数理解析研究所講究録 1296 巻 2002 年 149-167

弦方程式のスペクトル曲線と Hamilton 構造

京都大学総合人間学部　高崎金久 (Kanehisa Takasaki)
Faculty of Integrated Human Studies, Kyoto University

1 はじめに

1 変数 x の常微分作用素

$$Q=\partial_x^q+u_2\partial_x^{q-2}+\cdots+u_p, \quad P=\partial_x^p+v_2\partial_x^{p-2}+\cdots+v_p \tag{1}$$

$(\partial_x=\partial/\partial x)$ に対する交換子方程式

$$[Q,P]=1 \tag{2}$$

を考える．これは $u_2,\ldots,u_q,v_2,\ldots,v_p$ に対する常微分方程式系を定める．これを「(q,p) 型弦方程式 (string equation)」という．[1] このような名前で呼ばれるのは，これが「2 次元量子重力理論」(あるいは 0 次元の標的空間に対する「非臨界弦の理論」) に登場する方程式だからである．もっとも簡単な $q=2,\ p=3$ の場合には

$$Q=\partial_x^2+u, \quad P=\partial_x^3+\frac{3}{2}u\partial_x+\frac{3}{4}u_x \tag{3}$$

と選べば (ただし $u_x=\partial u/\partial x,\ u_{xx}=\partial^2u/\partial x^2,\ldots,$ という記法を用いている) 交換子方程式 (2) は

$$\left(\frac{1}{4}u_{xx}+\frac{3}{4}u^2\right)_x+1=0 \tag{4}$$

という方程式に帰着する．これを 1 回積分して積分定数を x のずらしに吸収すれば

$$\frac{1}{4}u_{xx}+\frac{3}{4}u^2+x=0 \tag{5}$$

[1] 物理学者の Douglas [1] が見出したので Douglas 方程式とも呼ばれる．

となり，上の方程式は本質的にはI型 Painlevé 方程式であることがわかる．このように，弦方程式は特別な場合としてI型 Painlevé 方程式を含み，数学的な視点からも興味深い対象である．[2]

以下では $q=2$ で p が奇数（$p=2g+1$）の系列に対して「スペクトル曲線」に基づく Hamilton 構造の記述を与える．この系列にはI型 Painlevé 方程式（$g=1$）やその退化 Garnier 系への拡張（$g=2$）など重要な例が含まれる．技術的には，スペクトル曲線が超楕円曲線になるため（g はその種数に等しい），$q>2$ の場合に比べて扱いやすい．また，内容上も形式上も KdV 方程式の代数幾何学的な解の取り扱いと共通する部分が多いので，それを参考にして議論を進めることができる．先々 $q>2$ の場合に取り組むためにも，この場合に何が起こるのかを徹底的に調べておく価値がある．

具体的には，この方程式の行列型 Lax 表示から出発して $2g$ 個の独立変数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_g$, $\mu_1,\ldots,\mu_g$ を導入し，もとの方程式が Hamilton 系

$$\dot{\lambda}_j=\frac{\partial H}{\partial \mu_j},\quad \dot{\mu}_j=-\frac{\partial H}{\partial \lambda_j}$$

と同値であることを示す．ここでドット は x についての導函数

$$\dot{\lambda}_j=\frac{d\lambda_j}{dx},\quad \dot{\mu}_j=\frac{d\mu_j}{dx}$$

をあらわす．Hamilton 函数 H（あとの節で具体的な形を示す）が x に依存するので，これは非自励系である．モノドロミー保存変形においては，かなり一般的な状況でこのような Hamilton 系としての表現が存在することがわかっているが，ここでは，正準変数 λ_j,μ と Hamilton 函数 H がスペクトル曲線の定義方程式や幾何学的特徴とどのように関わっているかを明らかにすることに関心がある．

