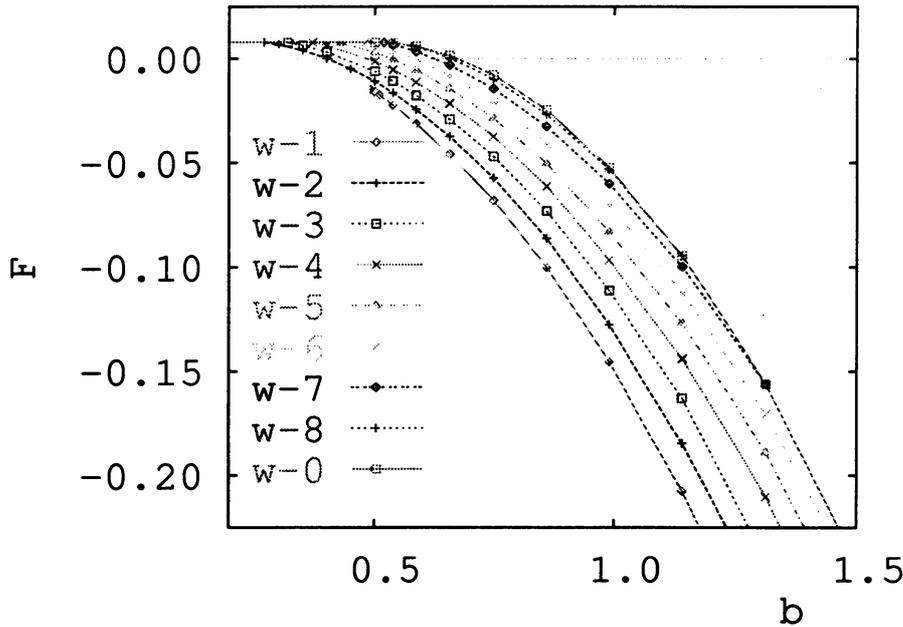


FIGURE 3. 定常解に対するエネルギー F の図

REFERENCES

- [1] N.D. Alikakos, P.W. Bates, and G. Fusco; Slow motion for the Cahn-Hilliard equation in one space dimension, *J. Differential Equations*, **90** (1991), 81–135.
- [2] J.F. Blowey and C.M. Elliott; The Cahn-Hilliard gradient theory for phase separation with non-smooth free energy, Part I: Mathematical analysis, *Euro. J. Appl. Math.* **2** (1991), 233–279.
- [3] J.F. Blowey and C.M. Elliott; The Cahn-Hilliard gradient theory for phase separation with non-smooth free energy, Part II: Numerical analysis, *Euro. J. Appl. Math.* **3** (1992), 147–179.
- [4] J.W. Cahn and J.E. Hilliard; Free energy of a nonuniform system, I., Interfacial free energy, *J. Chem. Phys.*, **28** (1958), 258–267.
- [5] J. Carr, M.E. Gurtin, and M. Slemrod; Structured phase transitions on a finite interval, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **86** (1984), 317–351.
- [6] J. Carr and R. Pego; Metastable patterns in solutions of $u_t = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u)$, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42** (1989), 523–576.
- [7] X. Chen; Global asymptotic limit of solutions of the Cahn-Hilliard equation, *J. Differential Geometry*, **44** (1996), 262–311.
- [8] C.M. Elliott and D.A. French; Numerical studies of the Cahn-Hilliard equation for phase separation, *IMA J. Appl. Math.*, **38** (1987), 97–128.
- [9] C.M. Elliott and H. Garcke; On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility, *SIAM J. Math. Anal.* **27**, (1996), 404–423.
- [10] T. Eguchi, K.Oki, and S. Matsumura; Kinetics of ordering with phase separation, *Mat. Res. Soc. Symp. Proc.* **21**, Elsevier, 1984, pp. 589–594.
- [11] C.M. Elliott and Zheng S. ; On the Cahn-Hilliard equation, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **96** (1986), 339–357.
- [12] D. Furihata; Finite difference schemes for $\partial u / \partial t = (\partial / \partial t)^\alpha \delta G / \delta u$ that inherit energy conservation or dissipation property, *J. Comp. Phys.*, **156** (1999), 181–205.
- [13] D. Furihata and T. Matsuo; A stable, convergent, conservative and linear finite difference scheme for the Cahn-Hilliard equation, preprint.

- [14] D. Furihata and M. Mori; A stable finite difference scheme for the Cahn-Hilliard equation based on a Lyapunov functional, *Z. angew. Math. Mech.*, **76** (1996)S1, 405–406.
- [15] M.E. Gurtin and H. Matano; On the structure of equilibrium phase transitions within the gradient theory of fluids, *Quart. Appl. Math.*, **46** (1988), 301–317.
- [16] T. Hanada, N. Ishimura, and M.A. Nakamura; Note on steady solutions of the Eguchi-Oki-Matsumura equation, *Proc. Japan Acad., Ser.A.*, **76** (2000), 146–148.
- [17] T. Hanada, M.A. Nakamura, and C. Shima; On Eguchi-Oki-Matsumura equations, in “Advances in Numerical mathematics; Proceedings of the Fourth Japan-China Joint Seminar on Numerical Mathematics,” Eds. H. Kawarada, M.A. Nakamura, and Z.-C. Shi, Gakuto, Tokyo, 1999, pp. 213–222.
- [18] T. Hanada and M.A. Nakamura; Numerical computation of stationary states for phase separation phenomena based on the Eguchi-Oki-Matsumura model, preprint.
- [19] M. Kurokiba, N. Tanaka, and A. Tani; works in preparation.
- [20] A. Novick-Cohen; Energy methods for the Cahn-Hilliard equation, *Quart. Appl. Math.*, **46** (1988), 681–690.
- [21] A. Novick-Cohen and L.A. Peletier; The steady states of the one-dimensional Cahn-Hilliard equation, *Appl. Math. Lett.*, **5**(3) (1992), 45–46.
- [22] A. Novick-Cohen and L.A. Segel; Nonlinear aspects of the Cahn-Hilliard equation, *Physica D*, **10** (1984), 277–298.
- [23] R. Temam; *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Applied Mathematical Sciences 68, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [24] Zheng S. ; Asymptotic behavior of solution to the Cahn-Hilliard equation, *Applicable Anal.*, **23** (1986), 165–184.