

Stability for Critical Points of a One-dimensional Geometric Variational Problem with Constraint

京都教育大学教育学部 小磯 深幸 (Miyuki Koiso)
Department of Mathematics,
Kyoto University of Education

1 はじめに

たとえば極小曲面や平均曲率一定曲面のような、物理的にも自然な幾何学的変分問題を研究することは、それ自身が重要であるだけでなく、それから得られる概念や方法が、もっと一般の、または別の、幾何学的あるいは解析学的変分問題における理論や方法を構築するために役立つという意味でも非常に重要である。

我々は、[3, Theorem 1.3] において、3次元ユークリッド空間内の境界を持つコンパクト平均曲率一定曲面の安定性を、面積汎関数の第2変分に付随する固有値問題の固有値・固有関数等の性質により完全に決定する方法を得た。この方法は、より一般の条件付き変分問題に対する定理として述べることも可能である。しかしながら、これが個々の変分問題の個々の解の安定性を判定するためにどの程度有効であるかということは、定理の形の抽象性から、あまり明らかではない。本論文においては、この方法を用いて、ある部分的に自由境界を持つ条件付き変分問題のすべての解について、その安定性を完全に決定する。我々の変分問題は、曲線に対する問題として扱うことができ、とりわけこういった1次元の対象に対しては、上で述べた方法(本論文で扱う変分問題の解に対する表現は Lemma 4.1)が有効であることがわかる。

さて、与えられた曲線 Γ 上に境界の一部を持つ薄膜に関する変分問題を考えよう。ただし我々は、薄膜の重さが無視できないような場合について考えるものとする。また、膜は均一な素材でできており、その厚さは至るところ一定であるとする。このとき、与えられた体積を持つ薄膜の中で、表面張力、重力エネルギー、濡れエネルギーの総和より成るエネルギーの臨界点を与えるものは、曲線 Γ 上に境界の一部を持つ曲面 \mathcal{F} の、面積を保つ変分に対する「自由境界 C の長さ L + 膜 \mathcal{F} の重力エネルギー G_γ + \mathcal{F} の濡れエネルギー W_β 」(総エネルギーと呼ぶ)の臨界点として自然に定式化できる ([4])。特に、 Γ が鉛直平面上にあり、かつ \mathcal{F} が平面領域である場合については、我々の変分問題は、 Γ 上に両端点(自由境界)を持つ埋め込まれた曲線 C に対する変分問題の形で述べることができる。 C がこの変分問題の臨界点であるための必要十分条件は、 C の曲率が高さの線形関数であり、かつ、 C がその両端点において Γ と成す角が互いに補角を成すことである (Corollary 2.1)。

C が臨界点であるとき, C と Γ によって囲まれるコンパクト領域 \mathcal{F} が, 面積を保ち境界条件を満たす任意の変分に対して総エネルギーの第 2 変分が非負であるという条件を満たすとき, \mathcal{F} は安定であるという. あるいは, 簡単のため, C は安定であるという (Definition 2.1).

曲率が高さの線形関数であるという条件は, 振り子の方程式に帰着されることがわかり, その解は, Jacobi の楕円関数を用いて具体的に記述できる (Lemma 3.1). 本稿では, 特に, C が鉛直平面内に与えられた互いに平行な二鉛直線のそれぞれに一つずつ端点を持つ場合について, 詳しく調べる. この場合には, すべての臨界点を求めることができ, さらに, それぞれの安定性を判定することができる (Theorems 4.1 ~ 4.4). 安定性の判定には, 解の満たす微分方程式より得られる解の対称性 (Lemma 3.2 (v), (vi)) と前述の Lemma 4.1 が本質的に用いられる.

なお, 我々の問題は, [6], [8], [7] 等において研究された変分問題に, さらに重力場を考慮したものの 1 次元版と見ることできる.

本論文の構成は次のとおりである. 第 2 節では, Euler-Lagrange 方程式, 総エネルギーの第 2 変分公式を求め, 臨界点の安定性を定義する. 第 3 節では, 臨界点の形状について調べる. 第 4 節では, 個々の臨界点の安定性を判定する.

なお, 本研究は, Bennett Palmer 氏 (Idaho State University, USA) との共同研究 [4] の一部に基づいている.

2 Euler-Lagrange 方程式と第 2 変分公式

Γ を区分的に滑らかな曲線とする. Σ を 2 次元の向き付け可能でコンパクトかつ連結な C^∞ 級多様体であって, S^1 と同相な境界 $\partial\Sigma$ を持つものとする. $\partial\Sigma$ を 2 つの連結な弧 σ, ρ に分ける. すなわち,

$$\partial\Sigma = \sigma \cup \rho, \quad \sigma \cap \rho = \{\zeta_1, \zeta_2\}$$

とする.

$$X = (x, y, z) : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$$

をはめ込み, その Gauss 写像を $\nu = (\nu^1, \nu^2, \nu^3) : \Sigma \rightarrow S^2$ とし, X の制限

$$X|_\sigma : \sigma \rightarrow \Gamma$$

は単射であるとする. 次のように 4 つの汎関数を定義する.

$$A(X) := \int_\Sigma d\Sigma, \quad L(X) := \int_\rho |dX|,$$

$$G_\gamma(X) := \gamma \int_\Sigma z d\Sigma, \quad W_\beta(X) := \beta \int_\sigma |dX|.$$

ただしここで, $d\Sigma$ は X によって誘導される Σ の面積要素であり, γ と β は定数である. このとき, $A(X)$ は X の面積を, $L(X)$ は自由境界 $X(\rho)$ の長さを表し, $G_\gamma(X)$ は X の重力エネルギー, $W_\beta(X)$ は濡れエネルギーに対応している. たとえば, X が細い枠 Γ で張られる石鹸膜をモデルとしている場合は, $\gamma \geq 0$, $\beta \leq 0$ と仮定するのが自然である.

