数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 137-148

Painlevé VI 方程式の代数函数解—行列式表示と退化極限

神戸大学大学院 自然科学研究科　増田 哲　(Tetsu Masuda)

1　はじめに

Painlevé 方程式の古典解は，大きく2つのクラスに分類される．ひとつは，Gauss の超幾何函数などの特殊函数を用いて表される解であり，もうひとつは代数函数解（あるいは有理解）である．

これらの古典解を Bäcklund 変換群であるアフィンワイル群対称性の観点から捉えると，たいへん特徴的な描像が成り立つことが，最近の研究の進展により明らかになった [19, 12]. 具体的には，ワイル群の鏡映面上には特殊函数解が存在し，Dynkin 図形の自己同型に対応する Bäcklund 変換の固定点上には代数函数解（あるいは有理解）が存在する，というものである（$P_{\rm VI}$ については，この描像で捉えきれない代数函数解も存在する）.

このような代数函数解は，τ-函数の非自明な因子として定義される特殊多項式の比（の log 微分）で表される．$P_{\rm II}, P_{\rm IV}$ でいえば，各々 Yablonskii-Vorob'ev 多項式あるいは Okamoto 多項式の名で知られているものである [20, 16]. $P_{\rm III}, P_{\rm V}$ および $P_{\rm VI}$ については，梅村によって系統的に調べられた．これらの特殊多項式は，Painlevé 方程式の Bäcklund 変換の平行移動成分から生じる Toda 方程式により生成され，極めて神秘的な組合せ論的性質をもつことも知られている [19, 11, 18].

さて，これらの特殊多項式に関するひとつの重要な事実は，これらが Schur 函数の特殊化として捉えられる，ということである．実際，Yablonskii-Vorob'ev 多項式，Okamoto 多項式および $P_{\rm III}, P_{\rm V}$ の Umemura 多項式については，Schur 函数を用いた具体的な表示が知られている [3, 2, 4, 12, 13].

さらに，最近の研究によって，$P_{\rm V}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{(y-1)^2}{2t^2}\left(\kappa_\infty^2 y-\frac{\kappa_0^2}{y}\right)-(\theta+1)\frac{y}{t}-\frac{y(y+1)}{2(y-1)}, \quad (1.1)$$

の有理解に付随する特殊多項式（Umemura 多項式を含む包括的な多項式）は，より一般的な構造を有することが明らかになった [10]. すなわち，Schur 函数のある種の一般化である普遍指標 (universal characters) [8] の特殊化として捉えられることが示されたのである．具体的にみてみよう．

命題 1.1　多項式 $p_k=p_k^{(r)}(z), q_k=q_k^{(r)}(z)$ を

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(r)}\lambda^k=(1-\lambda)^{-r}\exp\left(-\frac{z\lambda}{1-\lambda}\right),\quad p_k^{(r)}=0 \text{ for } k<0,$$
$$q_k^{(r)}(z)=p_k^{(r)}(-z), \quad (1.2)$$

で定義する．さらに，$m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，多項式 $R_{m,n}=R_{m,n}^{(r)}(z)$ を行列式

$$R_{m,n}^{(r)}(z)=\begin{vmatrix} q_1^{(r)} & q_0^{(r)} & \cdots & q_{-m+2}^{(r)} & q_{-m+1}^{(r)} & \cdots & q_{-m-n+3}^{(r)} & q_{-m-n+2}^{(r)} \\ q_3^{(r)} & q_2^{(r)} & \cdots & q_{-m+4}^{(r)} & q_{-m+3}^{(r)} & \cdots & q_{-m-n+5}^{(r)} & q_{-m-n+4}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{2m-1}^{(r)} & q_{2m-2}^{(r)} & \cdots & q_m^{(r)} & q_{m-1}^{(r)} & \cdots & q_{m-n+1}^{(r)} & q_{m-n}^{(r)} \\ p_{n-m}^{(r)} & p_{n-m+1}^{(r)} & \cdots & p_{n-1}^{(r)} & p_n^{(r)} & \cdots & p_{2n-2}^{(r)} & p_{2n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{-n-m+4}^{(r)} & p_{-n-m+5}^{(r)} & \cdots & p_{-n+3}^{(r)} & p_{-n+4}^{(r)} & \cdots & p_2^{(r)} & p_3^{(r)} \\ p_{-n-m+2}^{(r)} & p_{-n-m+3}^{(r)} & \cdots & p_{-n+1}^{(r)} & p_{-n+2}^{(r)} & \cdots & p_0^{(r)} & p_1^{(r)} \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

