数理解析研究所講究録 1290 巻 2002 年 1-6

Complexity One Hamiltonian Torus Actions

大阪大学大学院理学研究科　　宅間　俊志 (Shunji Takuma)
Graduate School of Science, Osaka University

$2(n+1)$ 次元シンプレクティック多様体 M に n 次元トーラス T がハミルトン的に (効果的に) 作用しているとき，この作用を complexity one の作用と呼び，その作用を持つ多様体を complexity one space と呼ぶ．現在，Y.Karshon と S.Tolman により complexity one space の研究が進められている．この発表では，彼女たちによる局所一意性定理を紹介し，complexity one space の不変量の一つである genus について著者の調べた簡単な事実を紹介する．

シンプレクティック多様体 (M,ω) に，Lie 群 G がシンプレクティックに作用しているとは、各 $g \in G$ について，$g^*\omega = \omega$ が成り立つときをいう．さらに (M,ω) へのシンプレクティック G 作用がハミルトン的であるとは，(G の Lie 環の双対ベクトル空間 $\mathfrak{g}^*$ には G の coadjoint action があるとして) つぎの方程式を満たす同変写像 $\Phi : M \to \mathfrak{g}^*$ が存在するときをいう：$\iota_{\underline{\xi}}\omega = -d\langle\Phi,\xi\rangle$，$\forall\xi \in \mathfrak{g}$．ここで，$\underline{\xi}$ は ξ の生成する M 上のベクトル場である．$\langle\Phi,\xi\rangle$ は $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ のベクトルのペアリングである．この写像 Φ をこの作用のモーメント写像と呼ぶ．

作用する Lie 群 G がトーラス (連結可換コンパクト Lie 群)T のとき，その Lie 環 $\mathfrak{t}$ の双対 $\mathfrak{t}^*$ への coadjoint 作用は自明となるので，ハミルトン T 作用のモーメント写像は T 不変写像となる．ハミルトン T 作用について，一般的につぎのことが知られている．

1. $M_H = \{x \in M | G_x = H\}$ の連結成分 C について，Φ による C の像は H の Lie 環 $\mathfrak{h}$ の annihilater $\mathfrak{h}^\perp$ に平行なアフィン空間に含まれる．

$$\Phi(C) \subset \alpha + \mathfrak{h}^\perp,\ \text{where}\ \alpha = \Phi(x), x \in C$$

とくに，固定点集合の連結成分はモーメント写像により 1 点に写される．

2. M がコンパクトのとき、モーメント写像の像 $\Phi(M)$ は，固定点集合の像の成す有限個の点の張る凸集合となる．したがって，モーメント像は凸多面体となる．

M が連結でコンパクトな多様体で $\dim M = 2\dim T$ のとき，(M,T) は Delzant space(または，toric manifold) と呼ばれる．Delzant space のモーメント像はすべて次の条件を満たす凸多面体となる:

1. 各頂点ではちょうど $\dim T$ 個の辺が交わっている．
2. 各頂点から伸びる辺の方向ベクトルとして有理的 (各成分が整数) なものがとれる．

3. 各頂点で，2. のような有理的ベクトルとして長さが最小のものをとれば，それら $\dim T$ 個のベクトルは $\mathfrak{t}^*$ の格子点集合 ($\exp : \mathfrak{t} \to T$ の核に対応するもの) の $\mathbb{Z}$-basis となる．

この凸多面体は Delzant polytope と呼ばれる．Delzant space は，同変シンプレクティック同相の違いを除いて，対応する Delzant polytope の平行移動による同値類によって一意的に決定される．逆に，Delzant polytope からそれをモーメント像にもつ Delzant space を構成することができる．すなわち，Delzant space は Delzant polytope によって完全に分類される [G].