X の滑らかな変分 $X_\epsilon : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}^3$ ($X_0 = X$) であって, 境界条件

$$X_\epsilon(\sigma) \subset \Gamma \tag{1}$$

を満たすものを考える. 簡単のため, X_ϵ の代わりに X と書くことにする. X の $\partial\Sigma$ に沿う外向き単位法ベクトルを n で表す. ρ の表示 $\tilde{\rho}: [\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow \rho$ を, $\tilde{\rho}(\alpha_i) = \zeta_i$, $i = 1, 2$, $\dot{X} \times n = |\dot{X}| \nu$ を満たすようにとる. ただしここで,

$$\dot{X} = \dot{X}|_\rho := \frac{\partial(X|_\rho \circ \tilde{\rho})}{\partial t}$$

であり, t は $[\alpha_1, \alpha_2] \subset \mathbf{R}$ のパラメーターである. 同様に, $\tilde{\sigma}: [\delta_1, \delta_2] \rightarrow \sigma$ は σ の表示であつて, $\tilde{\sigma}(\delta_1) = \zeta_2$, $\tilde{\sigma}(\delta_2) = \zeta_1$, $\dot{X} \times n = |\dot{X}| \nu$ を満たすものとする. ここで,

$$\dot{X} = \dot{X}|_\sigma := \frac{\partial(X|_\sigma \circ \tilde{\sigma})}{\partial t}$$

であり, t は $[\delta_1, \delta_2] \subset \mathbf{R}$ のパラメーターである.

X の平均曲率を H で表し, $X|_{\partial\Sigma}$ の法曲率, 測地的曲率を, それぞれ, κ_n , κ_g で表す. $A(X)$, $L(X)$, $G_\gamma(X)$, $W_\beta(X)$ の第 1 変分を計算することにより, 次がわかる.

Proposition 2.1 (Euler-Lagrange equation) $\dot{X}|_\sigma(\delta_2)$ から $\dot{X}|_\rho(\alpha_1)$ に至る角度を θ_1 , $\dot{X}|_\rho(\alpha_2)$ から $\dot{X}|_\sigma(\delta_1)$ に至る角度を θ_2 で表す. 面積を保ち境界条件 (1) を満たす X の任意の変分に対して総エネルギーの第 1 変分 $\delta(L + G_\gamma + W_\beta) = 0$ となるのは, X が次の条件を満足するとき, かつそのときに限る: ある定数 $\kappa_0 \in \mathbf{R}$ が存在して,

$$2H(\gamma z + c) - \gamma \nu^3 = 0 \quad \text{on } \Sigma,$$

$$\kappa_n = 0, \quad \kappa_g = \gamma z + c\kappa_0 \quad \text{on } \rho, \quad \cos \theta_1 = \cos \theta_2 = \beta$$

が成立する.

次に, Γ が

$$l_1 = \{(x_0, 0, z) | z < a\}, \quad l_2 = \{(x, 0, a) | x_0 \leq x \leq x_1\},$$

$$l_3 = \{(x_1, 0, z) | z < a\}, \quad x_0 < x_1, \quad \Gamma = l_1 \cup l_2 \cup l_3$$

である場合について考えよう. 簡単のため, $\mathcal{F} := X(\Sigma)$ は平面領域であると仮定し, 以下, xz -平面内でのみ, 問題を考えることにする. さらに, 自由境界 C は, l_1 , l_3 上にそれぞれ一つずつ端点を持つと仮定する. このとき, 我々の変分問題は, 埋め込まれた曲線 $C(s) = (x(s), z(s))$ (s は弧長, $0 \leq s \leq L$, $x(0) = x_0$, $x(L) = x_1$, $x_0 < x(s) < x_1$ ($\forall s \in (0, L)$)) に対する変分問題の形で述べるができる. $C \cup \Gamma$ で囲まれるコンパクト平面領域が \mathcal{F} である. C の単位法ベクトル n を, \mathcal{F} の外側を向くようにとり, この n に対する C の曲率を κ で表す. \mathcal{F} の変分 \mathcal{F}_ϵ に対応する C の変分 $C_\epsilon(s) = (x_\epsilon(s), z_\epsilon(s))$ に対する境界条件は

$$x_\epsilon(0) = x_0, \quad x_\epsilon(L) = x_1 \tag{2}$$

となる.

このとき, 問題は, 一般の場合で $\nu = (0, -1, 0)$ と取ったものに対応しており, Euler-Lagrange 方程式は, Proposition 2.1 から次のようになる.

Corollary 2.1 (Euler-Lagrange equation) 面積を保ち境界条件 (2) を満たす \mathcal{F} の任意の変分に対して総エネルギーの第 1 変分 $\delta(L + G_\gamma + W_\beta) = 0$ となるのは, C が次の条件を満足するとき, かつそのときに限る: ある定数 $\kappa_0 \in \mathbf{R}$ が存在して,

$$\kappa = \gamma z + \kappa_0, \quad (3)$$

$$-z'(0) = \cos \theta_1 = \beta = \cos \theta_2 = z'(L) \quad (4)$$

が成立する. ただしここで, θ_1 は $-E_3 := (0, -1)$ から $C'(0)$ に至る角度, θ_2 は $C'(L)$ から $E_3 = (0, 1)$ に至る角度である.

(4) から,

$$|\theta_1| = |\theta_2| \pmod{2\pi}$$

が成り立つ. C が自己交差を持たないことと, 任意の $s \in (0, L)$ に対して $x_0 < x(s) < x_1$ であることから,

$$\theta := \theta_1 = \theta_2 \in [0, \pi]$$

とおいてよい. また,

$$x'(0) = \sin \theta = x'(L) \geq 0 \quad (5)$$

である.