で定義する．$m,n\in\mathbb{Z}_{<0}$ に対しては，

$$R_{m,n}=(-1)^{m(m+1)/2}R_{-m-1,n},\quad R_{m,n}=(-1)^{n(n+1)/2}R_{m,-n-1}, \tag{1.4}$$

とする．このとき，

$$z=\frac{t}{2},\quad r=2s-m+n, \tag{1.5}$$

の下で，

$$R_{m,n}^{(r)}(z)=S_{m,n}(t,s), \tag{1.6}$$

とすると，

$$y=-\frac{S_{m,n-1}(t,s)S_{m-1,n}(t,s)}{S_{m-1,n}(t,s-1)S_{m,n-1}(t,s+1)}, \tag{1.7}$$

は，$\mathrm{P_V}$ (1.1) の有理解を与える．但し，パラメータの値は

$$\kappa_\infty=s,\quad \kappa_0=s-m+n,\quad \theta=m+n-1, \tag{1.8}$$

である．

こうして，$\mathrm{P_{II}}$ から $\mathrm{P_V}$ までの有理解の行列式表示が出揃った．したがって，$\mathrm{P_{VI}}$ の Umemura 多項式はどのような行列式表示を持つであろうか，と問うのは極めて自然であろう．

Kirillov および 種子田は，組合せ論の文脈で $\mathrm{P_{VI}}$ の Umemura 多項式を一般化し，それらがある種の極限操作により命題 **1.1** の多項式 $S_{m,n}$（正確にはその一部）に帰着することを示した [5, 6, 7]．彼らの結果は，$\mathrm{P_{VI}}$ の代数函数解に付随する特殊多項式も，普遍指標の特殊化として表されることを示唆している．

本稿では，$\mathrm{P_{VI}}$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2}=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y-t}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{y-t}\right)\frac{dy}{dt}\\&+\frac{y(y-1)(y-t)}{2t^2(t-1)^2}\left[\kappa_\infty^2-\kappa_0^2\frac{t}{y^2}+\kappa_1^2\frac{t-1}{(y-1)^2}+(1-\theta^2)\frac{t(t-1)}{(y-t)^2}\right],\end{aligned} \tag{1.9}$$

の，Dynkin 図形の自己同型の固定点に由来する代数函数解（大雑把にいえば $\sqrt{t}$ の多項式の比で表されるようなクラスの解）について考察し，それらがやはり普遍指標の特殊化として表されることを示す．また，解の退化や Umemura 多項式との関係も議論する．

2 Painlevé VI 方程式の Bäcklund 変換

代数函数解を具体的に構成する前に，準備として P_{VI} の Bäcklund 変換を文献 [14] にしたがい定式化しておこう．よく知られているように，P_{VI} は，

$$H = q(q-1)(q-t)p^2 - [\kappa_0(q-1)(q-t) + \kappa_1 q(q-t) + (\theta-1)q(q-1)]p + \kappa(q-t),$$
$$\kappa = \frac{1}{4}(\kappa_0+\kappa_1+\theta-1)^2 - \frac{1}{4}\kappa_\infty^2, \tag{2.1}$$

を Hamiltonian とする Hamilton 系

$$S_{VI}: \qquad q' = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad ' = t(t-1)\frac{d}{dt}, \tag{2.2}$$

と等価である [15]．実際，$y = q$ についての方程式は P_{VI} (1.9) に他ならない．新しい変数を

$$f_0 = q - t, \quad f_3 = q - 1, \quad f_4 = q, \quad f_2 = p, \tag{2.3}$$

および

$$\alpha_0 = \theta, \quad \alpha_1 = \kappa_\infty, \quad \alpha_3 = \kappa_1, \quad \alpha_4 = \kappa_0, \tag{2.4}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1, \tag{2.5}$$

により導入しよう．これらの変数 α_i, f_i を用いると，P_{VI} の Bäcklund 変換はたいへん見通しよく記述できる．まず，パラメータ α_i に対しては，

$$s_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ij}\alpha_i, \quad (i,j = 0,1,2,3,4) \tag{2.6}$$

で与えられる．ここで，$A = (a_{ij})_{i,j=0}^4$ は $D_4^{(1)}$ の Cartan 行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

である．変数 f_i に対する Bäcklund 変換は，

$$s_2(f_i) = f_i + \frac{\alpha_2}{f_2}, \quad s_i(f_2) = f_2 - \frac{\alpha_i}{f_i}, \quad (i = 0,3,4) \tag{2.8}$$

