数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 1-11

Flat Fronts in Hyperbolic 3-space

梅原雅顕　國分雅敏　山田光太郎
広島大学　東京電機大学　九州大学

3次元双曲型空間 H^3 の平坦な曲面に対して，それを正則なデータで表現する Weierstrass 型表現公式が知られている (Gálvez, Martínez, Milán [GMM])．ただし，曲面の複素構造は，第2基本形式（ガウス方程式より定値になる）が定める共形構造によって与えられる．

一方，H^3 の完備平坦な曲面は horosphere と，測地線から等距離にある点がなす曲面に限る [Vladimirova, Sasaki]．したがって，平坦曲面の大域的な理論は意味をなさない．しかし，ある種の特異性を許す平坦曲面 — flat front — を考えれば，表現公式を通して豊かな幾何学を考えることができる．

1　3次元双曲型空間の平坦な曲面と Legendrian curve

Legendrian curve:　リーマン面 M^2 から複素リー群 $\mathrm{PSL}(2,\boldsymbol{C}) = \mathrm{SL}(2,C)/\{\pm\mathrm{id}\}$ への**有理型写像**とは，

$$(1.1)\quad E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \sqrt{h}\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} h,\ \hat{A},\ \hat{B},\ \hat{C},\ \hat{D}\ \text{は}\ M^2\ \text{上の有理型関数}, \\ AD - BC = 1 \end{pmatrix}$$

と表される E のことである．もし $\sqrt{h}$ が有理型関数ならば E は $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への有理型写像を与えるが，$\sqrt{h}$ が M^2 上で2価をもつ場合でも，正負の符号を同一視することによって E は $\mathrm{PSL}(2,\boldsymbol{C})$ 上に値をもつと考えられる．(1.1) の E が

$$(1.2)\qquad AdD - CdB = 0$$

を満たすとき，E は Legendrian curve とよばれる．

Legendrian curve E に対して

$$(1.3)\qquad E^{-1}dE = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

を満たす有理型微分形式 θ, ω が存在する．このとき

$$E = \begin{pmatrix} A & dA/\omega \\ C & dC/\omega \end{pmatrix}$$

と表すことができる．

表現公式: ここでは，H^3 の平坦な曲面に対する表現公式 [GMM] を紹介する．3 次元双曲型空間 H^3 は

$$H^3 = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\,\mathrm{SU}(2) = \mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})/\,\mathrm{PSU}(2) = \{aa^* \mid a \in \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})\}$$

と表される．ただし $\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C}) = \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})/\{\pm \mathrm{id}\}$, $\mathrm{PSU}(2) = \mathrm{SU}(2)/\{\pm \mathrm{id}\}$, $a^* = {}^t\bar{a}$ である．

向きづけられた 2 次元多様体 M^2 の H^3 への平坦なはめ込み $f\colon M^2 \to H^3$ が与えられたとしよう．すると，ガウス方程式より f の第 2 基本形式 h は定値になるから，これにより M^2 にリーマン面の構造を与えることができる．このとき，M^2 の普遍被覆 $\widetilde{M}^2$ 上で定義された正則な Legendrian curve $E\colon \widetilde{M}^2 \to \mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})$ が存在して $f = EE^*$ と表される．この E を f のリフトとよぶ．このとき，f の第 1 基本形式，第 2 基本形式は

$$ds^2 = Q + \overline{Q} + (\omega\overline{\omega} + \theta\overline{\theta}), \qquad h = \omega\overline{\omega} - \theta\overline{\theta} \tag{1.4}$$

と表される．ただし ω, θ は (1.3) で与えられる微分形式，$Q = \omega\theta$ である．M^2 上の正則 2 次微分 Q は f の Hopf 微分とよばれる．