Delzant space のモーメントファイバが一つの T-軌道であるのに対して，complexity one space のモーメントファイバは一般に T-軌道の集まりになる．分類問題を考えるためにはこのモーメントファイバの情報を表す量を考えなくてはならない．その一つの解答が，[KT1] で与えられた，complexity one Hamiltonian torus action の局所一意性定理である．それを紹介するために，改めて言葉の準備をする．$2(n+1)$ 次元 symlectic manifold (M,ω) に n 次元トーラス T が効果的にハミルトン的に作用しており，そのモーメント写像 $\Phi : M \to \mathfrak{t}^*$ が固有 (proper) であるとする．さらに，モーメント写像 Φ の像が $\mathfrak{t}^*$ の凸開集合 U に含まれているとする．このとき，(M,ω,Φ,U) を proper complexity one space と呼ぶ．2 つの proper complexity one space (M_1,ω_1,Φ_1,U) と (M_2,ω_2,Φ_2,U) が同値であるとは，同変シンプレクティック同相写像 $f : M_1 \to M_2$ で，$\Phi_1 = \Phi_2 \circ f$ を満たすものが存在するときをいう．

定理(局所一意性定理)[KT1]

2 つの proper complexity one space (M_1,ω_1,Φ_1,U) と (M_2,ω_2,Φ_2,U) に対して，次の三つの条件が満たされているとする:

1. それらの Duistermaat-Heckman measure が等しい，
2. それらの種数 (genus) が等しい，
3. 条件

(*) $\Phi^{-1}(\alpha)$ が 2 個以上の (したがって不可算無限個の) 軌道をもつ．

を満たす $\alpha \in U$ が存在して，かつ，α における isotropy data が等しい．

このとき，U における α の凸開近傍 V で，V へそれぞれの complexity one space を制限したものが同値になるようなものが存在する．すなわち，

$$(\Phi_1^{-1}(V),\omega_1,\Phi_1,V) \cong (\Phi_2^{-1}(V),\omega_2,\Phi_2,V)$$

□

この定理で使われた語句の説明をする．

1. まず，モーメント写像の正則値に対してその symplectic quotient の "体積" を対応させる関数を Duistermaat-Heckman 関数という．Duistermaat-Heckman measure とは，$\mathfrak{t}^*$ 上の測度のことで，$\mathfrak{t}^*$ 上の Lebesgue 測度に Duistermaat-Heckman 関数を掛けて得られる．
2. モーメント写像の値 $\alpha \in \mathfrak{t}^*$ が条件

(∗) $\Phi^{-1}(\alpha)$ が 2 個以上の (したがって不可算無限個の) 軌道をもつ.
を満たすとき，商空間 $\Phi^{-1}(\alpha)/T$ は 2 次元の閉曲面と同相になる．さらに，α に十分近い値はすべて (∗) の条件を満たし，得られる商空間は皆同相となる．また，モーメント像 $\Phi(M)$ の内点はすべてこの条件 (∗) を満たす．従って，モーメントファイバの軌道空間として得られるこの閉曲面の種数が，(M, ω, Φ, U) を特徴づける一つの量として定義される．これを complexity one space の種数 (genus) と呼ぶ.
3. $\Phi^{-1}(\alpha)$ に 2 つ以上の軌道型 (orbit type) があるとき，例外軌道 (exceptional orbit) と呼ばれるものが存在する．これは isotropy subgroup がその軌道の近傍にあるすべての軌道の中で最大となるもののことである．$\Phi^{-1}(\alpha)$ の中にあるすべての例外軌道の isotropy 表現 (weight) の順序付けられていない集合を α の isotropy data と呼ぶ.

著者の関心は，complexity one space の不変量の一つである種数がトーラス作用によりどのような制約を受けるのかということである．そこで，言葉を定義する．先にも述べたようにモーメント写像の像 $\Phi(M)$ は凸多面体となっている．固定点集合 M^T の各連結成分は $\Phi : M \to \mathfrak{t}^*$ により 1 点に写されるが，特に凸多面体の頂点に写される連結成分のことを extremal と呼ぶことにする．簡単な考察から，種数が 0 になるひとつの十分条件が得られた.

定理. compact connected complexity one space $(M, \omega, \Phi, \mathfrak{t}^*)$ が extremal isolated fixed point を持てば，その種数は 0 である.

