数理解析研究所講究録 1294 巻 2002 年 44-61

AFFINE QUOTIENTS AND THETA LIFTING OF HIGHEST WEIGHT MODULES

京都大学 総合人間学部　西山 享 (Kyo NISHIYAMA)

FACULTY OF IHS, KYOTO UNIVERSITY
SAKYO, KYOTO 606-8501, JAPAN

CONTENTS

1. INTRODUCTION

階数が N のシンプレクティック群 $\mathbb{G} = Sp(2N, \mathbb{R})$ を考え、その中に reductive dual pair (G, G') をとる。つまり reductive な部分群 G の $\mathbb{G}$ における交換子全体が G' であり、逆もまた成り立っているとする。reductive dual pair の分類は Howe によってなされており ([8, §4])、数学のさまざまな面に多くの応用例がある。

さて、$Mp(2N, \mathbb{R})$ を $Sp(2N, \mathbb{R})$ の非自明な二重被覆群とし、$\widetilde{G}, \widetilde{G'}$ をそれぞれ対応する部分群の被覆写像による全逆像とする。$Mp(2N, \mathbb{R})$ はメタプレクティック群と呼ばれ、調和振動子表現 (あるいは Weil 表現、メタプレクティック表現等々) と呼ばれる極小な無限次元ユニタリ表現を持つ。それを Ω で表そう。このとき、$\widetilde{G}$ の admissible な既約表現 π と $\widetilde{G'}$ の admissible な既約表現 π' に対して、テンソル積 $\pi \otimes \pi'$ が Ω の商表現になっているとき、π と π' は互いに theta 対応していると言う。この対応は、調和振動子表現に現れるような $\widetilde{G}, \widetilde{G'}$ の表現間の一対一対応であることが知られている ([10] 参照)。

この対応を、π' が調和振動子表現の商表現でないときには $\theta(\pi') = 0$ とおくことにより、すべての admissible 表現に拡張し、$\pi = \theta(\pi')$ または $\pi' = \theta(\pi)$ と表そう[1]。群を明示

RIMS 研究集会「非可換代数系の表現と調和解析」(2002/7/23 – 7/26) 講究録原稿.

[1]少しくどいが、$\theta(\pi) = 0$ は、π が Ω の商表現としては得られないことを意味する。

したいときには $\pi = \theta_{G' \to G}(\pi')$ などと書く。このとき、π は π' の theta lift であるとも言う。

theta 対応を考える上で基本的な問題は、次のように述べることができる。

Problem 1.1. theta 対応によって、表現の不変量はどのように変化するだろうか? また、π' の不変量を用いて $\pi = \theta(\pi')$ の不変量を表す明示的な公式を与えよ。

この問題に対しては、網羅的ではないにせよ既にさまざまな形での解答が与えられている。いくつかの例をあげておくと、

無限小指標: 表現の無限小指標 (infinitesimal character) は展開環の中心の同時固有値であるが、この対応が具体的に分かっている。(Przebinda [28])

大域指標: 表現の大域指標は群上の不変固有超函数として与えられるが、これらの間の対応が積分変換の形で与えられている。(Przebinda [29])

ユニタリ性: (G, G') が stable range にあり、G' の方が小さいとき、π' がユニタリならば $\pi = \theta(\pi')$ もユニタリである。(Li [16]) この性質を用いて、比較的小さな表現のユニタリ性が証明されたりしている。

原始イデアル: 表現の原始イデアル (あるいはそれに対応する巾零軌道) の対応が分かっている。(Daszkiewicz-Kraśkiewicz-Przebinda [3])

Langlands パラメータ: いくつかの具体的な dual pair に対して、表現の Langlands パラメータの間の対応が分かっている。(Adams-Barbasch [1], Paul [26, 27])

reductive dual pair (G, G') が type I かつ既約であるとしよう。type I、既約の定義はここでは与えないが、このような組は分類されており、4 種類しかない ([8, Table 4.1] 参照)。我々は G'/K' が Hermite 対称空間であることを仮定する。このような組を以下の表 1 にあげておく。したがって、要するにこの 3 組のうちのいずれかを考えるということである。

TABLE 1. type I かつ既約な reductive dual pair

(G, G')	N	stable range の条件
$(O(p,q), Sp(2n, \mathbb{R}))$	$(p+q)n$	$2n < \min(p,q)$
$(U(p,q), U(m,n)))$	$(p+q)(m+n)$	$m+n \leq \min(p,q)$
$(Sp(p,q), O^*(2n))$	$(2p+2q)n$	$n \leq \min(p,q)+1$

さらに、この報告では dual pair が stable range にあると仮定する。定理などには明示的に stable range の条件を仮定してはいるが、途中の議論も stable range でない場合には通用しないことが多いので注意されたい。stable range の条件も具体的に表 1 に与えておいた。

以上の仮定の下に、次の結果を得たのでここに報告する ([23], [22])。この結果は、Chen-bo Zhu (朱程波) 氏 (シンガポール国立大学) との一連の共同研究の成果である。

Theorem 1.2 (N.-Zhu). type I かつ既約な reductive dual pair (G, G') を考える。(G, G') は stable range にあり、G' のほうが小さいとしよう。G' のユニタリ最高ウェイト表現 π' であって、$\theta(\pi') \neq 0$ となるものをとる[2]。

(1) $\pi = \theta(\pi')$ の K タイプへの分解公式を π' の K タイプの重複度公式を用いて具体的に与えることができる。

(2) π' の随伴サイクルを $\mathcal{AC}(\pi') = m[\overline{\mathbb{O}'}]$ とおくとき、$\mathcal{AC}(\pi) = \mathcal{AC}(\theta(\pi')) = m[\overline{\theta(\mathbb{O}')}]$ が成り立つ。ここで $\theta(\mathbb{O}')$ は巾零軌道 $\mathbb{O}'$ の theta lift である (§3 参照)。また、重複度 m は具体的に与えることができる。

この結果は、K タイプの重複度公式および随伴サイクルという表現の不変量が theta 対応でどのように変化するかを (ユニタリ最高ウェイト表現という極めて特殊な場合に) 明らかにするものである。

さて、上の定理は 3 つの組に共通に、もう少し具体的に述べることができるが、記号の準備の問題や証明における個別の議論があり、また、一般的に述べることでかえって分かりにくくなってしまうという問題もある。そこで、この報告では

$$(G, G') = (O(p,q), Sp(2n, \mathbb{R})) \qquad (2n < p, q)$$

の場合に限って話を進めることにしよう。

2. アフィン商写像

まず最初に、代数群の作用によるアフィン商写像の初歩的な性質をおさらいする。不変式論に慣れた読者はこの章はとばして直接 §3 に進まれたい。この章の設定と記号は、次章以降とは独立であってこの章のみで有効としておく。

reductive な複素線型代数群 G が、アフィン代数多様体 X に代数的に作用しているとする。このとき、X の正則関数環 $\mathbb{C}[X]$ は自然に G 加群となるが、

$$X/\!/G = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[X]^G \tag{2.1}$$

とおき、これを G の作用による X のアフィン商多様体という。この定義ではいささか抽象的であるが、次のようにして商多様体 $X/\!/G$ をアフィン空間 $\mathbb{A}^l = \mathbb{C}^l$ に閉部分多様

[2]この場合 G' は Hermite 対称型なので、ユニタリ最高ウェイト表現が存在する。例えば正則離散系列表現はユニタリ最高ウェイト表現である。

体として埋め込むことができる。G 不変式の全体 $A = \mathbb{C}[X]^G$ は有限生成なので、その生成元を $f_1, \ldots, f_l \in A$ とする。写像

$$\psi : X \ni x \longmapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_l(x)) \in \mathbb{C}^l$$

を考えると、明らかに ψ は G 軌道上で一定値を取るから、X 上の G 軌道に対して $\mathbb{C}^l$ の点が一つ決まる。ψ の像は閉部分多様体で、これが $\operatorname{Spec} A$ と同型になる。つまり、$X//G$ は $(f_1, \ldots, f_l)$ を座標に持ち、生成元 $f_1, \ldots, f_l \in A$ の間の関係式を定義方程式とするアフィン代数多様体である。