ここで

$$G = \frac{A}{C}, \qquad G_* = \frac{B}{D} = \frac{dA}{dC} \tag{1.5}$$

とおき，これらを f の双曲的ガウス写像とよぶ．ただし，A, B, C, D はリフトを (1.1) のように表したときの成分である．曲面 f 上の点 $f(p)$ ($p \in M^2$) における単位法線ベクトルを $\nu(p)$ とおき，$\pm\nu(p)$ を初速度にもつ H^3 の測地線の漸近類を考えると，これらは H^3 の理想境界 $\partial H^3 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 上の 2 点 $\big(G(p), G_*(p)\big)$ を定める．このようにして得られる M^2 から $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ への写像がこれら 2 つの双曲的ガウス写像である．

逆に，リーマン面から $\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})$ への正則な Legendrian curve が与えられたとき，もし (1.4) の ds^2 が正定値ならば $f = EE^*$ は平坦なはめ込みを与える．しかし，一般に E が $\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})$ へのはめ込みを与えていたとしても f ははめ込みを与えるとは限らない．実際

$$|\rho| = 1 \qquad \left(\rho := \frac{\theta}{\omega}\right) \tag{1.6}$$

となる点では第 1 基本形式が（同時に第 2 基本形式も）退化する．

緒公式: 平坦な曲面を調べる上で重要な役割を果たす公式を紹介する．以下，E を (1.3) をみたす Legendrian curve とする．

このとき M^2 上の多価有理型関数 g, g_* をそれぞれ

$$dg = \omega, \qquad dg_* = \theta \tag{1.7}$$

を満たすようにとると，

$$S(g) - S(G) = S(g_*) - S(G_*) = 2Q = 2\omega\theta, \tag{1.8}$$

が成り立つ [GMM]. ただし $S(\cdot)$ は M^2 の複素座標 z に対して次で与えられる Schwarz 微分である：

$$S(g) := \left[\left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2\right] dz^2 \qquad \left(' = \frac{d}{dz}\right).$$

Schwarz 微分は複素座標のとりかたに依存するが，それらの差は正則 2 次微分として座標のとりかたによらない.

Legendrian curve E は微分方程式 (1.3) を満たすが，このことから，E の各成分が単独の 2 階線形常微分方程式を満たすことがわかる [GMM]. 実際,

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

とおくと，A, C は (E.1) の，B, D は (E.2) の解である：

$$\text{(E.1)} \qquad X'' - \frac{\hat{\omega}'}{\hat{\omega}}X' - \hat{\omega}\hat{\theta}X = 0,$$

$$\text{(E.2)} \qquad Y'' - \frac{\hat{\theta}'}{\hat{\theta}}X' - \hat{\omega}\hat{\theta}X = 0.$$

ただし，$'$ は M^2 の複素座標 z に関する微分，$\omega = \hat{\omega}\, dz, \theta = \hat{\theta}\, dz$ である.

表現公式 (2): 微分方程式 (1.3) は Legendrian curve の表現公式と解釈できるが，以下では「微分方程式を解く」必要がない表現公式を紹介する.

定理 1.1 ([KUY1]). M^2 をリーマン面，G と G_* を M^2 上の定数でない有理型関数で G と G_* は恒等的に一致しないものとする. さらに次を仮定する：

(1) 1 形式 $\dfrac{dG}{G - G_*}$ の極の位数はすべて 1 である.

(2) M^2 上の任意のループ γ に対して $\displaystyle\int_\gamma \frac{dG}{G - G_*} \in \pi i \boldsymbol{Z}$ が成り立つ.

このとき M^2 の基点 z_0 をひとつ固定して

$$\text{(1.9)} \qquad \xi(z) := c \exp \int_{z_0}^{z} \frac{dG}{G - G_*} \qquad \left(c \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}\right)$$

とおくと,

$$\text{(1.10)} \qquad E := \begin{pmatrix} G/\xi & \xi G_*/(G - G_*) \\ 1/\xi & \xi/(G - G_*) \end{pmatrix}$$

は定数でない有理型 Legendrian curve でその双曲的ガウス写像は G と G_* である. 点 $p \in M^2$ が E の極であるのは $G(p) = G_*(p)$ のときでそのときに限る.

逆に，$\mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})$ の有理型 Legendrian curve でその双曲的ガウス写像が定数でないものはこのようにして得られる.