証明には，モーメント写像の weighted X-ray という概念と D.S.Metzler[M] による，generalized symplectic quotient の Euler 数に関する recursive formula を用いる．まずその説明をする.

weighted X-ray. 多様体 $M^{2(n+1)}$ は T^n-作用の軌道型 $\{T_j\}_j$ によって分割することができる: $M = \coprod_{j=1}^m X_j$ (ただし，X_j は M_{T_j} の連結成分)．X_j の閉包を F_j とおく:$F_j = \overline{X}_j$. $\mathcal{F} = F_j$ とする．$\mathcal{F}$ により添え字づけられた集まり $\{\Phi(F_j)\}_{F_j \in \mathcal{F}}$ を X-ray と呼び，組み $(F_j, \Phi(F_j))$ を wall と呼ぶ．一つの wall $(F_j, \Phi(F_j))$ に対して，点 $p \in X_j$ での接空間 T_pM への T_j の isotropy 表現の weights$\{\eta_1, \dots, \eta_{n+1}\}$(各 η_k は $\mathfrak{t}^*$ のベクトルとみなす) を α_j と書くことにする．α_j は順序づけしていない集合とみなす．X_j が連結なので，α_j は点 $p \in X_j$ のとり方には依らない．こうして得られる 3 つ組 $(F_j, \Phi(F_j), \alpha_j)$ 全体を weighted X-ray と呼ぶ．wall の次元とは $\Phi(F_j)$ の次元のこととする.

各 wall$(F_j, \Phi(F_j), \alpha_j)$ に対して，F_j には T/T_j の効果的なハミルトン作用が誘導され，そのハミルトン作用に対するモーメント写像 $\Phi_j : F_j \to \mathfrak{t}_j^*$ の像と $\Phi(F_j)$ は同一視できる．このとき $\Phi(F_j)$ の内点 β は Φ_j の正則値となり，したがって，その symplectic quotient $\Phi_j^{-1}(\beta)/(T/T_j)$ が得られる．このことは何を言っているのかというと，ふつう symplectic quotient はモーメント写像の正則値に対して定義されるものなのだが，考え方を変えれば，どの値もあるハミルトン・トーラス作用のモーメント写像の正則値と考えられ，それに対する symplectic quotient は考えることができるということを言って

いる．このように，モーメント写像の任意の値に対して定義される symplectic quotient を generalized symplectic quotient と呼ぶ．

recursive formula for Euler numbers. 上述したように，weighted X-ray の各 wall$(F_j, \Phi(F_j), \alpha_j)$ に対して generalized symplectic quotient $F_j /\!\!/ T$ が考えられる．その Euler 数を $(\Phi(F_j)$ の内点のとり方には依らないので$)\chi(F_j)$ と書くことにする．いま，2つの同じ次元をもつ wall$(F_i, \Phi(F_i), \alpha_i)$ と $(F_j, \Phi(F_j), \alpha_j)$ がいくつかの次元のひとつ少ない wall$(G_k, \Phi(G_k), \beta_k)(k = 1, \ldots, l)$ をはさんで接していると仮定する．このとき，次の公式が成り立つ [Metzler].

$$\chi(F_j) - \chi(F_i) = \sum_{k=1}^{l}(f_k - b_k)\chi(G_k)$$

ただし，f_k は，wall$(G_k, \Phi(G_k), \beta_k)$ の weight のうち $\Phi(F_j)$ の方向を向いているものの個数を表し，b_k は，$\Phi(F_i)$ の方向を向いているものの個数を表している．なお，F_i が空集合で F_j が凸多面体 $\Phi(M)$ の境界と共通部分をもつ場合もこの公式は適用できて，その場合は $\chi(F_i) = 0$ とすればよい．この場合の公式を定理の証明では用いる．

定理の証明. 点 $p \in M$ を extremal isolated fixed point とする．作用が効果的なことから点 p での isotropy 表現の weghits はすべて 0 でなく，$(n+1)$ 本あることがわかる．このことをモーメント写像の X-ray の言葉で言うと，頂点 $A_0 = \Phi(p)$ から 1 次元の wall が $(n+1)$ 本伸びているということになる．いま，頂点 A_0 を含む n 次元 wall$(F_n, A_n(= \Phi(F_n)))$ を一つ選び，$i = 1, \ldots, n-1$ 次元の wall(F_i, A_i) を $A_i \subset A_{i+1} (i = 0, \ldots, n-1)$ が成り立つように選ぶ．次に，$a_i (i = 0, \ldots, n-1)$ を A_{i+1} の方向を向いている，wallA_i の weight の個数と定義すると，