$A = \mathbb{C}[X]^G \subset \mathbb{C}[X]$ だから、部分代数としての包含写像によって、代数多様体の写像

$$\zeta : X \longrightarrow X//G$$

が引き起こされる。この写像をアフィン商写像と呼ぶ。$X//G$ を上のように $\mathbb{C}^l$ に埋め込んでおくと、ψ がアフィン商写像そのものである。

Theorem 2.1. $\zeta : X \longrightarrow X//G$ をアフィン商写像とすると、

(1) $\forall y \in X//G$ に対して、そのファイバー $\zeta^{-1}(y)$ はただ一つの閉 G 軌道を含む。つまり、$X//G$ の点は X の閉 G 軌道と一対一に対応する。

(2) $Z \subset X$ を G 不変な閉部分多様体とすると、その像 $\zeta(Z) \subset X//G$ もまた閉部分多様体であって、$Z//G$ と同型である。

この定理については、例えば [33, §5.1], [30] 等を参照していただくこととして、ここではよく知られた二つの例をあげておこう。

Example 2.2. G は半単純として、G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$、Cartan 部分代数を $\mathfrak{h}$ とする。また、$W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を Weyl 群としよう。このとき、G の $\mathfrak{g}$ への随伴作用による商は

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}//G &= \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W \qquad (\because \text{Chevalley の制限定理}) \\ &= \mathfrak{h}/W \simeq \mathbb{C}^l \qquad (l = \dim \mathfrak{h}) \end{aligned}$$

である。いま $t \in \mathfrak{h}/W$ を取ると、$\zeta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}/W = \mathfrak{g}//G$ のファイバーは、

$$\zeta^{-1}(t) = \{x \in \mathfrak{g} \mid x \text{ の半単純部分が } t \text{ と } G \text{ 共役}\}$$

であって、半単純軌道 $\operatorname{Ad} G \cdot t$ がファイバーに含まれる唯一の閉軌道である。したがって、この場合 $\mathfrak{g}//G$ は (閉随伴軌道) = (半単純軌道) を分類していることが分かる。

また、$t \in \mathfrak{h}$ を正則な半単純元とすると、ファイバー $\zeta^{-1}(t) = \operatorname{Ad} G \cdot t$ はただ一つの軌道からなり、generic なファイバーは閉軌道である[3]。

一方 “最悪の” ファイバーは $\mathcal{N} = \zeta^{-1}(0)$ であって、これは巾零多様体である。

Example 2.3. $X = \operatorname{Sym}_n(\mathbb{C})$ への $G = GL_n(\mathbb{C})$ の通常の作用 $gA\,{}^t g$ ($g \in GL_n, A \in \operatorname{Sym}_n$) を考える。この場合、$X$ は概均質ベクトル空間であって、行列の階数によって軌

[3]同じことだが、$\zeta^{-1}(t)$ が閉軌道になるような t の全体は $\mathfrak{h}/W$ の中で Zariski 開集合である。

道分解される。

$$X = \mathrm{Sym}_n = \coprod_{0 \le k \le n} \mathbb{O}'_k, \qquad \mathbb{O}'_k = \{Y \in \mathrm{Sym}_n \mid \mathrm{rank}\, Y = k\}$$

G 軌道は有限個であって、閉 G 軌道は自明な軌道 $\mathbb{O}'_0 = \{0\}$ だけである。したがってアフィン商多様体はただ一点からなり、$\mathbb{C}[X]^G = \mathbb{C}$ である。一般に概均質ベクトル空間のアフィン商多様体は一点のみになる。

$K = Q(A)$ を $A = \mathbb{C}[X]^G$ の商体としよう。また、G の有限次元既約表現 $\sigma \in \mathrm{Irr}(G)$ に対して

$$M(\sigma) = \left(\sigma^* \otimes \mathbb{C}[X]\right)^G$$

を σ-covariants の空間とする。$M(\sigma)$ は A 加群として有限生成だから、$K \otimes_A M(\sigma)$ は有限次元の K ベクトル空間である。そこで

$$\mathrm{rank}_A\, M(\sigma) = \dim_K K \otimes_A M(\sigma)$$

とおき、これを $M(\sigma)$ の A 上の重複度と呼ぶ。次の定理はあとで必要になる。

Theorem 2.4. アフィン商写像 $\zeta : X \longrightarrow X//G$ の generic なファイバーが閉軌道であるとする。このとき、covariants の空間 $M(\sigma) = \left(\sigma^* \otimes \mathbb{C}[X]\right)^G$ の $A = \mathbb{C}[X]^G$ 上の重複度は

$$\mathrm{rank}_A\, M(\sigma) = \dim(\sigma^*)^{G_x} \qquad (x \in X \text{ は generic な点})$$

で与えられる。ただし、G_x は x における固定部分群、σ^{G_x} は σ の G_x 不変ベクトルの全体である。

Remark 2.5. この場合 $G \cdot x \simeq G/G_x$ は閉軌道でアフィン多様体になるから、G_x は reductive な部分群であることに注意する。

証明. $M(\sigma)$ は有限生成 A 加群なので、$\exists f \in A$ で局所化すれば、A_f 上自由加群になる。その階数が $d = \mathrm{rank}_A\, M(\sigma)$ である。つまり

$$M(\sigma)_f \simeq (A_f)^d$$

そこで、この両辺をさらに generic な点 $y \in X//G, f(y) \neq 0$ で局所化して考えれば、

$$(A/\mathfrak{m}_y) \otimes_A M(\sigma) \simeq (A/\mathfrak{m}_y) \otimes_A A^d = \mathbb{C}^d$$
$$\mathfrak{m}_y = \{h \in A \mid h(y) = 0\} : y \text{ における極大イデアル}$$

がわかる。一方、$\mathfrak{M}_y$ を $\mathfrak{m}_y$ から生成される $\mathbb{C}[X]$ のイデアルとすれば、逆像の定義より $\mathbb{C}[\zeta^{-1}(y)] = \mathbb{C}[X]/\mathfrak{M}_y$ が成り立つ。つまり $\zeta^{-1}(y)$ の定義イデアルは $\mathfrak{M}_y$ である。した

がって、

$$\begin{aligned}(A/\mathfrak{m}_y)\otimes_A M(\sigma) &\simeq (A/\mathfrak{m}_y)\otimes_A \left(\sigma^*\otimes\mathbb{C}[X]\right)^G \\ &\simeq \left(\sigma^*\otimes\mathbb{C}[X]/\mathfrak{M}_y\right)^G \qquad (\because\ (A/\mathfrak{m}_y)\otimes_A\mathbb{C}[X]\simeq\mathbb{C}[X]/\mathfrak{M}_y) \\ &\simeq \left(\sigma^*\otimes\mathbb{C}[\zeta^{-1}(y)]\right)^G \\ &\simeq \left(\sigma^*\otimes\mathbb{C}[G/G_x]\right)^G \qquad (\because \zeta^{-1}(y)\simeq G/G_x\ \text{は一つの軌道}) \\ &\simeq (\sigma^*)^{G_x} \qquad (\because \text{Frobenius の相互律})\end{aligned}$$

となり、$d=\dim(\sigma^*)^{G_x}$ がわかる。 □

応用例を二つほどあげよう。

Example 2.6. G がその Lie 環に随伴表現として働いている場合。このとき、よく知られているように

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]=\mathcal{H}\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G, \qquad \mathcal{H}=(\text{調和多項式全体})$$

が成り立っている。したがって、

$$(\sigma^*\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{g}])^G=(\sigma^*\otimes\mathcal{H})^G\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$$

の重複度は $\dim(\sigma^*\otimes\mathcal{H})^G$ に等しい。一方、例 2.2 より、$\zeta:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}/\!/G$ の generic なファイバーは閉軌道であって、generic な固定部分群は Cartan 部分群 H である。したがって、上の定理より、

$$(\sigma^*\otimes\mathcal{H})^G\simeq(\sigma^*)^H=(\sigma^*\ \text{のゼロウェイト空間})$$

であることが分かる。これより調和多項式の空間の G 加群としての既約分解が得られる (Kostant [14, Theorem 11] 参照)。

$$\mathcal{H}\simeq\sum_{\sigma\in\mathrm{Irr}(G)}^{\oplus}(\sigma^*)^H\otimes\sigma\simeq\mathbb{C}[G/H]$$