このように，与えられた (G, G_*) を双曲的ガウス写像にもつ Legendrian curve は定数 c だけの自由度をもつ．とくに c を e^{iu} $(u \in \boldsymbol{R})$ 倍しても EE^* は変わらないので，与えられた双曲的ガウス写像をもつ平坦な曲面は実数 1 次元分の自由度をもつ．この自由度はあとで述べる平行曲面に対応する．

式 (1.10) で与えられる E に対して $E^{-1}dE$ を計算すれば $\omega = -dG/\xi^2$ を得る．このことから，次が成り立つことがわかる：

系 1.2 ([KUY1]). リーマン面 M^2 上の定数でない有理型関数 G と恒等的には 0 でない 1 次微分形式 ω に対して，

$$E = \begin{pmatrix} A & dA/\omega \\ C & dC/\omega \end{pmatrix} \qquad \left(C := G\sqrt{\frac{\omega}{dG}},\ A := GC \right) \tag{1.11}$$

は M^2 上で定義された PSL$(2, \boldsymbol{C})$ の有理型 Legendrian curve である．逆に，定数でない双曲的ガウス写像をもつ有理型 Legendrian curve はこのようにして得られる．

この表現公式は，積分を含まない．すなわち，G, ω が M^2 上で well-defined ならば対応する E も M^2 上で定義される．一方，定理 1.1 の条件 (2) は ξ が符号の任意性を除いて M^2 上で 1 価であることを要求する「周期条件」である．

平坦なはめ込み $f\colon M^2 \to H^3$ に対して，そのリフト E は M^2 上 1 価になるとは限らない．実際，普遍被覆 $\widetilde{M}^2$ 上の任意の被覆変換 τ に対して

$$E \circ \tau = E \begin{pmatrix} e^{iu_\tau} & 0 \\ 0 & e^{-iu_\tau} \end{pmatrix} \qquad (u_\tau \in \boldsymbol{R})$$

となる実数 u_τ が存在することが $f = EE^*$ が M^2 上 1 価になるための必要十分条件である．これは，表現公式（定理 1.1）においては

$$\int_\gamma \frac{dG}{G - G_*} \in i\boldsymbol{R} \tag{1.12}$$

が任意のループ γ に対して成立することに対応し，系 1.2 においては，任意の被覆変換 τ に対して

$$\omega \circ \tau = e^{2iu_\tau}\omega \tag{1.13}$$

が成立することに対応する．

2 Flat Fronts

平行曲面: 曲面 $f\colon M^2 \to H^3$ から単位法線ベクトル ν 方向に距離 t だけ移動した平行曲面 f_t を考える．とくに f が平坦な曲面で，f_t がはめ込みを与えるなら，f_t もまた平坦な曲面となる．このとき，f の リフトを E とすると f_t のリフト E_t は

$$E_t = E \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix}$$

で与えられる．とくに，双曲的ガウス写像 (G, G_*) は平行曲面をとることによって不変であり，

$$E_t^{-1} dE_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^t\theta \\ e^{-t}\omega & \end{pmatrix}$$

となる．

Legendrian curve E が与えられたとき，$f = EE^*$ は (1.6) を満たす点ではめ込みを与えない（誘導計量が退化する）．しかし平行曲面 $f_t = E_t E_t^*$ を考えると $|\rho_t| = |\theta_t/\omega_t| = e^{2t}|\rho|$ であるから，そのような点は一般に特異点でなくなる．

定義 2.1. 正則な Legendrian curve E によって与えられる写像 $f = EE^*\colon M^2 \to H^3$ において $p \in M^2$ が特異点であるとは p で f の第一基本形式が退化することである．さらに p が**見かけの特異点**であるとは，その点で ω と θ が同時に 0 とならないことである．

すると，次が成り立つ：

定理 2.2. リーマン面 M^2 上で定義された正則な Legendre curve $E\colon M^2 \to \mathrm{PSL}(2, \boldsymbol{C})$ に対して次は同値である．