と表される．変換 s_i $(i = 0, \ldots, 4)$ は，アフィンワイル群 $W(D_4^{(1)})$ を生成する．Dynkin 図形の自己同型に対応する Bäcklund 変換は，

$$s_5: \quad \alpha_0 \leftrightarrow \alpha_1, \quad \alpha_3 \leftrightarrow \alpha_4,$$

$$f_2 \to -\frac{f_0(f_2 f_0+\alpha_2)}{t(t-1)}, \quad f_0 \to \frac{t(t-1)}{f_0}, \quad f_3 \to (t-1)\frac{f_4}{f_0}, \quad f_4 \to t\frac{f_3}{f_0}, \tag{2.9}$$

$$s_6: \quad \alpha_0 \leftrightarrow \alpha_3, \quad \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_4,$$

$$f_2 \to -\frac{f_4(f_4 f_2+\alpha_2)}{t}, \quad f_0 \to -t\frac{f_3}{f_4}, \quad f_3 \to -\frac{f_0}{f_4}, \quad f_4 \to \frac{t}{f_4}, \tag{2.10}$$

$$s_7: \quad \alpha_0 \leftrightarrow \alpha_4, \quad \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3,$$

$$f_2 \to \frac{f_3(f_3 f_2+\alpha_2)}{t-1}, \quad f_0 \to -(t-1)\frac{f_4}{f_3}, \quad f_3 \to -\frac{t-1}{f_3}, \quad f_4 \to \frac{f_0}{f_3}, \tag{2.11}$$

で与えられる．

アフィンワイル群 $W(D_4^{(1)})$ については，変換公式

$$s_i(\tau_j) = \tau_j, \quad (i \neq j,\ i,j = 0,1,2,3,4) \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} s_0(\tau_0) = f_0\frac{\tau_2}{\tau_0}, \quad s_1(\tau_1) = \frac{\tau_2}{\tau_1}, \quad s_3(\tau_3) = f_3\frac{\tau_2}{\tau_3}, \quad s_4(\tau_4) = f_4\frac{\tau_2}{\tau_4}, \\ s_2(\tau_2) = t^{-\frac{1}{2}} f_2 \frac{\tau_0\tau_1\tau_3\tau_4}{\tau_2}, \end{gathered} \tag{2.13}$$

により，表現を τ-函数のレベルにまで持ち上げることができて，τ-函数の s_5, s_6, s_7 に対する変換を構成することも可能である．また，Toda 方程式や Hirota-Miwa 方程式といった，τ-函数に対するさまざまな双線形関係式を導くことができる．

平行移動演算子を

$$\begin{aligned} T_{03} &= s_3 s_0 s_2 s_4 s_1 s_2 s_6, \quad & T_{14} &= s_4 s_1 s_2 s_3 s_0 s_2 s_6, \\ \widehat{T}_{34} &= s_3 s_2 s_0 s_1 s_2 s_3 s_5, \quad & T_{34} &= s_4 s_3 s_2 s_1 s_0 s_2 s_5, \end{aligned} \tag{2.14}$$

と導入しよう．これらの α_i, f_i への作用は互いに可換である（τ-函数への作用は必ずしも可換ではなく，1 の巾乗根を掛ける修正が必要）．とくに，パラメータ α_i への作用は，

$$\begin{aligned} T_{03}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) &= (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) + (1,0,-1,1,0), \\ T_{14}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) &= (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) + (0,1,-1,0,1), \\ \widehat{T}_{34}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) &= (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) + (0,0,0,1,-1), \\ T_{34}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) &= (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) + (0,0,-1,1,1), \end{aligned} \tag{2.15}$$

と与えられる．以下，

$$\tau_{k,l,m,n} = T_{34}^n \widehat{T}_{34}^m T_{14}^l T_{03}^k(\tau_0), \quad k,l,m,n \in \mathbb{Z}, \tag{2.16}$$

と表記することにする．

注 2.1 これら 4 つの平行移動演算子は，D_4 ウエイト格子を生成する．もちろん，そのような 4 つの平行移動演算子の選び方は一意ではない．ここでは，以下で構成する代数函数解にあわせて選んだ．