$\mathcal{H}$ は G-加群として $\mathbb{C}[\mathcal{N}]$ と同型であることにも注意しておく。ただし、$\mathcal{N}=\zeta^{-1}(0)$ は巾零多様体である。

Example 2.7. $X=M_{k,n}(\mathbb{C})$ を $k\times n$ の複素行列全体とし、$G=O(k,\mathbb{C})$ を左からの行列の掛け算で作用させる。また、$\zeta:M_{k,n}\to\mathrm{Sym}_n$ を $\zeta(A)={}^tAA$ で定義する。

(1) $0\le k\le n$ のとき。このときは、$\mathbb{O}_k=\{Y\in\mathrm{Sym}_n\mid \operatorname{rank}Y=k\}\subset\mathrm{Sym}_n$ とおくと、$X/\!/G\simeq\overline{\mathbb{O}_k}$ であって、$\zeta:X\to\overline{\mathbb{O}_k}$ がアフィン商写像である。$Y\in\mathbb{O}_k$ のファイバーは閉軌道で、$\zeta^{-1}(Y)\simeq O(k,\mathbb{C})$ がわかる。つまり generic な固定部分群は $\{e\}$ である。

この場合に定理を適用すると、

$$\operatorname{rank}_A(\sigma^*\otimes\mathbb{C}[M_{k,n}])^G=\dim\sigma^*, \qquad A=\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_k}]\simeq\mathbb{C}[X]^G$$

(2) $n \le k$ のとき。このときは、$X//G \simeq \mathrm{Sym}_n$ であって、$\zeta : X \to \mathrm{Sym}_n$ がアフィン商写像である。$Y \in \mathbb{O}_n$ のファイバーは閉軌道で、$\zeta^{-1}(Y) \simeq O(k,\mathbb{C})/O(k-n,\mathbb{C})$ は Stiefel 多様体である。つまり generic な固定部分群は $O(k-n,\mathbb{C})$ と同型。

この場合に定理を適用すると、

$$\mathrm{rank}_A\,(\sigma^* \otimes \mathbb{C}[M_{k,n}])^G = \dim(\sigma^*)^{O(k-n,\mathbb{C})}, \qquad A = \mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n] \simeq \mathbb{C}[X]^G$$

となる。

3. 巾零軌道の THETA LIFTING

随伴サイクルの theta 対応を考えるには、まず巾零軌道の theta 対応を定式化する必要がある。複素巾零軌道に対しては Daszkiewicz-Kraśkiewicz-Przebinda [3] の仕事があるが、対称対の巾零軌道の場合には、theta lift に関する結果が最近あいついで報告され ([23, 18, 17], [24, 25], [4, 5])、ホットな話題を提供している。ここでは我々の論文 [23] に沿って、dual pair

$$(G,G') = (O(p,q), Sp(2n,\mathbb{R})) \qquad (2n < p,q)$$

の場合に解説することにする。[18, 17] でも関連した話題が扱われているので、ぜひ参照して欲しい。

G, G' の極大コンパクト部分群 K, K' を次のように取る。

$$G = O(p,q) \supset K = O(p) \times O(q), \qquad G' = Sp(2n,\mathbb{R}) \supset K' = U(n)$$

$\mathfrak{k} = \mathfrak{o}(p,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{o}(q,\mathbb{C})$ および $\mathfrak{k}' = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ をそれぞれ K および K' の Lie 環の複素化とし、対応する (複素化された) Cartan 分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+q,\mathbb{C}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}, \qquad \mathfrak{g}' = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{s}'$$

と書く。具体的には次のような分解を取ればよい。

$$\begin{aligned}\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(p+q,\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ {}^tB & D \end{bmatrix} \mid A \in \mathrm{Alt}_p, D \in \mathrm{Alt}_q, B \in M_{p,q} \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{Alt}_p & \\ & \mathrm{Alt}_q \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} & M_{p,q} \\ {}^tM_{p,q} & \end{bmatrix} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}' = \mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C}) &= \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ C & -{}^tA \end{bmatrix} \mid A \in M_n, B, C \in \mathrm{Sym}_n \right\} \\ &= \begin{bmatrix} M_n & \\ & -{}^tM_n \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} & \mathrm{Sym}_n \\ \mathrm{Sym}_n & \end{bmatrix} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{s}'\end{aligned}$$

ここで $M_{p,q} = M_{p,q}(\mathbb{C})$ は $p \times q$ の複素係数の行列全体、$\mathrm{Sym}_n = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ は対称行列、$\mathrm{Alt}_n = \mathrm{Alt}_n(\mathbb{C})$ は交代行列の全体を表す。

さて、次の三つの空間

$$W = M_{p,n} \oplus M_{q,n}, \qquad \mathfrak{s} = M_{p,q}, \qquad \mathfrak{s}' = \mathrm{Sym}_n \oplus \mathrm{Sym}_n.$$

を考え、$\mathfrak{s}, \mathfrak{s}'$ の W による double fibration を次のように与える。

$$
\begin{tikzcd}
 & W = M_{p,n} \oplus M_{q,n} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
\mathfrak{s} = M_{p,q} & & \operatorname{Sym}_n \oplus \operatorname{Sym}_n = \mathfrak{s}'
\end{tikzcd}
$$

$$
(A, B) \in M_{p,n} \oplus M_{q,n} = W \text{ に対して}
$$
$$
\begin{cases} \varphi(A, B) = A\,{}^tB \in M_{p,q} = \mathfrak{s}, \\ \psi(A, B) = ({}^tAA, {}^tBB) \in \operatorname{Sym}_n \oplus \operatorname{Sym}_n = \mathfrak{s}' \end{cases}
$$

W 上に $(h_1, h_2) \in O(p, \mathbb{C}) \times O(q, \mathbb{C}) = K_{\mathbb{C}}$ および $g \in GL_n(\mathbb{C}) = K'_{\mathbb{C}}$ の作用を次のように定義する。

$$
((h_1, h_2), g) \cdot (A, B) = (h_1 A\,{}^tg, h_2 B g^{-1}), \qquad (A, B) \in M_{p,n} \oplus M_{q,n} = W
$$

$\mathfrak{s}$ および $\mathfrak{s}'$ 上には、通常の随伴作用を考えると、φ は明らかに $K_{\mathbb{C}}$-同変写像、ψ は $K'_{\mathbb{C}}$-同変である。さらに古典的不変式論の結果から、次のことが分かる。

Lemma 3.1. stable range の条件 $2n < p, q$ を仮定する。

(1) $\psi : W \longrightarrow \mathfrak{s}'$ は全射であって、$K_{\mathbb{C}}$ によるアフィン商写像である。つまり $\mathfrak{s}' \simeq W /\!/ K_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。

(2) $\varphi : W \longrightarrow \mathfrak{s}$ の像 $\varphi(W)$ は閉部分多様体であって、$\varphi(W)$ は $K'_{\mathbb{C}}$ によるアフィン商写像である。つまり $\varphi(W) \simeq W /\!/ K'_{\mathbb{C}}$ である。

証明. (1) は $\mathbb{C}[\mathfrak{s}'] \simeq \mathbb{C}[W]^{K_{\mathbb{C}}}$ を意味しているにすぎない。$p > 2n$ のとき、$\mathbb{C}[\operatorname{Sym}_n] \simeq \mathbb{C}[M_{p,n}]^{O(p,\mathbb{C})}$ であることは、古典的不変式論の結果である。q についても同様。

一方、写像 $\varphi : W \to \mathfrak{s}$ が全射環準同型写像 $\varphi^* : \mathbb{C}[\mathfrak{s}] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[W]^{K'_{\mathbb{C}}}$ を引き起こすことは、やはり古典的不変式論によりよく知られている。他の主張はアフィン商多様体の意味を考えれば明らかである。$\varphi(W)$ の定義イデアルは $\operatorname{Ker} \varphi^*$ である。 □