(1) E ははめ込みである．

(2) $f = EE^*$ の特異点はすべて見かけの特異点である．

(3) f の第一基本形式 (1.4) の $(1,1)$-part，すなわち $\omega\bar{\omega} + \theta\bar{\theta}$ は M^2 上の（非退化な）リーマン計量を与える．

(4) E の双曲的ガウス写像 (G, G_*) を写像

$$(G, G_*)\colon M^2 \longrightarrow \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$$

とみなすと，これははめ込みである．

Legendrian immersion と flat front: 一般に，n 次元リーマン多様体 N の余接束 T^*N 上には N の局所座標系 $(x^1, \ldots, x^n)$ から標準的な座標系 $(x^1, \ldots, x^n; p_1, \ldots, p_n)$ が定義されるが，微分形式

$$\beta := \sum p_j \, dx^j$$

の単位余接束 T_1^*N への制限は，T_1^*N の接触構造を与える．$n-1$ 次元多様体 M から T_1^*N への写像 $L : M \to T_1^*N$ が *Legendrian* であるとは，$L^*\beta = 0$ が成立することである．

いま，N のリーマン計量により単位余接束と単位接束 T_1N を同一視し，標準的な射影を $\pi\colon T_1N \to N$ と書くことにする．このとき，写像 $L = (f, \nu)\colon M \to T_1N$ $(f = \pi \circ L,$ $\nu \in T_{x(p)}N)$ が Legendrian であるための必要十分条件は $\langle df, \nu \rangle = 0$ が成り立つことである．もし $f\colon M \to N$ がはめ込みなら，ν はその単位法線ベクトル場を与えている．

一般に Legendrian はめ込み $L=(f,\nu)$ の射影 f を (wave) front とよぶ．このとき，任意の実数 t に対して

$$f_t(p)=\mathrm{Exp}_{f(p)}\,t\nu,$$
$$\nu_t(p)=\nu(p) \text{ を初速とする測地線にそって } \nu(p) \text{ を } f_t(p) \text{ まで平行移動したもの}$$

とおくと $L_t=(f_t,\nu_t)$ はまた Legendrian immersion を与える．とくに f_t は f の**平行曲面**である．

以下 $N=H^3$ とする．H^3 をミンコフスキー空間 L^4 の超曲面と見なせば T_1H^3 は $L^4\oplus L^4$ の部分多様体として実現される．そこで，T_1H^3 の元を $(x,e)\in L^4\oplus L^4$ と表せば

$$d\tilde{s}^2:=|dx|^2+|de|^2$$

によって T_1H^3 にリーマン計量を定めることができる．Legendre はめ込み

$$L=(f,\nu)\colon M^2\longrightarrow T_1H^3$$

で引き戻した計量

$$L^*d\tilde{s}^2=|df|^2+|d\nu|^2 \tag{2.1}$$

を考える．

命題 2.3. Legendre はめ込み $L\colon M^2\to T_1H^3$ の射影 $f=\pi\circ L$ が平坦なはめ込みを与えているなら，その第二基本形式は (2.1) で与えられる計量と比例する．

したがって，平坦な曲面 f に対しては，計量 (2.1) は [GMM] の表現公式で考えたのと同じ共形構造を与える．

定義 2.4. Legendrian immersion $L=(f,\nu)\colon M^2\to T_1H^3$ の射影 f が（適当な平行曲面をとれば）誘導計量に対して平坦な曲面を与えるとき，f を *flat front* という．

定理 2.5. 単連結な 2 次元多様体 M^2 上で定義された flat front f は，(2.1) で与えられる M^2 の自然な共形構造に対して正則 Legendre はめ込み $E\colon M^2\to \mathrm{PSL}(2,\boldsymbol{C})$ により $f=EE^*$ と表される．逆にリーマン面 M^2 上で定義された正則 Legendre はめ込み E に対して $f=EE^*$ は flat front を与え，計量 (2.1) は M^2 の共形構造と同じ共形構造を与える．