注 2.2 上の 4 つを含め１２個の平行移動演算子を同様に構成できる．それぞれに対応して，１２通りの Toda 方程式を書き下すことができる．

3 代数函数解の構成と行列式表示

以上の準備のもとに，P_{VI} の代数函数解を構成しよう．計算や証明の詳細については文献 [9] を参照していただくことにして，ここでは概略だけを述べる．まずは，Dynkin 図形の自己同型の固定点を考えることにより seed 解を求めよう．変換 s_6 の固定点を考えると，(2.10) により，

$$\alpha_0=\alpha_3,\quad \alpha_1=\alpha_4,\quad f_4=\frac{t}{f_4},\quad f_2=-\frac{f_4(f_4f_2+\alpha_2)}{t}, \tag{3.1}$$

となるから，a,b をパラメータとして，

$$\begin{gathered}(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\left(a,b,\frac{1}{2}-a-b,a,b\right),\\ f_0=x-x^2,\quad f_3=x-1,\quad f_4=x,\quad f_2=\frac{1}{2}\left(a+b-\frac{1}{2}\right)x^{-1},\quad x^2=t,\end{gathered} \tag{3.2}$$

が得られる．

次に，seed 解 (3.2) に Bäcklund 変換（平行移動）を施して，代数函関解の族を構成することを考える．具体的に τ-函数 $\tau_{k,l,m,n}$ をいくつか計算すると，$V_{k,l,m,n}=V_{k,l,m,n}(x;a,b)$ を x,a,b についての整数係数多項式として，

$$\tau_{k,l,m,n}=(\text{規格化因子})\times V_{k,l,m,n}, \tag{3.3}$$

と書けることが観察される．また，4 つの平行移動のうち T_{03} および T_{14} の作用については，パラメータ a,b のシフトにより吸収できるので，結局は $\widehat{T}_{34},T_{34}$ の 2 方向のみの Bäcklund 変換を考えればよいことがわかる．具体的には，

$$V_{k,l,m,n}(x;a,b)=V_{0,0,m,n}(x;a+k,b+l), \tag{3.4}$$

であることが示せるので，$V_{m,n}(x;a,b)=V_{0,0,m,n}(x;a,b)$ と書こう．漸化式 $\xi_{n+1}\xi_{n-1}=(2n+1)\xi_n^2$ および初期条件 $\xi_{-1}=\xi_0=1$ で定まる定数 ξ_n を用いて，

$$V_{m,n}(x;a,b)=(-2x)^{m(m+1)/2}(-2)^{n(n+1)/2}\xi_m\xi_nS_{m,n}(x;a,b), \tag{3.5}$$

と規格化しなおすと，$S_{m,n}$ を行列式で表すことができる．

定理 3.1 多項式 $p_k=p_k^{(c,d)}(x),q_k=q_k^{(c,d)}(x)$ を

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}p_k^{(c,d)}(x)\lambda^k=(1-\lambda)^{c-d}(1+x\lambda)^{-c},\quad p_k^{(c,d)}(x)=0\ \text{for}\ k<0,\\ q_k^{(c,d)}(x)=p_k^{(c,d)}(x^{-1}),\end{gathered} \tag{3.6}$$

で定義する．さらに，$m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，多項式 $R_{m,n} = R_{m,n}(x; c, d)$ を行列式

$$R_{m,n}(x;c,d) = \begin{vmatrix} q_1 & q_0 & \cdots & q_{-m+2} & q_{-m+1} & \cdots & q_{-m-n+3} & q_{-m-n+2} \\ q_3 & q_2 & \cdots & q_{-m+4} & q_{-m+3} & \cdots & q_{-m-n+5} & q_{-m-n+4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{2m-1} & q_{2m-2} & \cdots & q_m & q_{m-1} & \cdots & q_{m-n+1} & q_{m-n} \\ p_{n-m} & p_{n-m+1} & \cdots & p_{n-1} & p_n & \cdots & p_{2n-2} & p_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{-n-m+4} & p_{-n-m+5} & \cdots & p_{-n+3} & p_{-n+4} & \cdots & p_2 & p_3 \\ p_{-n-m+2} & p_{-n-m+3} & \cdots & p_{-n+1} & p_{-n+2} & \cdots & p_0 & p_1 \end{vmatrix}, \tag{3.7}$$

で定義する．$m, n \in \mathbb{Z}_{<0}$ に対しては，

$$R_{m,n} = (-1)^{m(m+1)/2} R_{-m-1,n}, \quad R_{m,n} = (-1)^{n(n+1)/2} R_{m,-n-1}, \tag{3.8}$$

とする．このとき，

$$c = a + b + n - \frac{1}{2}, \quad d = 2b - m + n, \tag{3.9}$$

の下で，

$$R_{m,n}(x; c, d) = S_{m,n}(x; a, b), \tag{3.10}$$

とすると，

$$y = x \frac{S_{m,n-1}(x; a+1, b) S_{m-1,n}(x; a+1, b)}{S_{m-1,n}(x; a+1, b-1) S_{m,n-1}(x; a+1, b+1)}, \tag{3.11}$$