さて、対称対の巾零多様体を次のように定義する。

$$
\mathcal{N}(\mathfrak{s}) = \{ Z \in \mathfrak{s} \mid \operatorname{ad} Z \text{ が巾零写像} \} = \{ Z \in M_{p,q} \mid Z\,{}^tZ \text{ が巾零行列} \}
$$
$$
\mathcal{N}(\mathfrak{s}') = \{ Z' \in \mathfrak{s}' \mid \operatorname{ad} Z' \text{ が巾零写像} \} = \{ (X, Y) \in \operatorname{Sym}_n \oplus \operatorname{Sym}_n \mid XY \text{ が巾零行列} \}
$$

巾零多様体 $\mathcal{N}(\mathfrak{s})$ は $K_{\mathbb{C}}$ の随伴作用で安定であって、有限個の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道に分かれる。それらを巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道と呼ぶ。写像 φ, ψ や上の巾零多様体の特徴づけから、初等的な計算で

$$
\varphi(\psi^{-1}(\mathcal{N}(\mathfrak{s}'))) \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s}), \qquad \psi(\varphi^{-1}(\mathcal{N}(\mathfrak{s}))) \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s}')
$$

となっていることがわかるが、より詳しく次の定理が成り立つ ([23], [24], [5])。

Theorem 3.2 (N.-Zhu, Ohta, Daszkiewicz-Kraśkiewicz-Przebinda). stable range の条件のもとに、巾零 $K'_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\mathbb{O}' \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s}')$ に対して、$\varphi(\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'})) = \overline{\mathbb{O}}$ となるような巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\mathbb{O} \subset \mathcal{N}(\mathfrak{s})$ が存在する。このとき、$\mathbb{O}$ を $\mathbb{O}'$ の theta lift と呼び、$\mathbb{O} = \theta(\mathbb{O}')$ と書く。

定理の証明では、代数幾何的な議論を用いて $\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'})$ が既約であることを示すことが本質的である。ここでは証明を省くので、原論文 [23] を参照していただきたい。

さらに [23] では、閉包 $\overline{\mathbb{O}} = \overline{\theta(\mathbb{O}')}$ の関数環の $K_{\mathbb{C}}$ 加群の構造が、$\overline{\mathbb{O}'}$ の関数環を用いて具体的に記述できることを示した。この部分はのちほど重要になるので、すこし詳しく解説しておく。

まず $\mathcal{H}_{p,q}$ を $\mathbb{C}[W]$ における $K = O(p) \times O(q)$ 調和多項式の空間とする。K 調和多項式とは、K-不変な多項式 $f(x) \in \mathbb{C}[W]^K$ に対して、それを定数係数の微分作用素と見たとき、

$$f(\partial)h(x) = f(0)h(x) \qquad (\forall f(x) \in \mathbb{C}[W]^K)$$

が成り立つような多項式 $h(x)$ のことである。ラプラス作用素で消える、通常の意味の調和多項式は $\mathbb{R}^n$ 上の $SO(n)$ の自然な作用からきまる調和多項式になっている。調和多項式の一般論についてはたとえば [7, Ch. III, §1] を参照されたい。

このとき、stable range の条件のもとに、次の自然な積写像が (ベクトル空間としての) 同型を与える (例えば [11] 参照)。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{p,q} \otimes \mathbb{C}[W]^{K_{\mathbb{C}}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[W] \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ h \otimes f & \longmapsto & h \cdot f \end{array} \tag{3.1}$$

調和多項式の空間には自然に $K_{\mathbb{C}}, K'_{\mathbb{C}}$ が作用していて、$K_{\mathbb{C}} \times K'_{\mathbb{C}}$ 加群になるが、上の同型はもちろん $K_{\mathbb{C}} \times K'_{\mathbb{C}}$ 加群としての同型でもある。また、$\mathcal{H}_{p,q}$ の $K_{\mathbb{C}} \times K'_{\mathbb{C}}$ 加群としての構造は詳しく研究されており、次のように書き下すことができる ([12], [9])。

$$\mathcal{H}_{p,q} \simeq \sum_{\alpha,\beta \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} \left(\sigma_\alpha^{(p)} \boxtimes \sigma_\beta^{(q)}\right) \boxtimes \left(\tau_\alpha^{(n)*} \otimes \tau_\beta^{(n)}\right) \tag{3.2}$$

ここに $\mathcal{P}_n = \{\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{Z}^n \mid \alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \cdots \geq \alpha_1 \geq 0\}$ は、深さが n 以下の分割全体[4]、$\sigma_\alpha^{(p)}$ は最高ウェイトが α の $O(p, \mathbb{C})$ の有限次元既約表現[5]、$\tau_\alpha^{(n)}$ は GL_n の最高ウェイトが α の有限次元既約表現である。

さて、アフィン商写像 ψ によるゼロの全逆像 $\mathfrak{N}_{p,q} = \psi^{-1}(0)$ を一般に零錐 (null cone) と呼ぶが、定数項のない不変式 $\mathbb{C}[W]_+^{K_{\mathbb{C}}}$ から生成されたイデアルが零錐の定義イデアルであるから、上の式 (3.1) より

$$\mathbb{C}[\mathfrak{N}_{p,q}] \simeq \mathcal{H}_{p,q} \qquad (K_{\mathbb{C}} \times K'_{\mathbb{C}} \text{ 加群として}) \tag{3.3}$$

[4] $\mathcal{P}_n$ の元は自然に $GL_k (k \geq n)$ の優整ウェイトとみなすことにする。

[5] $O(p, \mathbb{C})$ は連結でないので若干の注意が必要だが、$SO(p, \mathbb{C})$ の表現を $O(p, \mathbb{C})/SO(p, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}_2$ によって自明に拡大したものである。

であることがわかる。つまり、調和多項式は本質的に零錐上の正則関数たちとして特徴づけられる。ただし、$\mathcal{H}_{p,q}$ は通常の多項式の積では部分環になっていないことに注意しよう。

Theorem 3.3. stable range の条件 $2n < p, q$ を仮定する。$\mathcal{N}(\mathfrak{s}')$ の巾零 $K'_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\mathbb{O}'$ の theta lift を $\mathbb{O} = \theta(\mathbb{O}')$ とすると、次が成り立つ。

(1) $\overline{\mathbb{O}} \simeq \psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'})//K'_{\mathbb{C}} \simeq (W \times_{\mathfrak{s}'} \overline{\mathbb{O}'})//K'_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。

(2) $K_{\mathbb{C}}$ 加群としての同型

$$\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}}] \simeq (\mathcal{H}_{p,q} \otimes \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}'}])^{K'_{\mathbb{C}}} \simeq \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \mathrm{Hom}_{GL_n}\left(\tau_\alpha^{(n)} \otimes \tau_\beta^{(n)*}, \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}'}]\right) \otimes \left(\sigma_\alpha^{(p)} \boxtimes \sigma_\beta^{(q)}\right) \tag{3.4}$$

が成り立つ。

証明. 証明において本質的なのは、scheme 理論における逆像 $W \times_{\mathfrak{s}'} \overline{\mathbb{O}'}$ と集合論的な逆像 $\psi^{-1}(\overline{\mathbb{O}'})$ が一致するという点である。この部分の証明は複雑なので省くが、これさえ認めてしまえば、(3.4) の式は

$$\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}}] \simeq \mathbb{C}[W \times_{\mathfrak{s}'} \overline{\mathbb{O}'}]^{K'_{\mathbb{C}}} \simeq \left(\mathbb{C}[W] \otimes_{\mathbb{C}[\mathfrak{s}']} \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}'}]\right)^{K'_{\mathbb{C}}} \simeq (\mathcal{H}_{p,q} \otimes \mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}'}])^{K'_{\mathbb{C}}}$$

というように、簡単な計算で確かめることができる。ただし、ここで $\mathbb{C}[W] \simeq \mathcal{H}_{p,q} \otimes \mathbb{C}[W]^{K_{\mathbb{C}}}$ と $\mathbb{C}[\mathfrak{s}'] \simeq \mathbb{C}[W]^{K_{\mathbb{C}}}$ を用いた。 □