2 弦方程式の構造

弦方程式の微分方程式系としての構造を見るためには，Q,P の係数の間の関係をもう少し特定する必要がある．KdV 階層や KP 階層で用いられる擬微分作用素がここで役に立つ．これをさらに推し進めて，KP 階層の中で弦方程式の構造を系統的に論じて行くことも可能であるが，[3]ここでは必要最小限の説明にとどめる．

---

[2]正確に言えばこの弦方程式は２次元量子重力理論の「エルミート行列模型」に現れる．２次元量子重力理論にはこれと並んで「ユニタリ行列模型」と呼ばれるものが知られているが，こちらにはII型 Painlevé 方程式を特別な場合として含む弦方程式が現れる．詳しくは Moore の論文・解説記事 [2] を参照されたい．

[3]弦方程式を擬微分作用素・一般化 KdV 階層・KP 階層・佐藤 Grassmannnian の言葉で理解する枠組は Fukuma・Kawai・Nakayama[3], Kac・Scharz[4], Schwarz[5], Adler・van Moerbeke[6] などの論文において確立している．詳しくはこれらの原論文あるいは van Moerbeke の解説 [7] などを参照されたい．

2.1 Q を与えて P の形を決める

KdV 階層を KP 階層の中に埋め込む際の議論にならって Q の分数べき

$$Q^{1/q} = \partial_x + w_2\partial_x^{-1} + w_3\partial_x^{-2} + \cdots \tag{6}$$

を考える．係数は Q の係数の微分多項式となる．これを KP 階層の Lax 作用素とみなして，その正べきから微分作用用素部分 $(\quad)_+$ を切り出したもの

$$B_n = (Q^{n/q})_+ = \partial_x^n + \cdots, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

を構成すれば $[Q, B_n]$ は 0 階の微分作用素（すなわち函数の掛け算作用素）になる．そこで，P をこのような B_n の定数係数線形結合

$$P = B_p + c_1 B_{p-1} + \cdots + c_{p-1} B_1 \tag{8}$$

に選べば，Q の係数の微分多項式 F が存在して

$$[Q, P] = F \tag{9}$$

となり，もとの交換子方程式 (2) は

$$F = 1 \tag{10}$$

という単独の常微分方程式に帰着する．

ちなみに，

$$B_{kq} = Q^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

だから $B_q, B_{2q}, \cdots$ は Q と可換であり，これらを P の B_n による定数係数線形結合の表示に入れておいても交換子方程式には実質的に寄与しない．したがってこれらの項は初めから省いておくことにする．

2.2 Q が 2 階の場合

以上のことを $q = 2$ の場合についてもう少し詳しく説明する．この場合 Q は

$$Q = \partial_x^2 + u$$

という形の作用素であり，B_n は

$$B_1 = \partial_x, \quad B_2 = \partial_x^2 + u, \quad B_3 = \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x, \ldots \tag{11}$$

となる．$q=2$ の場合に特有の事情として，Q の分数べきの「留数」すなわち

$$Q^{(2n-1)/2} = \cdots + R_n \partial_x^{-1} + \cdots \tag{12}$$

における ∂_x^{-1} の係数 R_n を用いれば，B_{2n+1} は

$$B_{2n+1} = \sum_{m=0}^{n} (R_m \partial_x - \frac{1}{2} R_{m,x}) Q^{n-m} \tag{13}$$

とあらわせることがわかる．R_n は KdV 方程式の理論でおなじみの微分多項式（Gelfand-Dickey 微分多項式）で，$R_0 = 1$ から出発して

$$2R_{n+1,x} = R_{n,xxx} + 2uR_{n,x} + u_x R_n \tag{14}$$

という漸化式を解くこと（右辺が導函数の形になることがわかる）によって

$$R_0 = 1, \quad R_1 = \frac{1}{2}u, \quad R_2 = \frac{1}{8}u_{xx} + \frac{3}{8}u^2, \ldots \tag{15}$$

というように順次求めることができる．これを用いると Q との交換子は

$$[Q, B_{2n+1}] = -2R_{n+1,x} \tag{16}$$

という簡潔な形にあらわせる．[4]