は，P_{VI} の代数函数解を与える．但し $x^2 = t$ であり，パラメータの値は，

$$\kappa_\infty = b, \quad \kappa_0 = b - m + n, \quad \kappa_1 = a + m + n, \quad \theta = a, \tag{3.12}$$

である．

この定理は，Dynkin 図形の自己同型の固定点に由来する P_{VI} の代数函数解もまた，普遍指標の特殊化として表せることを意味している．

注 3.2 行列式の成分 p_k, q_k は Jacobi 多項式である．

$$p_k^{(c,d)}(x) = P_k^{(d-1,c-d-k)}(-1-2x). \tag{3.13}$$

4 代数函数解の退化

Painlevé 方程式は，次のダイアグラム

$$\begin{array}{ccccc} P_{\mathrm{VI}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{V}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{III}} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & P_{\mathrm{IV}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{II}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{I}}, \end{array} \tag{4.1}$$

にしたがって，P_{VI} から順次，退化極限操作により得られる [1]．また，P_{I} を除く 5 つの方程式には，Gauss の超幾何函数などの古典超越函数で表される特殊解が存在するが，上の退化図式は，これら古典超越函数の退化・合流と対応していることも知られている．

それでは，Dynkin 図形の自己同型の固定点に由来する代数函数解あるいは有理解の退化はどのようなものであろうか？答えは

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathrm{VI}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{V}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P_{\mathrm{III}} & \longrightarrow & P_{\mathrm{II}}, \end{array} \tag{4.2}$$

となる．以下では，この退化図式のうち，P_{VI} から P_{V} および P_{III} への退化について，簡単に述べる．

4.1 P_{VI} から P_{V} へ

P_{VI} から P_{V} への退化極限操作を代数函数解に適用しよう．紙数の都合により，ここでは多項式 $R_{m,n}(x)$ の退化についてのみ述べる．**定理 3.1** において，

$$x \to -(1-\varepsilon t)^{\frac{1}{2}}, \quad a = \varepsilon^{-1}, \tag{4.3}$$

とすると，

$$c = \varepsilon^{-1} + s + n - \frac{1}{2}, \quad d = 2s - m + n, \tag{4.4}$$

である（$b = s$ と書いた）．母函数による定義 (3.6) から，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p_k^{(c,d)}(x) = p_k^{(r)}(z), \quad \lim_{\varepsilon\to 0} q_k^{(c,d)}(x) = q_k^{(r)}(z), \tag{4.5}$$

であることがわかる．ここで，$p_k^{(r)}, q_k^{(r)}$ は (1.2) で与えられている．これより直ちに，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_{m,n}(x;c,d) = R_{m,n}^{(r)}(z), \tag{4.6}$$

を得る．

注 4.1 定義 (1.2) から，多項式 $p_k^{(r)}$ および $q_k^{(r)}$ は，Laguerre 多項式 $p_k^{(r)}(z) = L_k^{(r-1)}(z)$ である．上で述べた退化は，Jacobi 多項式から Laguerre 多項式への退化に対応している．

4.2 P_{VI} から P_{III} へ

P_{III}

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{2}{t}\left[\theta_\infty y^2 + (\theta_0+1)\right] + y^3 - \frac{1}{y}, \tag{4.7}$$

の有理解については，次のことが知られている [2].

命題 4.2 多項式 $p_k = p_k^{(r)}(t)$ を

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k^{(r)} \lambda^k = (1+\lambda)^r \exp(-t\lambda), \quad p_k^{(r)} = 0 \text{ for } k < 0, \tag{4.8}$$

で定義する．さらに，$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，多項式 $R_n^{(r)}=R_n^{(r)}(t)$ を行列式

$$R_n^{(r)}(t)=\begin{vmatrix} p_n^{(r)} & \cdots & p_{2n-2}^{(r)} & p_{2n-1}^{(r)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{-n+4}^{(r)} & \cdots & p_2^{(r)} & p_3^{(r)} \\ p_{-n+2}^{(r)} & \cdots & p_0^{(r)} & p_1^{(r)} \end{vmatrix}, \tag{4.9}$$