したがって，flat front は定理 1.1，系 1.2 のような正則なデータによる表現公式をもつことがわかる．

双対性: Flat front の表現公式では，二つの 1 次微分形式 ω, θ （または (1.7) の g と g_*），二つの双曲的ガウス写像 G, G_* の対が重要な役割をはたしている．これらの間は次のように**双対性**を考えることができる：正則な Legendre はめ込み E に対して

$$\widetilde{E}=E\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$$

とおくと，$\widetilde{E}$ も Legendre はめ込みを与えている．とくに

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad \text{ならば} \qquad \widetilde{E} = \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$$

であるから，E の双曲的ガウス写像を G, G_* とすると $\widetilde{E}$ の双曲的ガウス写像 $\widetilde{G}, \widetilde{G}_*$ はそれぞれ

$$\widetilde{G} = G_*, \qquad \widetilde{G}_* = G$$

となる．また，

$$E^{-1}dE = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{E}^{-1}d\widetilde{E} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega} & 0 \end{pmatrix},$$

とおけば

$$\tilde{\omega} = \theta, \qquad \tilde{\theta} = \omega$$

となり，E と $\widetilde{E}$ では G と G_*（ω と θ）が入れ替わることがわかる．

一方

$$\widetilde{E}\widetilde{E}^* = EE^*$$

であるから，E と $\widetilde{E}$ は同じ flat front を与える．

3 完備な flat front

一般に flat front は特異点をもつが，それ以外の部分での完備性を次のように定義する．

定義 3.1. Flat front $f\colon M^2 \to H^3$ は，適当な平行曲面をとることにより，f の特異点集合 K をコンパクトにすることができて，K を除いた部分で完備な曲面を定めるとき，完備であるという．

命題 3.2. Flat front $f\colon M^2 \to H^3$ が完備ならば，M^2 はコンパクトなリーマン面から有限個の点（end）を除いたものに正則同値である．

とくに，各 end において次が成り立つ：

命題 3.3 ([GMM]). Hopf 微分 Q は end p に高々極をもつ．

命題 3.4. 次は同値である．

(1) Q は p に高々2位の極をもつ．

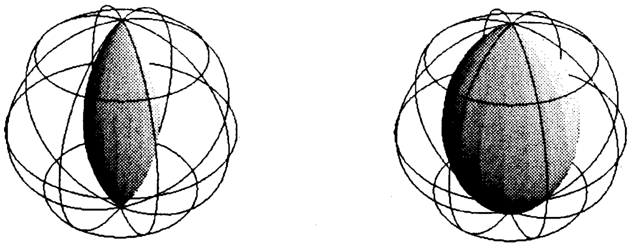
(2) 双曲的ガウス写像 G は p に高々極をもつ．

(3) 双曲的ガウス写像 G_* は p に高々極をもつ．

とくに命題3.4の条件が成り立つ end を *regular end* という．

双曲的ガウス写像 (G, G_*) は曲面の単位法線ベクトルを初速とする測地線の両端であるから，曲面上の点ではつねに $G \neq G_*$ が成り立つ．一方 $G = G_*$ が成り立つならば，それは必然的に end になる．逆に，正則な end p においては $G(p) = G_*(p)$ が成り立つ．

さらに，end が埋め込みとなるための条件が次であたえられる：



$e^{-t} = \sqrt{2}$ $\qquad$ $e^{-t} = 2$

図 1: 測地線からの等距離曲面

命題 3.5. 完備な flat front の end p が埋め込みであるための必要十分条件は，双曲的ガウス写像 G と G_* の少なくとも一方がその点で分岐しないことである．

極小曲面の Osserman 不等式は，全曲率（すなわちガウス写像の次数）と曲面の位相型の関係式であったが，flat front に対しては次の不等式が成り立つ

定理 3.6 ([KUY2]). $\overline{M}^2$ をコンパクト・リーマン面，

$$f : \overline{M}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \longrightarrow H^3$$

を完備な flat front, (G, G_*) をその双曲的ガウス写像とする．このとき，

$$\deg G + \deg G_* \geq n$$

が成り立つ．等号は，すべての end が regular かつ埋め込みとなることである．

次の節で紹介する例 4.1, 4.2, 4.3 および 4.7 の end はすべて regular かつ embedded だから，いずれもこの不等式の等号を満たす例である．