ここで, 後の議論のために, (3), (4) を満たす解 C の端点での様子を少し調べておく. $C'' = \kappa n$ より $x'' = \kappa z'$ である. これを C 上積分して (3) と (5) を用いることにより,

$$0 = [x']_0^L = \frac{\gamma}{2}[z^2]_0^L + \kappa_0[z]_0^L$$

となる. したがって,

Lemma 2.1 次の (6), (7) の内の少なくとも一方が成立する.

$$z(L) = z(0), \quad (6)$$

$$\gamma(z(L) + z(0)) = -2\kappa_0. \quad (7)$$

さらに, (6) は次と同値である.

$$\kappa(L) = \kappa(0).$$

また, (7) は次と同値である.

$$\kappa(L) + \kappa(0) = 0.$$

さて, $A(X)$, $L(X)$, $G_\gamma(X)$, $W_\beta(X)$ は次のように書き直すことができる.

$$A[C] := A(X) = - \int_C z dx + c_1, \quad c_1 := (x_1 - x_0)a,$$

$$L[C] := L(X) = \int_C ds,$$

$$G_\gamma[C] := G_\gamma(X) = (-\gamma/2) \int_C z^2 dx + c_2, \quad c_2 := (\gamma/2)(x_1 - x_0)a^2,$$

$$W_\beta[C] := W_\beta(X) = \beta[(a - z(0)) + (a - z(L)) + (x_1 - x_0)].$$

以下, $|\beta| \leq 1$ と仮定し, 曲線 C は Euler-Lagrange 方程式 (3), (4) を満たすとする. 面積を保ち境界条件 (2) を満たす C の変分

$$C_\epsilon(s) := C(s) + \epsilon(p(s)n(s) + q(s)C'(s)) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

に対して, 総エネルギーの第 2 変分 $\delta^2(L + G_\gamma + W_\beta)$ を求めよう. 簡単のため, C_ϵ の曲率その他についても, ϵ を付けずに κ などと書くことにする.

$\epsilon = 0$ においては, (3), (4) を用いることにより,

$$\begin{aligned} \delta^2(L + G_\gamma + W_\beta) &= \delta^2(L + G_\gamma + W_\beta + \kappa_0 A) = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \left[\frac{d}{d\epsilon} (L + G_\gamma + W_\beta + \kappa_0 A) \right] \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \left[\int_C (-\kappa + \gamma z + \kappa_0) \langle \delta C, n \rangle ds + [(\delta C, C')]_0^L - \beta((\delta z)(L) + (\delta z)(0)) \right] \\ &= \int_C \left(\frac{\partial}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} (-\kappa + \gamma z + \kappa_0) \right) \cdot \langle \delta C, n \rangle ds + \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \left[[(\delta C, C')]_0^L - \beta [(\delta C, \bar{C}')_0^L] \right] \end{aligned}$$

となる. ただしここで,

$$\bar{C}'(L) := E_3 = (0, 1), \quad \bar{C}'(0) := -E_3 = (0, -1)$$

とおいた. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は \mathbf{R}^2 の標準的な内積を表す. 簡単な計算により, 次の第 2 変分公式が得られる.

Proposition 2.2 (第 2 変分公式) 埋め込まれた曲線 C は (3), (4) を満たすとする. $\theta := \theta_1 = \theta_2$ とおく. 面積を保ち境界条件 (2) を満たす C の変分に対する総エネルギーの第 2 変分 $\delta^2(L + G_\gamma + W_\beta)$ は, 変分ベクトル場の法成分 pn のみによって決まり, 次で与えられる.

(i) $|\beta| < 1$ のときは,

$$\begin{aligned} \delta^2(L + G_\gamma + W_\beta) &= \int_C \{ -p'' - (\kappa^2 + \gamma x')p \} p ds + [(p' - \kappa \cot \theta \cdot \bar{z}'p)p]_0^L \\ &=: I(p) \end{aligned}$$

が成立する. ただしここで, $\bar{z}'(0) := -1$, $\bar{z}'(L) := 1$ である.

(ii) $|\beta| = 1$ のときは,

$$\delta^2(L + G_\gamma + W_\beta) = \int_C \{ -p'' - (\kappa^2 + \gamma x')p \} p ds =: I(p)$$

が成立する.

次の Lemma 2.2 が, 固定境界の場合の対応する命題の証明 (Barbosa-do Carmo [1]) に少し修正を加えることにより示される.

Lemma 2.2 埋め込まれた曲線 C は (3), (4) を満たすとする.

(i) $|\beta| < 1$ と仮定する. C^∞ 級関数 $p: [0, L] \rightarrow \mathbf{R}$ で $\int_0^L p ds = 0$ を満たすものに対し, 面積を保ち境界条件 (2) を満たす C の変分 C_ϵ であって, $\langle \delta C, n \rangle = p$ なるものが存在する.

(ii) $|\beta| = 1$ と仮定する. C^∞ 級関数 $p: [0, L] \rightarrow \mathbf{R}$ で $\int_0^L p ds = 0$ と $p(0) = p(L) = 0$ を満たすものに対し, 面積を保ち境界条件 (2) を満たす C の変分 C_ϵ であって, $\langle \delta C, n \rangle = p$ なるものが存在する.

そこで, Euler-Lagrange 方程式 (3), (4) を満たす曲線 C に対し, 関数空間 F_0, F を次で定義する.

$$F_0 := \begin{cases} C^\infty([0, L]), & |\beta| < 1, \\ \{p \in C^\infty([0, L]) \mid p(0) = p(L) = 0\}, & |\beta| = 1, \end{cases}$$

$$F := \left\{ p \in F_0 \mid \int_0^L p \, ds = 0 \right\}.$$

C の安定性を次のように定義する.

Definition 2.1 (安定性) 埋め込まれた曲線 C は (3), (4) を満たすとする. 任意の $p \in F$ に対して $I(p) \geq 0$ が成立するとき C は安定であるといい, 安定でないとき不安定であるという. また, 任意の $p \in F_0$ に対して $I(p) \geq 0$ が成立するとき, C は強安定であるという.

3 解曲線の微分方程式

方程式 (3) は 2 階常微分方程式系であり, これを満たす曲線は完全に決定される. 解曲線は, ある完備な曲線の一助変数族と円を除き, x 軸方向の適当な平行移動によって不変な周期曲線であることがわかる. 本節では, これらの事柄及び解曲線の対称性について述べる.