で定義する．$n\in\mathbb{Z}_{<0}$ に対しては，

$$R_n=(-1)^{n(n+1)/2}R_{-n-1}, \tag{4.10}$$

とする．このとき，

$$y=\frac{R_{n-1}^{(r+1)}R_n^{(r)}}{R_n^{(r+1)}R_{n-1}^{(r)}}, \tag{4.11}$$

は，$\mathrm{P_{III}}$ (4.7) の有理解を与える．但し，パラメータの値は，

$$\theta_\infty=r+\frac{1}{2}+n,\quad \theta_0+1=-r-\frac{1}{2}+n, \tag{4.12}$$

である．

$\mathrm{P_{VI}}$ から $\mathrm{P_{III}}$ への退化極限操作は，$\mathrm{P_{VI}}\to\mathrm{P_{V}}$ および $\mathrm{P_{V}}\to\mathrm{P_{III}}$ の操作を組み合わせたものとして得られる．これを $\mathrm{P_{VI}}$ の代数函数解に施してみよう．ここでも，多項式 $R_{m,n}(x)$ の退化についてのみ述べる．$R_{m,n}(x)$ を少し書き換えておこう．

補題 4.3 多項式 $\bar{p}_k=\bar{p}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x)$, $\bar{q}_k=\bar{q}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x)$ を

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty}\bar{p}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x)\lambda^k=(1-\lambda)^{\bar{d}-1}(1+x\lambda)^{-\bar{c}},\quad \bar{p}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x)=0 \text{ for } k<0,\\ \bar{q}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x)=\bar{p}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x^{-1}),\end{gathered} \tag{4.13}$$

で定義する．$\bar{R}_{m,n}=\bar{R}_{m,n}(x;\bar{c},\bar{d})$ を，(3.7) で p_k,q_k をそれぞれ $\bar{p}_k,\bar{q}_k$ に置き換えたものとして定義する．このとき，

$$\bar{c}=a+b+n-\frac{1}{2},\quad \bar{d}=a-b+m+\frac{1}{2}, \tag{4.14}$$

とすると，

$$\bar{R}_{m,n}(x;\bar{c},\bar{d})=S_{m,n}(x;a,b), \tag{4.15}$$

が成り立つ．

注 4.4 多項式 $\bar{p}_k,\bar{q}_k$ もまた，Jacobi 多項式である．

$$\bar{p}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x)=(-1)^kP_k^{(\bar{d}-1-k,\bar{c}-\bar{d})}(1+2x). \tag{4.16}$$

$\mathrm{P_{III}}$ の有理解へ退化させるには，変数およびパラメータを

$$x\to\varepsilon t,\quad a=\frac{1}{2}\left(-\varepsilon^{-1}+r+\frac{1}{2}-m\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(-\varepsilon^{-1}-r-\frac{1}{2}+m\right), \tag{4.17}$$

とおいて，$\varepsilon \to 0$ の極限をとればよい．簡単な考察から，一般性を失うことなく $m=0$ とおいてよいことがわかる．すなわち，行列式表示で片側の成分に制限した場合のみを考えればよい．いま，

$$\bar{c} = -\varepsilon^{-1} + n - \frac{1}{2}, \quad \bar{d} = r+1, \tag{4.18}$$

であるから，母函数による定義 (3.6) より，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{p}_k^{(\bar{c},\bar{d})}(x) = (-1)^k p_k^{(r)}(t), \tag{4.19}$$

であることがわかる．ここで $p_k^{(r)}(t)$ は (4.8) で与えられている．したがって，$\bar{R}_n = \bar{R}_{-1,n} = \bar{R}_{0,n}$ と書くと，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \bar{R}_n(x;c,d) = (-1)^{n(n+1)/2} R_n^{(r)}(t), \tag{4.20}$$

を得る．

注 4.5 定義 (4.8) から，$p_k^{(r)}$ は Laguerre 多項式 $p_k^{(r)}(t) = L_k^{(r-k)}(t)$ である．したがって，ここでの退化も，Jacobi 多項式から Laguerre 多項式への退化に対応している．

5 Umemura 多項式との関係について

まず，P_{VI} の Umemura 多項式の導出 [19] について，簡単に復習しておこう．P_{VI} のパラメータを

$$b_1 = \frac{1}{2}(\kappa_0+\kappa_1), \quad b_2 = \frac{1}{2}(\kappa_0-\kappa_1), \quad b_3 = \frac{1}{2}(\theta-1+\kappa_\infty), \quad b_4 = \frac{1}{2}(\theta-1-\kappa_\infty), \tag{5.1}$$