4 Flat front の例

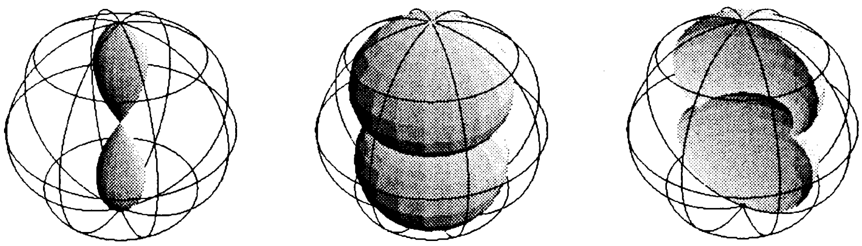
例 4.1 (測地線からの等距離曲面). リーマン面 $M^2 = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上で

$$G = z, \qquad \omega = \frac{e^{-t}}{2z}\,dz \qquad t \in \boldsymbol{R}$$

に対して，系 1.2 を適用すると，正則 Legendre はめ込み

$$E = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-t/2} & 0 \\ 0 & e^{t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{z} & \sqrt{z} \\ \frac{1}{\sqrt{z}} & -\frac{1}{\sqrt{z}} \end{pmatrix}$$

を得る．対応する flat front は，H^3 の測地線から等距離の点がなす平坦な曲面である（図 1）．特異点をもたない完備平坦な曲面は，horosphere と，この曲面（平行曲面族）に限る．



$\mu = 0.5$ $\mu = 1.5$ $\mu = 1.5$

図 2: 回転面

例 4.2 (回転面). リーマン面 $M^2 = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上で

$$G = \sqrt{\frac{\mu-1}{\mu+1}}z \qquad \text{and} \qquad \omega = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2} z^{\mu-1}\,dz \qquad (\mu \in \boldsymbol{R}_+ \setminus \{1\}).$$

とおくと，系 1.2 により対応する Legendre はめ込みは

$$E = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} z^{(\mu+1)/2} & (\mu+1)z^{-(\mu-1)/2} \\ z^{(\mu-1)/2} & (\mu-1)z^{-(\mu+1)/2} \end{pmatrix}$$

となる．μ が整数でなければ E は M^2 の普遍被覆 $\widetilde{M}^2$ 上でしか定義されないが，原点の回りのループに対応する $\widetilde{M}^2$ の被覆変換 τ に対して

$$E \circ \tau = E \begin{pmatrix} -e^{\pi i \mu} & 0 \\ 0 & -e^{-\pi i \mu} \end{pmatrix}$$

が成り立つので，$f = EE^*$ は M^2 上で定義された flat front になる．f の特異点集合は $\{|z| = 1\}$ である (図 2).

例 4.3 (Jorge-Meeks 型の曲面). 整数 $n \geq 2$ に対して，

$$M^2 := \boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \setminus \{1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1}\} \qquad \left(\zeta = \exp\frac{2\pi i}{n}\right).$$

とおく．このとき，

$$G = z \quad \text{and} \quad \omega = k(z^n - 1)^{-2/n}\,dz \qquad (k > 0), \tag{4.1}$$

とおけば，系 1.2 を通して M^2 の普遍被覆上で定義された正則 Legendre はめ込み E が得られる．とくに対応する flat front は M^2 上で定義されており，n 個の対称な regular embedded ends をもつ（図 3）．この曲面の双曲的ガウス写像は