4. 正則巾零軌道の THETA LIFT と COVARIANT

$\mathfrak{s}'$ は $K'_{\mathbb{C}}$ の表現として $\mathfrak{s}' = \mathfrak{s}'_+ \oplus \mathfrak{s}'_-$ と分解する。このとき $\mathfrak{s}'_- = \mathrm{Sym}_n$ 内の $K'_{\mathbb{C}} = GL_n$ 軌道はすべて巾零軌道になるが、よく知られているように (GL_n, Sym_n) は概均質ベクトル空間であって、行列の階数によって軌道分解される。

$$\mathfrak{s}'_- = \mathrm{Sym}_n = \coprod_{0\le k\le n} \mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k, \qquad \mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k = \{Y \in \mathrm{Sym}_n \mid \mathrm{rank}\, Y = k\}$$

$\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k$ の閉包は正則なユニタリ最高ウェイト表現[6]の随伴多様体になるので、$\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k$ を正則な巾零軌道と呼ぶ。いささか用語の濫用であるが、その theta lift $\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k = \theta(\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k)$ も正則な巾零軌道と呼ぶことがある。

定義より、

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k} &= \{Z \in M_{p,q} \mid Z = A\,{}^tB, A \in \mathfrak{N}_p, \mathrm{rank}\, {}^tBB \le k\} \\ &\simeq \mathfrak{N}_p \times \left(M_{q,n} \times_{\mathrm{Sym}_n} \overline{\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k}\right)//K'_{\mathbb{C}}\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\mathfrak{N}_p = \{A \in M_{p,n} \mid {}^tAA = 0\} \qquad \text{(null cone)}$$

である。実は $0 \le k \le n$ に対して

$$\overline{\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k} = M_{n,k}//O(k,\mathbb{C}), \quad M_{k,n} \ni C \mapsto {}^tCC \in \overline{\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k} \tag{4.2}$$

[6]正則 (holomorphic) な表現は必然的に最高ウェイト表現 (あるいは最低ウェイト表現) である。

なのだが ([19] 参照)、このアフィン商の関係式を $\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}$ にまで持ち上げたい。そのために天下りではあるが、次の多様体を導入しよう。

$$\begin{aligned} X_{p,q+k} &= \mathfrak{N}_{p,q+k}//GL_n \\ &= \{Z \in M_{p,q+k} \mid Z = A\,{}^tB, A \in \mathfrak{N}_p, B \in \mathfrak{N}_{q+k}\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

定義から分かるように、$X_{p,q+k}$ は $Sp(2n,\mathbb{R})/U(n)$ の自明な巾零軌道を $O(p,q+k)/O(p)\times O(q+k)$ へ持ち上げた巾零軌道の閉包である。つまり

$$X_{p,q+k} = \overline{\theta_{Sp(2n,\mathbb{R})\to O(p,q+k)}(\{0\})}$$

が成り立つ。この定義においては、特に $k \le n$ である必要はない。

Theorem 4.1. $0 \le k \le n$ に対して、$\overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}} \simeq X_{p,q+k}//O(k,\mathbb{C})$ が成り立つ。

Remark 4.2. (1) $k \ge n$ に対しては、$X_{p,q+k}//O(k,\mathbb{C}) \simeq \overline{\mathbb{O}_n^{\mathrm{hol}}}$ である。
(2) 定理の証明を追っていけば分かるが、

$$X_{p,q+k} \subset M_{p,q+k}, \qquad \overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}} \subset M_{p,q}$$

とそれぞれ埋め込んで考えたとき、アフィン商写像 $\zeta : X_{p,q+k} \to \overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}}$ は射影 proj : $M_{p,q+k} \to M_{p,q}$ の $X_{p,q+k}$ への制限に一致する。

証明. 証明のキーポイントは次の簡単な補題である。

Lemma 4.3. $\mathfrak{N}_{q+k} \simeq M_{q,n} \times_{\mathrm{Sym}_n} M_{k,n}$

補題の証明. 写像 $M_{q,n} \ni B \mapsto {}^tBB \in \mathrm{Sym}_n$ と $M_{k,n} \ni C \mapsto -{}^tCC \in \mathrm{Sym}_n$ を考えると、$\mathfrak{N}_{q+k}$ が集合論的なファイバー積になっていることは簡単に分かる。関数環を取って環論的なファイバー積になることをチェックすれば、代数幾何的なファイバー積であることも確認できる。 □

定理の証明に戻ろう。上の補題を使えば、次のように計算して求める同型が得られるのである。

$$\begin{aligned} X_{p,q+k}//O(k,\mathbb{C}) &= \mathfrak{N}_{p,q+k}//GL_n \times O(k,\mathbb{C}) = (\mathfrak{N}_p \times \mathfrak{N}_{q+k})//GL_n \times O(k,\mathbb{C}) \\ &= \big(\mathfrak{N}_p \times (M_{q,n} \times_{\mathrm{Sym}_n} (M_{k,n}//O(k,\mathbb{C})))\big)//GL_n \quad (\text{補題による}) \\ &= \big(\mathfrak{N}_p \times (M_{q,n} \times_{\mathrm{Sym}_n} \overline{\mathcal{O}_k^{\mathrm{hol}}})\big)//GL_n \quad ((4.2)\text{ より}) \\ &= \overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}} \qquad ((4.1)\text{ より}) \end{aligned}$$

□

この定理を用いて、$\overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}}$ 上の連接層を次のように構成する。

定理より、$\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}}] \simeq \mathbb{C}[X_{p,q+k}]^{O(k,\mathbb{C})}$ であるが、これを A と書こう。$\overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}}$ は錐なので、A は (多項式の次数による) 自然な次数付けを持つ次数付き代数である。このとき、$O(k,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現 $\sigma_\eta^{(k)}$ に対して、covariant の空間 $M(\eta) = (\sigma_\eta^{(k)*} \otimes \mathbb{C}[X_{p,q+k}])^{O(k,\mathbb{C})}$ は

有限生成 A 加群となる。有限生成 $A=\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}}]$ 加群の圏と $\overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}}$ 上の連接層の圏は自然に同型であるから、$M(\eta)$ に対応する連接層 $\mathcal{M}(\eta)$ が定まる。$M(\eta)$ もやはり自然に次数づけられており、次数付きの A 加群となっていることに注意しよう。

連接層 $\mathcal{M}(\eta)$ には自然に $K_{\mathbb{C}}$ が作用しており、その大域切断の空間は $K_{\mathbb{C}}$ の表現である。大域切断の空間は $\mathcal{M}(\eta)$ の定義より $M(\eta)$ に一致するから、これは要するに「$M(\eta)$ が $K_{\mathbb{C}}$ の表現である」という当たり前のことを言っているに過ぎない。注目すべきことは、この空間 $M(\eta)$ が $O(p,q)$ のユニタリ既約表現の K タイプの空間とほぼ一致している[7]ことである (定理 5.3 参照)。

$K_{\mathbb{C}}$ 加群としての covariants $M(\eta)$ の構造を調べてみると次のようになることが分かる。

$$\begin{aligned}
M(\eta) &= (\sigma_\eta^{(k)*} \otimes \mathbb{C}[X_{p,q+k}])^{O(k,\mathbb{C})} \\
&= (\sigma_\eta^{(k)*} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{N}_p \times (M_{q,n} \times_{\mathrm{Sym}_n} M_{k,n})])^{O(k,\mathbb{C})\times GL_n} \\
&\simeq \left(\mathbb{C}[\mathfrak{N}_p] \otimes \mathbb{C}[M_{q,n}] \otimes_{\mathbb{C}[\mathrm{Sym}_n]} (\sigma_\eta^{(k)*} \otimes \mathbb{C}[M_{k,n}])^{O(k,\mathbb{C})}\right)^{GL_n} \\
&\simeq \left(\mathcal{H}_{p,q} \otimes (\sigma_\eta^{(k)*} \otimes \mathbb{C}[M_{k,n}])^{O(k,\mathbb{C})}\right)^{GL_n}
\end{aligned}$$