と書いておく．梅村は，ある変換の固定点を考えることにより，

$$q = \frac{(\alpha+\beta)^2 t \pm (\alpha^2-\beta^2)\sqrt{t(t-1)}}{(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta t}, \quad p = \frac{\alpha q - (\alpha+\beta)/2}{q(q-1)}, \tag{5.2}$$

$$(b_1,b_2,b_3,b_4) = \left(\alpha,\beta,-\frac{1}{2},0\right), \tag{5.3}$$

が，Hamilton 系 S_{VI} の代数函数解を与えることを示した．この（上符号の）解を seed 解として，適当な方向の平行移動に対応する Toda 方程式を考えると，漸化式

$$\begin{aligned} T_{n+1}T_{n-1} = {}& \frac{1}{4}(v^2-4)\left[(v^2-4)\frac{d^2T_n}{dv^2} + v\frac{dT_n}{dv}\right]T_n - \frac{1}{4}(v^2-4)^2\left(\frac{dT_n}{dv}\right)^2 \\ &+ \left\{\frac{1}{4}\left[-2(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2-\beta^2)v\right] + \left(n-\frac{1}{2}\right)^2\right\}T_n^2, \end{aligned} \tag{5.4}$$

に帰着する．ここで，変数 v を

$$v = \sqrt{\frac{t}{t-1}} + \sqrt{\frac{t-1}{t}}, \tag{5.5}$$

で導入した．また，初期条件は $T_0 = T_1 = 1$ で与えられる．この漸化式で生成される有理函数 T_n は，実際には v,α,β についての多項式となることが知られている（$\deg_v T_n =$

$n(n-1)/2$ である）．多項式 T_n は，$\mathrm{P_{VI}}$ の代数函数解に付随する **Umemura** 多項式と呼ばれている．

我々の多項式 $V_{m,n}(x;a,b)$ と Umemura 多項式との関係を調べるために，seed 解のレベルでの対応をみておこう．$\mathrm{P_{VI}}$ には，第2節で述べたものに加え，独立変数も変えるようなBäcklund 変換が存在する [15]．例えば，

$$\sigma_{13}: \quad \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_3, \quad t \to \frac{t}{t-1}, \quad f_4 \to \frac{f_4}{f_3}, \quad f_2 \to -f_3(f_3 f_2 + \alpha_2), \tag{5.6}$$

などがある．

命題 5.1 Umemura の seed 解 (5.2),(5.3) は，我々の seed 解 (3.2) に，Bäcklund 変換

$$\sigma = \sigma_{13} s_3 s_2 s_1, \tag{5.7}$$

を施すことにより得られる．但し，

$$\alpha = \frac{1}{2} - a, \quad \beta = b, \tag{5.8}$$

とする．

証明 ここでは $q = f_4$ についてだけ示す．簡単な計算で，

$$\sigma(f_4) = \frac{f_2 f_4 + \alpha_1 + \alpha_2}{f_2 f_3 + \alpha_1 + \alpha_2} = \frac{\frac{1}{2} - a + b}{\left(\frac{1}{2} - a + b\right) + \left(\frac{1}{2} - a - b\right) x^{-1}}, \tag{5.9}$$

となることがわかる．変換 σ_{13} の作用により，(5.9) においては，

$$x = \mp\sqrt{\frac{t}{t-1}}, \tag{5.10}$$

であるから，(5.2) の第一式と (5.9) とが等価であることがわかる． ∎

以上の議論は，多項式 $V_{m,n}(x;a,b)$ が，(5.8) および

$$x = -\sqrt{\frac{t}{t-1}}, \tag{5.11}$$

という設定のもとで，Umemura 多項式に対応するということを示唆している．式 (5.11) および (5.4) により，$T_n = T_n(x;\alpha,\beta)$ についての漸化式を導いておくと，

$$4T_{n+1}T_{n-1} = x^{-1}\left[(x^2-1)^2\mathcal{D}^2 - \alpha^2(x+1)^2 + \beta^2(x-1)^2 + (2n-1)^2 x\right] T_n \cdot T_n, \tag{5.12}$$

となる．ここで，$\mathcal{D}^2\, T_n \cdot T_n = x\left(\ddot{T}_n T_n - \dot{T}_n{}^2\right) + \dot{T}_n T_n$, $\dot{T}_n = \dfrac{dT_n}{dx}$ などと記した．

定理 5.2 式 (5.8) のもとで，

$$T_n(x;\alpha,\beta) = 2^{-2n(n-1)}(-x)^{-n(n-1)/2} V_{-n,-n}(x; a+n, b), \tag{5.13}$$