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = n + 1$$

でなければならない．各 $a_i \geq 1$ なので，$a_0, \ldots, a_{n-1}$ は一つが 2 で残りが全部 1 である．そこで，Euler 数に関する recursive formula を用いると，

$$\begin{aligned}
\chi(F_n) &= a_{n-1}\chi(F_{n-1}) \\
&= a_{n-1}a_{n-2}\chi(F_{n-2}) \\
&= \cdots \\
&= a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_0\chi(F_0) \\
&= 2 \quad (\text{since } \chi(F_0) = \chi(\{p\}) = 1)
\end{aligned}$$

$\chi(F_n)$ というのは，モーメント像の内点の symplectic quotient (閉曲面) の Euler 数なので，結局，その種数が 0 であることがわかった． □

注意. 定理の "extremal" という条件は外せない．例えば，isolated fixed point をもつが任意の種数をもつ complexity one space が構成できる．もっとも簡単な構成法を紹介する．$T = S^1$ とする．適当な symplectic structure をもつ 2 次元球面 S^2 と種数 g をもつ

閉曲面 Σ_g との直積 $M = X \times \Sigma_g$ を考える．T 作用は，X には回転で，Σ_g には自明に作用するものとする．この complexity one space の固定点集合の連結成分は 2 つあり，どちらも Σ_g と同相で extremal である．モーメント写像の像は線分で，その両端に固定点集合の連結成分が写される．次に，一方の連結成分 F_1 の中の 1 点で同変 symplectic blowing up を施す．すると得られた symplectic 多様体 $\widetilde{M}$ の固定点集合は 3 つの連結成分をもち，2 つは Σ_g に同相でもうひとつは 1 点から成る．そして，最初の 2 つの連結成分は extremal であり，残りの isolated fixed point はモーメント像の内点に写される．blowing up は局所的な操作なので complexity one space の種数には影響しない．よって，この例は求めるものである．

モーメント写像による 1 点の逆像 (モーメントファイバ) はいつも連結であるので，モーメント像の各頂点の逆像は固定点集合の一つの連結成分である．もしその連結成分が次元をもてば，それは sympletic quotient そのものであるから閉曲面であり, 定義より種数はその閉曲面の種数である．そして、それ以外の非自明な場合がこの発表で紹介した定理である．これをまとめると次のようになる．

要約(complexity one space の種数)

$$\text{genus} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{extremal isolated fixed point が存在する} \\ \text{または,} \\ \text{球面と同相な fixed component が存在する} \end{cases}$$

$$\text{genus} = g > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{種数 } g \text{ の fixed component が存在する}$$

補足．complexity one space でもっとも次元の低い場合，すなわち，4 次元 symplectic 多様体へのハミルトン S^1 作用については，同変 symplectic 同相類の分類および Delzant space への拡張問題などが完全に解決している [AH, Au1, Au2, K]．また，complexity one space の大域的な一意性問題については，[KT2] において，tall complexity one space (symplectic quotient がすべて曲面となる complexity one space) という特別なクラスの場合に解決している．

参考文献

[AH] K.Ahara and A.Hattori, *4 dimensional symplectic S^1-manifolds admitting moment map*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.**38**(1991),251-298.

[Au1] M.Audin, *Hamiltoniens périodiques sur les variétés symplectiques compactes de dimension 4*, Géométrie symplectique et mécanique, Proceedings 1988, C.Albert ed., Springer Lecture Notes in Math.**1416**(1990).

[Au2] M.Audin, *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Mathematics **93**, Birkhäuser Verlag, 1991.

[G] V.Guillemin, *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, Progress in Mathematics **122**, Birkhäuser Verlag,1994.

[K] Y.Karshon, *Periodic Hamiltonian flows on four dimensional manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc.**672**(1999).

[KT1] Y.Karshon and S.Tolman, *Centered complexity one Hamiltonian torus actions*, Trans. Amer. Math. Soc.**353**(2001), 4831-4861.

[KT2] Y.Karshon and S.Tolman, *Tall complexity one Hamiltonian torus actions.* Preprint, math SG/0202167 (18 Feb. 2002).

[M] D.S.Metzler, *A wall-crossing formula for the signature of symplectic quotients*, Trans. Amer. Math. Soc.**352**(2000), no.**8**, 3495-3521.