$C = (x, z) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$, $I \subset \mathbf{R}$ は (3) の解であって, 弧長 s によって表示されているものとする. ただしここで, I は延長可能な最大の区間とする. $\gamma = 0$ のときは, 解が水平な直線または円であることは明らかである. そこで, 以下, $\gamma \neq 0$ と仮定する. $C'' = \kappa n$ より,

$$x'' = \kappa z', \quad z'' = -\kappa x' \quad (8)$$

が成り立つ. $\cos \sigma := x'$, $\sin \sigma = z'$ とおくことにより, 方程式 (8) は

$$z' = \sin \sigma, \quad \sigma' = -\kappa = -(\gamma z + \kappa_0)$$

と書き換えられる. これより, σ は振り子の方程式

$$\sigma'' = -\gamma \sin \sigma \quad (9)$$

を満たすことがわかる. 逆に, (9) の解は, (8) で $\kappa = \gamma z + \text{定数}$ とおいたものの解を与える.

$$\rho := |\gamma|, \quad \omega := \begin{cases} \sigma, & \gamma > 0 \\ \sigma + \pi, & \gamma < 0 \end{cases}$$

とおくことにより, $\rho > 0$ なる振り子の方程式

$$\omega'' = -\rho \sin \omega \quad (10)$$

についてのみ考えればよいことがわかる.

(10) を積分すると,

$$(\omega')^2 - 2\rho \cos \omega = \text{定数} =: a \quad (11)$$

となるが, これはさらに,

$$(\omega')^2 = 4\rho \left(\left[\frac{a + 2\rho}{4\rho} \right] - \sin^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \right)$$

と書き換えられる. $\omega \equiv 0$ なる場合は解は水平な直線である. そこで, この場合を除いて考えると,

$$0 < \frac{a + 2\rho}{4\rho} =: \chi^2, \quad \chi > 0$$

となる. 必要ならば, パラメーター s を $s + \text{定数}$ に変換することにより, (11) の解は次のように表される (cf. Lawden[5, Chapter 5]).

Lemma 3.1 Case (i) $\chi^2 < 1$. 解は, 楕円関数を用いて次のように表される.

$$\sin(\omega/2) = \chi \operatorname{sn}(\sqrt{\rho}s, \chi), \quad \cos(\omega/2) = \operatorname{dn}(\sqrt{\rho}s, \chi).$$

Case (ii) $\chi^2 > 1$. 解は, 楕円関数を用いて次のように表される.

$$\sin(\omega/2) = \operatorname{sn}(\sqrt{\rho}s/\chi, \chi), \quad \cos(\omega/2) = \operatorname{cn}(\sqrt{\rho}s/\chi, \chi).$$

このとき, $a > 2\rho$ であるから, (11) により任意の点で $\omega' \neq 0$, したがって, $\kappa \neq 0$ である.

Case (iii) $\chi^2 = 1$. 解は次のように表される.

$$\sin(\omega/2) = \tanh(\sqrt{\rho}s), \quad \cos(\omega/2) = \operatorname{sech}(\sqrt{\rho}s).$$

さらに, 解曲線の形状について, 次のことがわかる.

Lemma 3.2 $C = (x, z) : I \rightarrow \mathbf{R}^2$ は (3) の解とする. ただし, $\gamma \neq 0$ とする. このとき, 次の (i) ~ (vi) が成り立つ.

(i) $I = \mathbf{R}$.

(ii) z は有界である.

(iii) Lemma 3.1 の Case (iii) を除き, C は周期的である. より厳密に, 次のことが成立する. 定数 $d_0 > 0$ が存在して,

$$x(s + d_0) = x(s) + a_0, \quad z(s + d_0) = z(s), \quad \forall s \in \mathbf{R}$$

が成り立つ. ただしここで,

$$a_0 := x(d_0) - x(0)$$

とおいた.

(iv) $z'(s_1) = 0$ なる s_1 が存在する.

(v) $z'(s_1) = 0$ が成り立つとき, C は直線 $\{x = x(s_1)\}$ に関して対称である.

(vi) $\kappa(s_2) = 0$ が成り立つならば, C は点 $C(s_2)$ に関して対称である.

証明 (i) は Lemma 3.1 における解の表現からすぐにわかる.

z が有界であることは, (11) が $(\gamma z + \kappa_0)^2 = 2|\gamma| \cos \omega + a$ となることからわかる.

C の周期性は, 楕円関数の周期性からわかる.

(iv) は, Lemma 3.1 の Case (i), (ii) については, 周期性よりわかる. Case (iii) については, 次のようにしてわかる.

$$z'(0) = \sin(\sigma(0)) = 2 \sin(\sigma(0)/2) \cos(\sigma(0)/2) = 2 \tanh(0) \operatorname{sech}(0) = 0.$$

(v) を示す. パラメーター s と座標の平行移動により,

$$s_1 = 0, \quad x(0) = 0, \quad \kappa = \gamma z$$

が成立すると仮定してよい.

$$\tilde{C} := (\tilde{x}, \tilde{z}), \quad \tilde{x}(s) := -x(-s), \quad \tilde{z}(s) := z(-s)$$

とおけば, (8) により,

$$\tilde{x}'' = (\gamma\tilde{z})\tilde{z}', \quad \tilde{z}'' = -(\gamma\tilde{z})\tilde{x}'$$

が成り立つ. さらに,

$$\tilde{C}(0) = (0, z(0)) = C(0),$$

$$\tilde{C}'(0) = (1, 0) = C'(0), \quad \tilde{C}''(0) = (-x''(0), z''(0)) = (0, z''(0)) = C''(0)$$

が成り立つ. したがって, C と \tilde{C} は同じ常微分方程式系の同じ初期値を持つ解である. 故に, $C \equiv \tilde{C}$ が成り立ち, (v) が示せた.

(vi) を示す. パラメーター s と座標の平行移動により,

$$s_2 = 0, \quad C(0) = (0, 0), \quad \kappa = \gamma z$$

が成立すると仮定してよい.

$$\tilde{C} := (\tilde{x}, \tilde{z}), \quad \tilde{x}(s) := -x(-s), \quad \tilde{z}(s) := -z(-s)$$

とおく. (v) の証明と同様にして, $C \equiv \tilde{C}$ が成立することがわかり, (vi) が示せる. \square

4 解の安定性

以下, $C = (x, z) : [0, L] \rightarrow \mathbf{R}^2$ は Euler-Lagrange 方程式 (3), (4) を満たすとする. 本節において, すべての解 C の安定性を決定する.