これらの補助的作用素を用いて P を

$$P = B_{2g+1} + c_1 B_{2g-1} + \cdots + c_g B_1 \tag{17}$$

という定数係数線形結合に選べば（すでに述べた理由によって，$B_2, B_4, \cdots$ の項は省いてある），交換子方程式 (2) は

$$2R_{g+1,x} + 2c_1 R_{g,x} + \cdots + 2c_g R_{1,x} + 1 = 0 \tag{18}$$

に帰着する．これは弦方程式を u の常微分方程式として書き下したもので，I 型 Painlevé 方程式の高階版として知られている．

なお，KdV 階層の方程式（高次 KdV 方程式）の最初の g 個

$$\frac{\partial Q}{\partial t_{2n+1}} = [B_{2n+1}, Q] \quad (n = 1, \ldots, g) \tag{19}$$

を弦方程式と連立させることもできる．ただしその場合には $c_1, \ldots, c_g$ は定数ではなく

$$c_n = \frac{2g-2n+1}{2} t_{2g-2n+3} \tag{20}$$

というように時間変数と連動する．これらの時間発展もモノドロミー保存変形を記述する．

[4]たとえば田中・伊達の本 [8] の序章を参照されたい．そこでは擬微分作用素とは異なる方法で同じ問題を

3 可換微分作用素対との比較

弦方程式の右辺を 0 に置き換えたもの

$$[Q, P] = 0 \tag{21}$$

(あるいはそれに従う可換微分作用素対 Q, P) は 1920 年代に Burchnall と Chaundy [9] に取り上げられて以来の長い研究の歴史をもつ. 1970 年代後半の Krichever[10] による研究はこの問題の背後にある代数幾何学的構造を一般的な形で明らかにした. 今日ではこの方程式は KP 階層の代数幾何学的な解を特徴づけるものとして理解されている [11, 12]. [5]

弦方程式はいろいろな面で可換微分作用素対の方程式と類似する性質をもつ. 以下ではまず可換微分作用素対の基本的性質について簡単に解説し, その後で同様の視点から弦方程式に迫るアイディアを述べる.

3.1 可換微分作用素対とスペクトル問題

可換微分作用素対と代数幾何学との関係を説明する際の出発点は, 可換微分作用素対 Q, P が常にある定数係数の多項式関係式

$$f(Q, P) = 0 \tag{22}$$

を満たすという事実である (このことは Burchnall と Chaundy がすでに指摘していた). 単なる変数 λ, μ で置き換えれば

$$f(\lambda, \mu) = 0 \tag{23}$$

という代数方程式が得られるが, これによって定まる代数曲線をスペクトル曲線という. これは微分作用素の同時固有値問題[6]

$$Q\psi = \lambda\psi, \quad P\psi = \mu\psi \tag{24}$$

の固有値対 (λ, μ) が描く曲線である. すなわち, Q, P に同時固有函数 ψ が存在すれば (λ, μ) はスペクトル曲線の上の点であり, 逆も成り立つ. ソリトン方程式との比較で言えば, 交換子方程式 (21) が Lax 方程式に, また同時固有値問題 (24) がその補助線形問題に相当する.

---

[5] 可換微分作用素対の概念の簡潔な解説が田中と伊達の本 [8] の序章と 7 章にある. また, 近年の研究や文献については Previato の解説 [13] が詳しい.

[6] 正確に言えば, λ, μ は固有値 (離散スペクトル) とは限らないので, むしろ「スペクトル問題」というように広く捉える必要がある.