が成り立つ．

証明の概略　平行移動演算子 $\widehat{T}_{30} = T_{34}\widehat{T}_{34}T_{03}^{-1}$ に対応する Toda 方程式を考えると，多項式 $V_{-n,-n}(x; a+n, b)$ が満たす漸化式を導出することができる．それを (5.12) と比較することにより，**定理 5.2** を得る． ∎

前節までの議論から，$v = -(x + x^{-1})$ のもとで，明らかに $T_n = T_n(v; \alpha, \beta)$ は v, α, β についての多項式であり，$\deg_v T_n = n(n-1)/2$ であることもわかる．

6　まとめ

本稿では，Dynkin 図形の自己同型の固定点に由来する P_{VI} の代数函数解を考察し，それらが普遍指標を用いて表されることを示した．Jacobi-Trudi 型の表示において，行列式の成分は Jacobi 多項式で与えられる．また，行列式構造を保ったまま，P_V および P_{III} の有理解へ退化することも示した．P_{VI} の Umemura 多項式との対応についても述べた．

今後の課題としては，なぜ普遍指標が Painlevé 方程式の解として現れるのかを明らかにすることが挙げられる．Garnier 系の代数函数解に付随する特殊多項式にも，同様の意味で普遍指標が現れることが津田により示されており [17]，その辺りのカラクリを明らかにすることは極めて興味深い問題である．それには，普遍指標を τ-函数とする可積分系を構成することがひとつの鍵となるであろう．もちろん，このこと自体が重要な課題である（この点については，その後，津田によりかなりの進展があったようである）．

参考文献

[1] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé – A Modern Theory of Special Functions, Aspects of Mathematics E16, Vieweg, 1991.

[2] K. Kajiwara and T. Masuda, On the Umemura polynomials for the Painlevé III equation, Phys. Lett. **A 260** (1999) 462-467.

[3] K. Kajiwara and Y. Ohta, Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation, J. Math. Phys. **37** (1996) 4693-4704.

[4] K. Kajiwara and Y. Ohta, Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé IV equation, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 2431-2446.

[5] A. N. Kirillov and M. Taneda, Generalized Umemura polynomials, to appear in Rocky Mountain Journal of Mathematics, math.CO/0010279.

[6] A. N. Kirillov and M. Taneda, Generalized Umemura polynomials and Hirota-Miwa equations, to appear in MSJ Memoirs, math.CO/0106025.

[7] A. N. Kirillov and M. Taneda, in preparation.

[8] K. Koike, On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: by means of the universal characters, Adv. Math. **74** (1989) 57-86.

[9] T. Masuda, On a class of algebraic solutions to the Painlevé VI equation, its determinant formula and coalescence cascade, submitted to Funkcial. Ekvac., preprint, nlin.SI/0202044.

[10] T. Masuda, Y. Ohta and K. Kajiwara, A determinant formula for a class of rational solutions of Painlevé V equation, to appear in Nagoya Math. J. **168** (2002), nlin.SI/0101056.

[11] M. Noumi, S. Okada, K. Okamoto, and H. Umemura, Special polynomials associated with the Painleve equations II, In: Saito, M. H., Shimizu, Y., Ueno, K. (eds.) Proceedings of the Taniguchi Symposium, 1997, Integrable Systems and Algebraic Geometry. Singapore: World Scientific, 1998, pp. 349-372.

[12] M. Noumi and Y. Yamada, Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials, Nagoya Math. J. **153** (1999) 53-86.

[13] M. Noumi and Y. Yamada, Umemura polynomials for the Painlevé V equation, Phys. Lett. **A247** (1998) 65-69.

[14] M. Noumi and Y. Yamada, A new Lax pair for the sixth Painlevé equation associated with $\widehat{\mathfrak{so}}(8)$, to appear in Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis, World Scientific, math-ph/0203029.

[15] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations I, sixth Painlevé equation P_{VI}, Annali di Matematica pura ed applicata **CXLVI** (1987) 337-381.

[16] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations III, second and fourth Painlevé equations, P_{II} and P_{IV}, Math. Ann. **275** (1986) 222-254.

[17] 津田照久，ガルニエ系に付随する戸田方程式および特殊多項式，本講究録に所収．

[18] M. Taneda, Polynomials associated with an algebraic solution of the sixth Painlevé equation, to appear in Jap. J. Math. **27** (2002).

[19] H. Umemura, Special polynomials associated with the Painlevé equations I, preprint.

[20] A. P. Vorob'ev, On rational solutions of the second Painlevé equation. Diff. Uravn. **1** (1965) 58-59.