Jacobi 作用素 J と境界作用素 B を次のように定義する.

$$J[p] = p'' + (\kappa^2 + \gamma x')p,$$

$$B[p] = \begin{cases} p' - \kappa \cot(\theta)z'p, & |\beta| < 1, \\ p, & |\beta| = 1. \end{cases}$$

このとき, 面積を保ち境界条件 (2) を満たす C の変分に対する総エネルギーの第 2 変分は, Proposition 2.2 により,

$$\mathcal{I}(p) = - \int_C p J[p] ds + [p \cdot B[p]]_0^L, \quad p := \langle \delta C, n \rangle$$

と表される. $|\beta| = 1$ のときは, 境界条件 (2) により, $p(0) = p(L) = 0$ が成立することを注意しておく. $C''' = \kappa n$ より,

$$x'' = \kappa z', \quad z'' = -\kappa x'$$

であった. このことと境界条件 (4), (5) により,

$$J[x'] = \gamma, \quad B[x']|_{\partial C} = 0, \tag{12}$$

$$J[z'] = 0, \quad B[z']|_{\partial C} = \begin{cases} -\kappa/\sqrt{1-\beta^2}, & |\beta| < 1, \\ \pm 1, & |\beta| = 1 \end{cases}$$

が成り立つことがわかる.

J は Sturm-Liouville 型作用素であるから, 固有値問題

$$J[p] = -\lambda p \quad \text{in } [0, L], \quad B[p] = 0 \quad \text{on } \partial[0, L] \quad (13)$$

の固有値は可算無限個で, すべて実数であり, 重複度は 1 である. そこで, これらの固有値を小さいものから順に $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ と表す. λ_1 に属する固有関数は定符号である(0 にはならない)ことを注意しておく. λ_i に属する固有空間を E_i で表し, $L^2([0, L])$ における E_i の直交補空間を E_i^\perp で表す. λ_i に属する固有関数 φ_i を $\{\varphi_i\}_i$ が $L^2([0, L])$ の正規直交基底を成すように選ぶことができ,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= I(\varphi_1) = \min\{I(p) \mid p \in C^\infty([0, L]), \int_C p^2 ds = 1\}, \\ \lambda_i &= I(\varphi_i) = \min\{I(p) \mid p \in C^\infty([0, L]), \int_C p^2 ds = 1, \\ &\quad \int_C p\varphi_j ds = 0 \quad (j = 1, \dots, i-1)\} \end{aligned}$$

が成立する(cf. [2, 第6章 §1]). このことにより, 次の Lemma 4.1 が, [3] の Theorem 1.3 (与えられた境界を持つ平均曲率一定曲面に対する対応する結果) の証明とほぼ同様にして示される.

Lemma 4.1 (I) $\lambda_1 \geq 0$ ならば, C は強安定である.

(II) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ ならば, $J[u] = 1, B[u]|_{\partial C} = 0$ を満たす関数 $u \in C^\infty([0, L])$ が一意的に存在して, 次の (II-1), (II-2) が成り立つ.

(II-1) $\int_C u ds \geq 0$ ならば, C は安定である.

(II-2) $\int_C u ds < 0$ ならば, C は不安定である.

(III) $\lambda_1 < 0 = \lambda_2$ ならば, 次の (III-A), (III-B) が成り立つ.

(III-A) $\int_C v ds \neq 0$ なる $v \in E_2$ が存在するならば, C は不安定である.

(III-B) 任意の $v \in E_2$ に対して $\int_C v ds = 0$ が成り立つと仮定する. このとき, 関数 $u \in E_2^\perp \cap C^\infty([0, L])$ であって, $J[u] = 1, B[u]|_{\partial C} = 0$ を満たすものが一意的に存在する. さらに, 次の (III-B1), (III-B2) が成立する.

(III-B1) $\int_C u ds \geq 0$ ならば, C は安定である.

(III-B2) $\int_C u ds < 0$ ならば, C は不安定である.

(IV) $\lambda_2 < 0$ ならば, C は不安定である.

Theorem 4.1 $\gamma = 0$ ならば, C は円または水平な線分であり, $\lambda_1 = 0$, したがって, C は強安定である.

証明 C が円または水平な線分であることは明らかである. よって, (5) により, C は x 軸の区間上のグラフであって, C の内部では $x' > 0$ が成立する. したがって, (12) により, x' は λ_1 に属する固有関数であり, $\lambda_1 = 0$ である. \square

Proposition 4.1 $\lambda_1 < 0 \leq \lambda_2$ であって C が安定ならば, $\gamma > 0$ である. 逆に, $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ であって $\gamma > 0$ ならば, C は安定である.

証明 もしも $\gamma = 0$ ならば, Theorem 4.1 により, $\lambda_1 = 0$ である.

$\gamma \neq 0$ と仮定する. $u := x'/\gamma$ とおけば, $J[u] = 1$, $B[u]|_{\partial C} = 0$ が成り立つ. また,

$$\int_C u ds = \gamma^{-1} \int_C x' ds = \gamma^{-1}(x(L) - x(0)).$$

これと Lemma 4.1 により, 主張が示される. □

Theorem 4.2 C は水平な線分であるとする. このとき,

(i) $\gamma \leq 0$ ならば, C は強安定である.

(ii) $\gamma > 0$ ならば, 次が成立する.

$$C \text{ が安定.} \iff \lambda_2 \geq 0. \iff L \leq \pi/\sqrt{\gamma}.$$

証明 $\gamma = 0$ の場合については Theorem 4.1 ですで見ただから, $\gamma \neq 0$ と仮定する. $0 \equiv \kappa = \gamma z + \kappa_0$ より, $z \equiv -\kappa_0/\gamma = \text{定数}$ が成り立つ. このとき, 総エネルギーの第 2 変分は

$$\mathcal{I}(p) = \int_0^L (p'(x))^2 - \gamma(p(x))^2 dx$$

で与えられるから, $\gamma < 0$ ならば C は強安定である.

次に, $\gamma > 0$ と仮定する. 固有値問題

$$J[p] = -\lambda p \quad \text{in } [0, L], \quad B[p] = p' = 0 \quad \text{on } \partial[0, L]$$

の第 n 固有値 λ_n は $\{(n-1)\pi/L\}^2 - \gamma$ であり, 対応する固有関数は $c \cos((n-1)\pi s/L)$ である. したがって, $J[1] = \gamma$, $B[1]|_{\partial[0, L]} = 0$ に注意すれば, Lemma 4.1 により, C が安定であるのは $\lambda_2 \geq 0$ であるとき, かつそのときに限ることがわかる. さらに,

$$\lambda_2 \geq 0 \iff L \leq \pi/\sqrt{\gamma}$$

が成り立つ. □

Theorem 4.3 C は線分ではないとし, $\gamma < 0$ と仮定する. このとき,

(i) κ は C 上定符号である.