$0 \le k \le n$ ならば、

$$L(\eta) = (\sigma_\eta^{(k)*} \otimes \mathbb{C}[M_{k,n}])^{O(k,\mathbb{C})}$$

は $\overline{\mathbb{O}_k'^{\mathrm{hol}}}$ 上の連接層の大域切断であって、これは $Sp(2n,\mathbb{R})$ のユニタリ最高ウェイト表現と K' 加群としては "ほぼ" 一致する[8]。さらに (3.2) を用いて具体的に計算すると、

$$M(\eta) \simeq \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \mathrm{Hom}_{GL_n}\left(\tau_\alpha^{(n)} \otimes \tau_\beta^{(n)*}, L(\eta)\right) \otimes \left(\sigma_\alpha^{(p)} \boxtimes \sigma_\beta^{(q)}\right) \tag{4.4}$$

となることがわかる。つまり、$\overline{\mathbb{O}_k'^{\mathrm{hol}}}$ 上の連接層 $\mathcal{L}(\eta)$ が $\overline{\mathbb{O}_k^{\mathrm{hol}}}$ 上の連接層 $\mathcal{M}(\eta)$ に持ち上げられ、この二つの大域切断上の $K_{\mathbb{C}}$ 加群の構造の間に対応がついたことになる。

5. 表現の THETA LIFT と随伴サイクル

$Sp(2n,\mathbb{R})$ (の二重被覆である、メタプレクティック群) のユニタリ最低ウェイト表現 $\pi'(\eta)$ を考えよう[9]。

まず $O(k,\mathbb{C})$ の有限次元既約表現 $\sigma_\eta^{(k)}$ を取り、$\pi'(\eta)$ を $\sigma_\eta^{(k)}$ からの 柏原-Vergne の意味での theta lift とする ([12] 参照)。この lifting 写像を θ^{KV} で表すと、

$$\pi'(\eta) = \theta^{\mathrm{KV}}_{O(k)\to Sp(2n,R)}(\sigma_\eta^{(k)}) \tag{5.1}$$

---

[7]後述するように、最高ウェイトが少し "ずれる"。

[8]やはり最高ウェイトのずれが起る。

[9]最低ウェイト表現か最高ウェイト表現かは正ルートの取り方によって決まる相対的なものだが、ここでは常識的な用語を尊重して、最低ウェイト表現とした。もちろん最高ウェイト表現についても同様の議論が

である。$Mp(2n,\mathbb{R})$ のすべてのユニタリ最低 (最高) ウェイト表現はこのようにして得られることが分かっている[10]。

η は深さ n 以下の分割 $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_n)\in\mathcal{P}_n$ を与えるが[11]、表現 $\pi'(\eta)$ は極小 K タイプが

$$\tau^{(n)}_{\eta+k/2\mathbb{I}}=\tau^{(n)}_\eta\otimes(\det{}_n)^{k/2},\qquad \mathbb{I}=(1,1,\dots,1)$$

であるような最低ウェイト表現である。ただし、この極小 K タイプは一般には $K'=U(n)$ の表現ではなく、その二重被覆群 $U(n)^\sim$ の表現であることに注意する。

Theorem 5.1. 上の記号の下に、$\pi'(\eta)=\theta^{\mathrm{KV}}_{O(k)\to Sp(2n,R)}(\sigma^{(k)}_\eta)$ であるとする。

(1) $\pi'(\eta)$ の K タイプへの分解は、次のように与えられる。$(r=\min(k,n))$

$$\begin{aligned}\pi'(\eta)\big|_{U(n)^\sim}&\simeq(\det{}_n)^{k/2}\otimes\left(\sigma^{(k)*}_\eta\otimes\mathbb{C}[M_{k,n}]\right)^{O(k,\mathbb{C})}\\&\simeq\sum_{\lambda\in\mathcal{P}_r}^{\oplus}\mathrm{Hom}_{O(k,\mathbb{C})}\left(\sigma^{(k)}_\eta,\tau^{(k)}_\lambda\right)\otimes\left(\tau^{(n)}_\lambda\otimes(\det{}_n)^{k/2}\right)\end{aligned}$$

(2) $\pi'(\eta)$ の随伴サイクルは次のように与えられる。

$$\mathcal{AC}\left(\pi'(\eta)\right)=\begin{cases}\dim\sigma^{(k)}_\eta\cdot[\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k}] & 0\le k\le n\\ \dim\left(\sigma^{(k)}_\eta\right)^{O(k-n,\mathbb{C})}\cdot[\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_n}] & n\le k\end{cases}$$

Remark 5.2. $\pi'(\eta)$ の随伴サイクルの公式は、$0\le k\le n$ の場合は [19], [31] によって独立に与えられた。[31] では $n\le k$ の場合も包括的に取り扱われているが、[19] では $n\le k$ の場合は扱われていない。ここでは [19] の手法を拡張することで、この定理を証明しておく。

証明. (1) は [12] の結果である。

(2) $\pi'(\eta)$ の随伴多様体が $\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k}$ または $\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_n}=\mathfrak{s}'_-$ になることはそれほど難しくない。問題はその重複度であるが、それは随伴多様体を $\overline{\mathbb{O}}$ としたとき、

$$\mathrm{rank}_A\left(\sigma^{(k)*}_\eta\otimes\mathbb{C}[M_{k,n}]\right)^{O(k,\mathbb{C})},\qquad A=\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}}]\tag{5.2}$$

で与えられる。このことは (1) より

$$\left(\sigma^{(k)*}_\eta\otimes\mathbb{C}[M_{k,n}]\right)^{O(k,\mathbb{C})}\simeq(\det{}_n)^{-k/2}\otimes\pi'(\eta)\big|_{U(n)^\sim}$$

であるので、$\pi'(\eta)$ の Harish-Chandra 加群のしかるべき次数化を取り、両辺の Poincaré 級数を比較して結論できる。詳細は省く。

(5.2) 式の重複度はすでに例 2.7 で計算してあり、定理で与えた随伴サイクルの重複度に一致する。 □

[10] 残念ながら他のエルミート対称対の場合は、例外型は言うにおよばず、たとえ古典型の場合でもこのような compact 群からの theta lift では得られないようなユニタリ最高ウェイト表現が存在する ([6], [32] 参照)。

[11] $k\ge n$ のとき、$\eta\notin\mathcal{P}_n$ に対しては $\pi'(\eta)=0$ となる。

メタプレクティック群 $Mp(2n,\mathbb{R})$ のユニタリ最低ウェイト表現 $\pi'(\eta)$ の $O(p,q)^{\sim}$ への theta lift を $\pi(\eta)=\theta(\pi'(\eta))$ と書こう。次の定理が我々の主結果である。

Theorem 5.3 (N.-Zhu). stable range の条件 $2n<p,q$ を仮定する。また、$\pi'(\eta)$ を定理 5.1 で与えたユニタリ最低ウェイト表現、$\pi(\eta)=\theta(\pi'(\eta))$ をその theta lift とする。

(1) $p+q\not\equiv k \pmod 2$ のとき、$\pi(\eta)=0$ である。$p+q\equiv k \pmod 2$ のとき、$\pi(\eta)\neq 0$ は $O(p,q)^{\sim}$ のユニタリ表現である。

以下、パリティ条件 $p+q\equiv k \pmod 2$ を仮定する。

(2) $\pi(\eta)$ の K タイプへの分解は、次のように与えられる。

$$\pi(\eta)\big|_{\widetilde{K}} \simeq \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \mathrm{Hom}_{\widetilde{K}}\left(\tau^{(n)}_{\alpha+p/2\mathbb{I}}\otimes\tau^{(n)}_{\beta+q/2\mathbb{I}}{}^{*}, \pi'(\eta)\big|_{\widetilde{K}}\right)\otimes\left(\sigma^{(p)}_{\alpha}\boxtimes\sigma^{(q)}_{\beta}\right) \tag{5.3}$$

(3) $\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k=\theta(\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k)$ を巾零軌道の theta lift とするとき、$\pi(\eta)$ の随伴サイクルは次のように与えられる。

$$\mathcal{AC}\left(\pi(\eta)\right)=\begin{cases}\dim\sigma^{(k)}_{\eta}\cdot[\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k}] & 0\le k\le n\\ \dim\left(\sigma^{(k)}_{\eta}\right)^{O(k-n,\mathbb{C})}\cdot[\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_n}] & n\le k\end{cases}$$