$$(G, G_*) = \left(z, z^{1-n}\right)$$

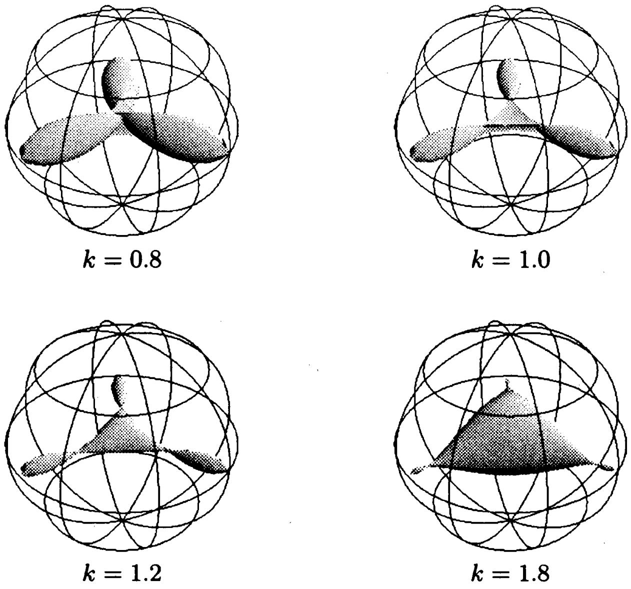


図 3: Jorge-Meeks 型の曲面 ($n = 3$)

例 4.4 (Trinoids). リーマン面 $M^2 = \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}$ 上で

$$G = z, \qquad \omega = k z^{\mu_1} (z-1)^{\mu_2}\, dz$$

と定める．ただし k, μ_1, μ_2 は任意の実数である．このとき，対応する正則 Legendre はめ込みから得られる flat front は 0, 1, ∞ に embedded regular end をもつ．

定理 4.5 ([KUY2]). Embedded regular ends をもつ genus 0 trinoid は，双対を除いて例 4.4 にあげたものに限る．

例 4.3 の $n = 3$ の場合は適当に座標変換を行えば，例 4.4 に含まれることがわかる．

例 4.6 (n-noids). 例 4.4 と同様にして

$$M^2 = \boldsymbol{C} \setminus \{p_1, \dots, p_{n-1}\}, \qquad G = z, \qquad \omega = k(z-p_1)^{\mu_1} \dots (z-p_{n-1})^{\mu_{n-1}}\, dz$$

とすると，$p_1, \dots, p_{n-1}$, ∞ に embedded regular ends をもつ flat front が得られる．

例 4.7 (種数 1 で embedded end をもつ例 [KRUY]). トーラス $\overline{M}^2 = \boldsymbol{C}/\Gamma$ を考える．ただし Γ は $2\gamma_1$ と $2\gamma_2$ で生成される $\boldsymbol{C}$ の格子で，正方形格子でないものとする．Weierstrass の $\wp$ 関数を用いて

$$G := \wp, \qquad \omega := \frac{\wp'(z-a)\wp'(z)}{\{\wp(z)\}^2}\, dz,$$

とおく．ただし a は定数で，$\gamma_j + a \notin \Gamma$ ($j = 1, 2$) となるようにとる．すると，これは G の分岐点（0, γ_1, γ_2, $\gamma_1 + \gamma_2$）と ω の零点（6 個ある）に regular embedded end をもつ flat front を定める．

参考文献

[B] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space*, Astérisque **154–155** (1987), 321–347.

[E] N. Ejiri, *Degenerate minimal surfaces of finite total curvature in R^N*, Kobe J. Math. **14** (1997), 11–22.

[GMM] J. Gálvez, A. Martínez, F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic 3-space*, Math. Ann. **316** (2000), 419–435.

[KRUY] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, in preparation.

[KUY1] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Small's type formula for contact curves in* $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ *and its applications to flat surfaces in hyperbolic 3-space*, preprint, math.DG/0209258.

[KUY2] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in H^3* in prepration.

[S] A. J. Small, *Surfaces of Constant Mean Curvature* 1 *in H^3 and Algebraic Curves on a Quadric*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 1211–1220.

[UY1] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature*-1 *in the hyperbolic* 3*-space*, Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.

[UY2] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces of constant mean curvature-c in $H^3(-c^2)$ with prescribed hyperbolic Gauss map*, Math. Ann. **304** (1996), 203–224.

[UY3] M. Umehara and K. Yamada, *A duality on CMC*-1 *surface in the hyperbolic* 3*-space and a hyperbolic analogue of the Osserman Inequality*, Tsukuba J. Math. **21** (1997), 229–237.