(ii) C は, x 軸の区間上のグラフである.

(iii) C は, 強安定である.

証明 第 3 節と同様に, $\cos \sigma := x'$, $\sin \sigma = z'$ とおく. (4), (5), 及び C が自己交差を持たないということから,

$$-\pi/2 \leq \sigma(0) \leq \pi/2, \quad -\pi/2 \leq \sigma(L) \leq \pi/2, \quad \sigma(L) = -\sigma(0) \quad (14)$$

と仮定してよい. さらに, (5) により, z はその最大値または最小値を区間 $(0, L)$ の内点でとる. z が $s_2 \in (0, L)$ で最大値をとると仮定しよう. すると, $n(s_2) = (0, -1)$, $\kappa(s_2) > 0$ が成立する. したがって, もしも $\gamma < 0$ ならば, $[0, L]$ 上で $\kappa = \gamma z + \kappa_0 > 0$ となる. $\sigma' = -\kappa$ であるから, σ は $[0, L]$ 上狭義単調減少である. 故に, (14) から,

$$-\pi/2 \leq \sigma(L) < \sigma(s) < \sigma(0) \leq \pi/2, \quad \forall s \in (0, L)$$

が成り立つ。したがって、

$$x'(s) = \cos \sigma(s) > 0, \quad \forall s \in (0, L)$$

となり、 C が x 軸の区間上のグラフであることがわかる。 z が $s_2 \in (0, L)$ で最小値をとると仮定しても同様の議論が成立し、したがって、(i) と (ii) が示せた。

次に (iii) を証明する。まず初めに、 $|\beta| < 1$ の場合を考える。 C が $z = z(x)$ によって与えられるとき、 $ds = \sqrt{1 + (dz/dx)^2} dx$ より

$$x'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (dz/dx)^2}} > 0$$

が成り立つ。

したがって、 C 上の任意の可微分関数 p は $p = \zeta x'$ と表せる。簡単な計算により、

$$\begin{aligned} I(p) &= - \int_C \zeta x' J[\zeta x'] ds + [\zeta x' B[\zeta x']]_0^L \\ &= - \int_C \zeta^2 x' J[x'] ds + \int_C (x')^2 (\zeta')^2 ds + [\zeta^2 x' B[x']]_0^L \\ &= - \int_C \zeta^2 (\gamma x') ds + \int_C (x')^2 (\zeta')^2 ds \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となることがわかる。よって、 C は強安定である。 $|\beta| = 1$ の場合も、ほぼ同様に証明できる。

□

以上で、 $\gamma \leq 0$ の場合については、解 C の安定性を決定することができた。そこで、今後は $\gamma > 0$ と仮定する。 C が線分である場合については、すでに Theorem 4.2 において安定性を決定したので、 C は線分ではないと仮定する。

Lemma 4.2 C は線分ではないと仮定する。このとき、次の Case(I) ~ Case(V) の5つの場合に分けられる。

Case(I) C は変曲点 ($\kappa = 0$ なる点) を持たない。

Case(II) C は1つだけ変曲点を持つ。

Case(III) C の両端点の変曲点であり、内部には変曲点はない。

Case(IV) C の内部には、ちょうど2つの変曲点と、唯1つの z' の零点がある。

Case(V) C の内部には、 z' の零点が少なくとも3つある。

証明 $\kappa' = \gamma z'$ であるから、2つの変曲点の間には z' の零点が少なくとも1つは存在する。さらに、 z' の零点の個数は奇数であることが次のようにしてわかる。まず、 $z''(s) = z'(s) = 0$ とは決してならない。実際、もしもこうなったならば、 $z'' = -\kappa x'$ より $\kappa(s) = 0$ とならなければならない。よって、 C の対称性 (Lemma 3.2 (v), (vi)) により、 C は線分でなければならない。これは仮定に反する。したがって、 $z'(0) = -z'(L)$ から、 z' の零点の個数は奇数である。これらのこと及び Lemma 2.1 により主張が成立することが容易にわかる。□

解 C の安定性が次のように決定される。

Theorem 4.4 $\gamma > 0$ とし, C は線分ではないと仮定する. このとき, Lemma 4.2 の各場合について, 解 C の安定性が次のように決定される.

Case(I) $\lambda_2 > 0$ であり, C は安定である.

Case(II) C は不安定である.

Case(III) $\lambda_2 = 0$ であり, C は安定である.

Case(IV) C は不安定である.

Case(V) C は不安定である.

証明 $|\beta| < 1$ と仮定して証明する. $|\beta| = 1$ の場合もほぼ同様にして証明される. Theorem 4.3 の証明と同様に, $\cos \sigma := x'$, $\sin \sigma = z'$ とおく.

Case(I): C 上 $\sigma' = -\kappa \neq 0$ だから, $\sigma(s)$ は単調関数である. C が自己交差を持たないことから, Theorem 4.3 の証明と同様に,

$$-\pi/2 < \sigma(s) < \pi/2, \quad \forall s \in (0, L)$$

と仮定しても一般性を失わない. したがって, z' は $(0, L)$ において唯一つの零点 s_1 を持つ. 故に, z は $s = s_1$ において, 最大値または最小値をとる. また, $n(s_1) = (0, -1)$, $\sigma(s_1) = 0$ である. もしも $z(s_1)$ が z の最大値ならば, $\kappa(s_1) > 0$ であり, したがって, $z'(0) > 0$ である. 故に, $z'(0)\kappa(0) > 0$. $z(s_1)$ が z の最小値である場合も同様の議論を行うことにより, いずれの場合にも,

$$z'(0)\kappa(0) > 0, \quad z'(L)\kappa(L) < 0 \quad (15)$$

が成り立つことがわかる.