Remark 5.4. (1) 定理の主張 (2) の K タイプへの分解公式は、$p+q\not\equiv k \pmod 2$ のときでも意味を持ち、両辺共にゼロとなる。

(2) $k=0$ のときは、$\pi'(\eta)$ $(\eta=0)$ を自明な表現とみなすことにする。$n=1$ で $k=0$ のとき、$\pi(\eta)=\theta_{SL_2(\mathbb{R})\to O(p,q)}$(自明な表現) は、パリティー条件 $p+q\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ の下で $O(p,q)$ の極小表現を与える。$O(p,q)$ の極小表現については [15], [2], [13] 等々を参照して欲しい。

証明. (2) を証明すれば、(1) のパリティ条件はそれから従う。K タイプへの分解公式は、[21] で $U(n,n)$ の正則離散系列から $U(p,q)$ への theta lift のときに行なった計算をもう少し注意深くやればよい。これについては [20] も参照して欲しい。

(3) の証明について簡単に説明しておこう。注意深い読者はすでに式 (4.4) と K タイプへの分解公式 (5.3) の間の著しい類似に気がついておられるであろう。そこで、随伴サイクルの重複度を求めるには、結局 covariants $M(\eta)$ の $A=\mathbb{C}[\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k}]$ 上の重複度を求めればよいことがわかる。

アフィン商写像

$$\zeta : X_{p,q+k}\to X_{p,q+k}/\!/O(k,\mathbb{C})\simeq\overline{\mathbb{O}^{\mathrm{hol}}_k}$$

は、商写像 $M_{k,n}\to\overline{\mathbb{O}'^{\mathrm{hol}}_k}$ の持ち上げであり、簡単な考察で ζ の generic ファイバーは閉軌道であることが分かる。

さらに、Remark 4.2 に注意して具体的に計算すると、generic な固定部分群が $0 \le k \le n$ なら自明、$n \le k$ なら $O(k-n, \mathbb{C})$ であることも確かめられる。このことと定理 2.4 を使えば重複度が分かる[12]。 □

この定理の随伴サイクルに対する主張は、次のような形に一般的に述べることができる。

$$\mathcal{AC}(\pi') = m \cdot [\overline{\mathbb{O}'}] \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{AC}(\theta(\pi')) = m \cdot [\overline{\theta(\mathbb{O}')}]$$

stable range の条件を課さないと、この主張は成り立たないが、stable range においては最低ウェイト表現だけでなく一般のユニタリ表現 π' に対しても成り立つのではないかと期待される。

6. 古典群の有限次元表現と分岐則

以上の考察の副産物として、古典群の有限次元表現の分岐則について分かったことを報告する。

まず $\sigma_\lambda^{(q)}$ で、最高ウェイトが λ の $O(q, \mathbb{C})$ の有限次元表現を表す。この表現はコンパクト群 $O(q)$ の表現といっても同じだから、以下 $O(q, \mathbb{C})$ とは書かずに $O(q)$ と書くことも多い。また、$\tau_\lambda^{(n)}$ は $GL_n(\mathbb{C})$ または $U(n)$ の最高ウェイトが λ の有限次元既約表現を表す。

次のように、いくつかの分岐指数を定義しておこう。

$$\tau_\lambda^{(n)} \otimes \tau_\mu^{(n)} \simeq \sum_\nu^\oplus \mathrm{LR}_{\lambda,\mu}^\nu \, \tau_\nu^{(n)} \tag{6.1}$$

$$\tau_\lambda^{(k)}\big|_{O(k)} \simeq \sum_\mu^\oplus c_\mu^\lambda \, \sigma_\mu^{(k)} \tag{6.2}$$

$$\sigma_\nu^{(q+k)}\big|_{O(q)\times O(k)} \simeq \sum_{\lambda,\eta}^\oplus b_{\lambda,\eta}^\nu \, \sigma_\lambda^{(q)} \boxtimes \sigma_\eta^{(k)} \tag{6.3}$$

Proposition 6.1. $2n < q, 0 \le k \le n$ とする。分岐指数を上のように定義すると、次の等式が成り立つ。

$$b_{\lambda,\eta}^\nu = \sum_{\mu \in \mathcal{P}_k} c_\eta^\mu \cdot \mathrm{LR}_{\lambda,\mu}^\nu, \qquad (\lambda, \nu \in \mathcal{P}_n) \tag{6.4}$$

特に $O(k)$ 不変ベクトルの空間の次元公式として

$$\dim\left(\sigma_\nu^{(q+k)}\right)^{O(k)} = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n, \mu\in\mathcal{P}_k} \mathrm{LR}_{\lambda,2\mu}^\nu \cdot \dim \sigma_\lambda^{(q)} \qquad (\nu \in \mathcal{P}_n)$$

が得られる。

[12]実は、このような具体的な計算をする必要はなく、アフィン商写像の lift を利用した一般的な証明が

証明. covariants の空間 $\left(\sigma_\eta^{(k)} \otimes \mathbb{C}[X_{p,q+k}]\right)^{O(k,\mathbb{C})}$ を二通りの方法で計算すればよい。まず (6.4) の左辺は

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}[X_{p,q+k}] &\simeq \mathbb{C}[\mathfrak{N}_{p,q+k}]^{GL_n} \qquad (\text{定義式 (4.3) より}) \\
&\simeq \sum_{\alpha,\beta\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \left(\sigma_\alpha^{(p)} \boxtimes \sigma_\beta^{(q+k)}\right) \boxtimes \left(\tau_\alpha^{(n)*} \otimes \tau_\beta^{(n)}\right)^{GL_n} \qquad (\text{(3.2) 式より}) \\
&\simeq \sum_{\nu\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \sigma_\nu^{(p)} \boxtimes \sigma_\nu^{(q+k)} \simeq \sum_{\nu\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \sigma_\nu^{(p)} \boxtimes \Big(\sum_{\lambda,\eta}^{\oplus} b_{\lambda,\eta}^{\nu}\, \sigma_\lambda^{(q)} \boxtimes \sigma_\eta^{(k)} \Big) \\
&\simeq \sum_{\eta}^{\oplus} \Big(\sum_{\lambda,\nu}^{\oplus} b_{\lambda,\eta}^{\nu}\, \sigma_\nu^{(p)} \boxtimes \sigma_\lambda^{(q)} \Big) \boxtimes \sigma_\eta^{(k)}
\end{aligned}$$

の係数として出る。次に、右辺は

$$\begin{aligned}
\left(\sigma_\eta^{(k)} \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{N}_{q+k}]\right)^{O(k,\mathbb{C})} &\simeq \mathbb{C}[M_{q,n}] \otimes_{\mathrm{Sym}\,n} \left(\mathbb{C}[M_{k,n}] \otimes \sigma_\eta^{(k)}\right)^{O(k,\mathbb{C})} \\
&\simeq \mathcal{H}_q \otimes \Big(\sum_{\mu\in\mathcal{P}_k}^{\oplus} (\tau_\mu^{(k)} \otimes \sigma_\eta^{(k)})^{O(k,\mathbb{C})} \otimes \tau_\mu^{(n)} \Big) \\
&\simeq \mathcal{H}_q \otimes \Big(\sum_{\mu\in\mathcal{P}_k}^{\oplus} c_\eta^{\mu}\, \tau_\mu^{(n)} \Big)
\end{aligned}$$

と $\mathbb{C}[\mathfrak{N}_p] \simeq \mathcal{H}_p$ のテンソル積を取り、さらに GL_n 不変式を取ることで得られる。

第 2 の式は $\eta = 0$ として、λ についての和を取ればよい。 □

最後に定理 5.1 の $k \geq n$ の場合について、有限次元の表現論の観点から注釈をつけておく。もし $k \geq 2n$ ならば、定理 5.1 の $\pi'(\eta)$ は正則な離散系列表現となる。すると、その随伴サイクルにおける重複度は極小 K タイプの次元に一致することが簡単に分かる。今の場合、極小 K タイプは $\tau_{\eta+k/2\mathbb{1}}^{(n)}$ だから、その次元は $\dim \tau_\eta^{(n)}$ である。一方、定理によればそれは $\dim\left(\sigma_\eta^{(k)}\right)^{O(k-n)}$ であるから、両者は一致しなければならない。実はもっと詳しく、次が成り立つ。

Proposition 6.2. $k \geq 2n$ であるとする。$\eta \in \mathcal{P}_n$ に対して、次の $O(n)$ 加群の同型が成り立つ。

$$\left(\sigma_\eta^{(k)}\right)^{O(k-n)}\Big|_{O(n)} \simeq \tau_\eta^{(n)}\Big|_{O(n)}$$

証明. $k \geq 2n$ のときには、$O(k) \times GL_n$ 加群としての同型

$$\mathbb{C}[M_{k,n}] \simeq \mathcal{H}_k \otimes \mathbb{C}[M_{k,n}]^{O(k)} \simeq \mathcal{H}_k \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Sym}\,_n] \tag{6.5}$$

が成り立つことがよく知られている。ここで、

$$\mathcal{H}_k \simeq \sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \sigma_\alpha^{(k)} \boxtimes \tau_\alpha^{(n)}$$

であることに注意して、(6.5) の両辺の $O(k-n)$ 不変式を取れば、

$$\mathbb{C}[M_{k,n}]^{O(k-n)} \simeq (\mathcal{H}_k)^{O(k-n)} \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Sym}\,_n] \simeq \sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} (\sigma_\alpha^{(k)})^{O(k-n)} \boxtimes \left(\tau_\alpha^{(n)} \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Sym}\,_n]\right)$$

一方 $M_{k,n} = M_{n,n} \oplus M_{k-n,n}$ と分解しておいて $O(k-n)$ 不変式を取れば

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[M_{k,n}]^{O(k-n)} &\simeq \mathbb{C}[M_{n,n}] \otimes \mathbb{C}[M_{k-n,n}]^{O(k-n)} \\ &\simeq \Big(\sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \tau_\alpha^{(n)} \boxtimes \tau_\alpha^{(n)}\Big) \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Sym}\,_n] \simeq \sum_{\alpha\in\mathcal{P}_n}^{\oplus} \tau_\alpha^{(n)} \boxtimes \left(\tau_\alpha^{(n)} \otimes \mathbb{C}[\mathrm{Sym}\,_n]\right)\end{aligned}$$

となる。この両式を比較すれば求める同型を得る。 □

この結果は、$O(k-n)$ 不変ベクトルの全体 $\left(\sigma_\eta^{(k)}\right)^{O(k-n)}$ に GL_n の作用がうまく定義できることを意味している。しかし今のところそれがもともとの $O(k)$ の作用からどのようにして自然に導き出されるものかは不明である。識者のご教示を乞う。

References

[1] Jeffrey Adams and Dan Barbasch. Reductive dual pair correspondence for complex groups. *J. Funct. Anal.*, 132(1):1–42, 1995.

[2] B. Binegar and R. Zierau. Unitarization of a singular representation of $\mathrm{SO}(p,q)$. *Comm. Math. Phys.*, 138(2):245–258, 1991.

[3] Andrzej Daszkiewicz, Witold Kraśkiewicz, and Tomasz Przebinda. Nilpotent orbits and complex dual pairs. *J. Algebra*, 190(2):518–539, 1997.

[4] Andrzej Daszkiewicz, Witold Kraśkiewicz, and Tomasz Przebinda. Dual pairs and Kostant-Sekiguchi correspondence. I. *J. Algebra*, 250(2):408–426, 2002.

[5] Andrzej Daszkiewicz, Witold Kraśkiewicz, and Tomasz Przebinda. Dual pairs and Kostant-Sekiguchi correspondence. II. classification of nilpotent elements. 2002. Preprint.

[6] Mark G. Davidson, Thomas J. Enright, and Ronald J. Stanke. Differential operators and highest weight representations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 94(455):iv+102, 1991.

[7] Sigurdur Helgason. *Groups and geometric analysis.* Academic Press Inc., Orlando, FL, 1984. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions.

[8] Roger Howe. Dual pairs in physics: harmonic oscillators, photons, electrons, and singletons. In *Applications of group theory in physics and mathematical physics (Chicago, 1982)*, pages 179–207. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[9] Roger Howe. Remarks on classical invariant theory. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 313(2):539–570, 1989.

[10] Roger Howe. Transcending classical invariant theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3):535–552, 1989.

[11] Roger Howe. Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond. In *The Schur lectures (1992) (Tel Aviv)*, pages 1–182. Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995.

[12] M. Kashiwara and M. Vergne. On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials. *Invent. Math.*, 44(1):1–47, 1978.

[13] Toshiyuki Kobayashi and Bent Ørsted. Analysis on the minimal representation of $O(p,q)$ – I, II, III. 2001. Preprint, RIMS-1337 – RIMS-1339.

[14] Bertram Kostant. Lie group representations on polynomial rings. *Amer. J. Math.*, 85:327–404, 1963.

[15] Bertram Kostant. The vanishing of scalar curvature and the minimal representation of SO(4, 4). In *Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989)*, pages 85–124. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[16] Jian-Shu Li. Singular unitary representations of classical groups. *Invent. Math.*, 97(2):237–255, 1989.

[17] Kyo Nishiyama. Multiplicity-free actions and the geometry of nilpotent orbits. *Math. Ann.*, 318(4):777–793, 2000.

[18] Kyo Nishiyama. Theta lifting of two-step nilpotent orbits for the pair $\mathrm{O}(p,q) \times \mathrm{S}p(2n, \mathbb{R})$. In *Infinite dimensional harmonic analysis (Kyoto, 1999)*, pages 278–289. Gräbner, Altendorf, 2000.

[19] Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai, and Kenji Taniguchi. Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules—Hermitian symmetric case. *Astérisque*, (273):13–80, 2001. Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations.

[20] Kyo Nishiyama and Chen-Bo Zhu. Theta lifting of the trivial representation and the associated nilpotent orbit — the case of $U(p,q) \times U(n,n)$ —. In *Proceedings of Symposium on Representation Theory 1999 (Tateyama, Chiba)*, pages 188–206. 1999.

[21] Kyo Nishiyama and Chen-Bo Zhu. Theta lifting of holomorphic discrete series: the case of $U(n,n) \times U(p,q)$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(8):3327–3345 (electronic), 2001.

[22] Kyo Nishiyama and Chen-bo Zhu. Theta lifting of highest weight modules and their associated cycles. 2002. In preparation.

[23] Kyo Nishiyama and Chen-bo Zhu. Theta lifting of nilpotent orbits for symmetric pairs. 2002. Submitting.

[24] Takuya Ohta. Nilpotent orbits of Z_4-graded lie algebra and geometry of the moment maps associated to the dual pair $(U(p,q), U(r,s))$. 2002. Preprint.

[25] Takuya Ohta. Nilpotent orbits of Z_4-graded lie algebra and geometry of the moment maps associated to the dual pairs $(O(p,q), Sp(2n,\mathbb{R}))$ and $(O^*(2n), Sp(p,q))$. 2002. In preparation.

[26] Annegret Paul. Howe correspondence for real unitary groups. *J. Funct. Anal.*, 159(2):384–431, 1998.

[27] Annegret Paul. Howe correspondence for real unitary groups. II. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128(10): 3129–3136, 2000.

[28] Tomasz Przebinda. The duality correspondence of infinitesimal characters. *Colloq. Math.*, 70(1):93–102, 1996.

[29] Tomasz Przebinda. A Cauchy Harish-Chandra integral, for a real reductive dual pair. *Invent. Math.*, 141(2):299–363, 2000.

[30] B. Vinberg and V.L. Popov. Invariant theory. In *Algebraic geometry. IV*, pages 123 – 278. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[31] Hiroshi Yamashita. Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules. *Astérisque*, (273):81–137, 2001. Nilpotent orbits, associated cycles and Whittaker models for highest weight representations.

[32] Hiroshi Yamashita. Isotropy representation and projection to the PRV-component. 2002. 当講究録所収.

[33] 向井茂. モジュライ理論 1. 岩波書店, 1998. 岩波講座現代数学の展開.

KYO NISHIYAMA, FACULTY OF IHS, KYOTO UNIVERSITY, SAKYO, KYOTO 606-8501, JAPAN
E-mail address: `kyo@math.h.kyoto-u.ac.jp`