さて今, $\hat{s} \in (0, L)$ に対し, 固有値問題

$$J[p] = -\lambda p \text{ in } [0, \hat{s}], \quad B[p]|_{s=0} = 0, \quad p(\hat{s}) = 0$$

を考え, その最小固有値を $\lambda_1^0([0, \hat{s}])$ で表す. また, 固有値問題

$$J[p] = -\lambda p \text{ in } [\hat{s}, L], \quad p(\hat{s}) = 0, \quad B[p]|_{s=L} = 0$$

の最小固有値を $\lambda_1^L([\hat{s}, L])$ で表す.

min-max 原理により,

$$\begin{aligned} \lambda_1^0([0, \hat{s}]) &= \min \left\{ - \int_C p J[p] ds / \int_C p^2 ds \mid p \in C^\infty([0, \hat{s}]), B[p]|_{s=0} = 0, p(\hat{s}) = 0 \right\} \\ &= \min \left\{ - \int_C p J[p] ds / \int_C p^2 ds \mid p \in C^0([0, \hat{s}]), p \text{ は } [0, \hat{s}] \text{ で区分的に } C^2 \text{ 級}, \right. \\ &\quad \left. B[p]|_{s=0} = 0, p(\hat{s}) = 0 \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

が成立する. (16) 及び λ_1^L に対する同様の結果から, λ_1^0 及び λ_1^L の単調性がわかる. すなわち,

Claim 1 もしも $0 < \sigma_0 < \sigma_1 < L$ ならば,

$$\begin{aligned} \lambda_1^0([0, \sigma_0]) &> \lambda_1^0([0, \sigma_1]), \\ \lambda_1^L([\sigma_0, L]) &< \lambda_1^L([\sigma_1, L]) \end{aligned} \quad (17)$$

が成り立つ.

一方, s_1 に対しては, 次が成立する.

Claim 2

$$\lambda_1^0([0, s_1]) > 0, \quad (18)$$

$$\lambda_1^L([s_1, L]) > 0. \quad (19)$$

Claim 2 の証明 $p: [0, s_1] \rightarrow \mathbf{R}$ は

$$B[p]|_{s=0} = 0, \quad p(s_1) = 0$$

を満たす非定値 C^∞ 級関数とする. Lemma 4.2 の証明と同様にして $z''(s_1) \neq 0$ であるから, $[0, s_1]$ 上で関数 $\varphi = p/z'$ が定義される. すなわち, $p = \varphi z'$ と書いて,

$$\begin{aligned} - \int_0^{s_1} pJ[p]ds &= \int_0^{s_1} (z')^2(\varphi')^2ds - [(z')^2\varphi\varphi']_0^{s_1} \\ &= \int_0^{s_1} (z')^2(\varphi')^2ds + (z')^2\varphi\varphi'|_{s=0} \end{aligned}$$

となる.

$$0 = pB[p]|_{s=0} = (z')^2\varphi\varphi'|_{s=0} + \varphi^2 z' B[z']|_{s=0}$$

であるから, (15) を用いて,

$$\begin{aligned} - \int_0^{s_1} pJ[p]ds &= \int_0^{s_1} (z')^2(\varphi')^2ds - \varphi^2 z' B[z']|_{s=0} \\ &= \int_0^{s_1} (z')^2(\varphi')^2ds + \varphi^2 z' \kappa / \sqrt{1 - \beta^2}|_{s=0} \\ &> 0 \end{aligned}$$

となり, (18) が成立する. 同様の議論により, (19) も示される. \square

$\lambda_2 \leq 0$ と仮定して矛盾を導こう. e を λ_2 に属する固有関数とすると,

$$J[e] = -\lambda_2 e, \quad B[e]|_{\partial C} = 0$$

であり, $e(s_0) = 0$ を満たす $s_0 \in (0, L)$ が唯一つ存在する. e は $(0, s_0)$ で 0 にならないから, $e|_{[0, s_0]}$ は $\lambda_1^0([0, s_0])$ に属する固有関数である. したがって,

$$\lambda_1^0([0, s_0]) = \lambda_2 \leq 0 \quad (20)$$

が成立する. 同様にして,

$$\lambda_1^L([s_0, L]) = \lambda_2 \leq 0 \quad (21)$$

が成り立つ.

$s_0 < s_1$ と仮定すると, (18), (20), (17) により矛盾が導かれる. 同様に, $s_0 > s_1$ も起こり得ない. したがって, $s_0 = s_1$ である. このとき, (18) ~ (21) により矛盾が導かれる. 以上により, $\lambda_2 > 0$ でなければならないことがわかる.

Case(II): Lemma 4.2 の証明の中で見たように, $z'(s) = z''(s) = 0$ とは決してならない. したがって, $\kappa = \gamma z + \kappa_0$ 及び $z'' = -\kappa z'$ により, κ は変曲点の近傍で狭義単調である. 故に, Lemma 2.1 により,

$$\kappa(L) + \kappa(0) = 0, \quad \kappa(0) \neq 0 \quad (22)$$

が成立する。したがって、 κ は、ある $s_2 \in (0, L)$ で 0 となる。

Claim 3

$$\int_C z' ds \neq 0, \quad \int_C z' \kappa^3 ds = 0. \quad (23)$$

Claim 3 の証明 Lemma 3.2 (vi) と $z'(L) = -z'(0)$ により、次の Case(II-1) ~ (II-3) のいずれかが成立する。

Case(II-1) $C([0, s_2])$ と $C([s_2, L])$ は点 $C(s_2)$ に関して互いに対称である。

Case(II-2) ある $s_3 \in (0, s_2)$ が存在して、 $C([s_3, s_2])$ と $C([s_2, L])$ は点 $C(s_2)$ に関して互いに対称である。

Case(II-3) ある $s_3 \in (s_2, L)$ が存在して、 $C([0, s_2])$ と $C([s_2, s_3])$ は点 $C(s_2)$ に関して互いに対称である。

まず初めに

$$z'(s) \neq 0, \quad \forall s \in (0, L) \quad (24)$$

と仮定する。このときは Case(II-1) でなければならない。実際、もしも Case(II-2) ならば、 $\kappa(0) = \kappa(s_3)$ となるから、 $\kappa = \gamma z + \kappa_0$ より $z(0) = z(s_3)$ 。よって $z'(s) = 0$ となる $s \in (0, s_3)$ が存在することになり、仮定 (24) に反する。Case(II-3) についても同様である。したがって Case(II-1) であり、(23) が成立する。

次に、 $z'(s) = 0$ となる $s \in (0, L)$ が存在する場合について考える。Lemma 4.2 の証明中に見たように、 $(0, L)$ における z' の零点の個数は奇数である。そのうちで大きさの順番が真中のものを s_1 とする。(22) より $\kappa(0) \neq \kappa(L)$ だから、 $z(0) \neq z(L)$ である。よって、Lemma 3.2 (v) により、次の (A), (B) のいずれかが成立する。

(A) ある $s_4 \in (s_1, L)$ が存在して、 $C([0, s_1])$ と $C([s_1, s_4])$ は直線 $\{x = x(s_1)\}$ に関して対称である。

(B) ある $s_4 \in (0, s_1)$ が存在して、 $C([s_4, s_1])$ と $C([s_1, L])$ は直線 $\{x = x(s_1)\}$ に関して対称である。

(A) を仮定しよう。すると、 $\kappa(s_4) = -\kappa(L)$ である。また、 $\kappa' = \gamma z'$ は (s_4, L) で 0 にならない。したがって、Case(II-2) が成立していて $s_4 = s_2$ である。よって、

$$\begin{aligned} \int_C z' ds &= \int_{s_4}^L z' ds \neq 0, \\ \int_C z' \kappa^3 ds &= \int_0^{s_4} z' \kappa^3 ds + \int_{s_4}^L z' \kappa^3 ds = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

(B) の場合も同様にして (23) が成立することがわかる。 □

さて、 $\kappa'' = \gamma z'' = -\gamma \kappa x'$ に注意して計算すれば、

$$J[z'] = 0, \quad J[\kappa] = \kappa^3, \quad (25)$$

$$B[z'] = -\kappa/x', \quad B[\kappa] = z'(\gamma - \kappa^2/x') \quad (26)$$

となることがわかる。

(23) により, 実数 a を

$$a = -\left(\int_C \kappa ds\right)\left(\int_C z' ds\right)^{-1}$$

と定義して, $u = az' + \kappa$ とおく. すると,

$$\int_C u ds = 0 \quad (27)$$

である.

$I(u)$ を計算しよう. (25) により, $-uJ[u] = -az'\kappa^3 - \kappa^4$ が成り立つから, (23) から

$$-\int_C uJ[u] ds = -\int_C \kappa^4 ds < 0 \quad (28)$$

がわかる. 一方,

$$uB[u] = (az' + \kappa)(aB[z'] + B[\kappa])$$

が成立する. (4), (22), (26) から

$$(az' + \kappa)|_{s=0} = -(az' + \kappa)|_{s=L},$$

$$B[z']|_{s=0} = -B[z']|_{s=L}, \quad B[\kappa]|_{s=0} = -B[\kappa]|_{s=L}$$

となることがわかるから,

$$[uB[u]]_0^L = 0 \quad (29)$$

が成立する. (28) と (29) により,

$$I[u] = -\int_C \kappa^4 ds < 0$$

となる. これと (27) から C は不安定であることがわかる.

Case (III): $\kappa' = \gamma z'$ より, $(0, L)$ に z' の零点が少なくとも 1 つは存在する. C の対称性 (Lemma 3.2 (v)) と Case (III) の仮定から, z' が唯一つの零点 $s_1 \in (0, L)$ を持ち, C が直線 $\{x = x(s_1)\}$ に関して対称であることがわかる.

$$J[z'] = 0, \quad B[z']|_{\partial C} = 0$$

が成り立つことと z' が C の唯一つの内点で 0 となることから, 0 は固有値問題 (13) の第 2 固有値である.

$$J[x'] = \gamma, \quad B[x']|_{\partial C} = 0, \quad \int_C (x'/\gamma) ds > 0$$

であり, 各固有値の重複度は 1, さらに, C の対称性から $\int_0^L z' ds = 0$, $\int_0^L x' z' ds = 0$ が成り立つ. したがって, Lemma 4.1 により, C は安定である.

Case (IV): z' の唯一つの零点を s_1 とする. $z'' = -\kappa x'$, $x'(0) > 0$, $x'(L) > 0$ と z' と z'' が同時には 0 にならないことから, C は直線 $\{x = x(s_1)\}$ に関して対称であり,

$$z'(0)\kappa(0) < 0, \quad z'(L)\kappa(L) > 0$$

が成り立つ. したがって,

$$\mathcal{I}(z') = [z'B[z']]_0^L = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(z'(L)\kappa(L) - z'(0)\kappa(0)) < 0, \quad \int_C z' ds = 0$$

となり, C は不安定である.

Case (V): 曲線 $C_0 \subset C$ を両端点及び唯一つの内点で $z' = 0$ となるように取る. このとき, z' は固有値問題

$$J[p] = -\lambda p \text{ in } C_0, \quad p|_{\partial C_0} = 0$$

の第 2 固有値 0 に属する固有関数である. 故に, 固有値の領域に対する単調性により, C は, 固定境界値問題に対して第 2 固有値が負となり, 不安定である. したがって, もちろん我々の自由境界値問題に対しても不安定である. \square

References

- [1] J. L. Barbosa and M. do Carmo, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, *Math. Z.* **185** (1984), 339–353.
- [2] R. Courant and D. Hilbert, 数理物理学の方法 第 2 巻, 斎藤利弥 監訳, 商工出版社, 1959.
- [3] M. Koiso, Deformation and stability of surfaces with constant mean curvature, *Tohoku Math. J. (2)* **54** (2002), 145–159.
- [4] M. Koiso and B. Palmer, A partially free boundary value problem for soap films with gravity, *in preparation*.
- [5] D. F. Lawden, Elliptic Functions and Applications, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [6] J. C. C. Nitsche, Stationary partitioning of convex bodies, *Arch. Rational Mech. Anal.* **89** (1985), 1–19.
- [7] A. Ros and R. Souam, On stability of capillary surfaces in a ball, *Pacific J. Math.* **178** (1997), 345–361.
- [8] A. Ros and E. Vergasta, Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary, *Geom. Dedicata* **56** (1995), 19–33.