固有値対 (λ,μ) に対する固有空間の次元は (λ,μ) によらず一定の値 r をとることがわかる．この値を「階数」という．これは可換微分作用素対（あるいはそれらが生成する可換微分作用素環）のもっとも基本的な不変量である．スペクトル曲線の各点にこの固有空間を載せれば階数 r の代数的ベクトル束が得られる（これが「階数」という言葉の由来である）．Q,P の微分作用素としての階数 q,p が互いに素であれば，階数は 1 である．

ここから先は階数によって状況が異なる．階数が 1 の場合には前述のベクトル束が直線束となり，取り扱いは容易になる．完備化されたスペクトル曲線 Γ の直線束の線形同値類と Jacobi 多様体 $\mathrm{Jac}(\Gamma)$ の点の間には Abel-Jacobi 写像による 1 対 1 対応があるからである．このことは可換微分作用素対に限らずさまざまな可積分系の代数幾何学的な解法の鍵でもある．ただし，この対応があるというだけでは可換微分作用素対を具体的に記述することは容易ではない．Kichever[10] の主な功績は「Baker-Akhiezer 函数」の概念を駆使することによってこの種の問題が系統的に扱えることを示した点にある．階数が 1 よりも大きい場合にはこのような便利な道具が使えず，解の具体的表示は特別な場合（Previato の解説 [13] を参照されたい）を除いてはよくわかっていない．

3.2 有限自由度 Hamilton 系との関わり

$q=2,p=2g+1$ の場合には，スペクトル曲線は超楕円曲線であり，対応する階数 1 の可換微分作用素対は KdV 方程式の代数幾何的な解を特徴づけるものとなる．KdV 方程式の代数幾何的な解については，Krichever の仕事に先立って，さまざまな研究がなされていた [14]．それは 19 世紀の「変数分離法」による有限自由度可積分系の研究を受け継ぐものでもあった（このような視点を最初に強調したのは Moser[15] である）．そこでは適当な座標（分離変数）$\lambda_1,\dots,\lambda_g,\mu_1,\dots,\mu_g$ で書かれた Hamilton 系

$$\dot{\lambda}_j=\frac{\partial H}{\partial \mu_j},\quad \dot{\mu}_j=-\frac{\partial H}{\partial \lambda_j}$$

(Hamilton 函数 H は時間 — 今の場合は x — に依存しないとする）に対して Hamilton-Jacobi 方程式

$$H\left(\lambda_1,\dots,\lambda_g,\frac{\partial S}{\partial \lambda_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial \lambda_g}\right)=E$$

の完全解を変数分離形

$$S=\sum_{j=1}^{g}S_j(\lambda_j)$$

で求める．S を母函数とする正準変換はこの Hamilton 系を作用・角変数の系に写す．代数幾何学的に見れば，$2g+1$ 次多項式 $p(\lambda)$ によって

$$\mu^2 + p(\lambda) = 0$$

という方程式で定義されるスペクトル曲線（種数 g の超楕円曲線）があって，(λ_j, μ_j) はその上の g 個の点の組すなわち次数 g の因子と解釈される．角変数は Jacobi 多様体を複素トーラス $\mathbf{C}^g/L$（L は周期格子）としてあらわすときの座標であり，分離座標と角変数の関係は Abel-Jacobi 写像に他ならない．さらに，母函数 S は

$$S = \sum_{j=1}^{g} \int^{(\lambda_j,\mu_j)} \mu d\lambda = \sum_{j=1}^{g} \int^{\lambda_j} \sqrt{-p(\lambda)} d\lambda$$

という Abel 積分の和で与えられる．

3.3 弦方程式の場合

弦方程式の場合，代数曲線との対応はこれほど単純ではない．交換子方程式 (2) はソリトン方程式の Lax 表示に相当するが，これに対応する線形問題は (24) のような同時固有値問題ではなくて

$$Q\psi = \lambda\psi, \quad P\psi = \partial_\lambda \psi \tag{25}$$

となる．実際，この線形問題からただちに

$$[Q, P]\psi = [\partial_\lambda, \lambda]\psi = \psi$$

という等式が得られるが，λ を独立変数として (25) が成立する（したがって上の等式も成立する）ことから (2) が成立しなければならないし，逆をたどることも可換微分作用素対の場合と同様にできる（あるいは KP 階層の枠組のなかで一般的に論じてもよい）．可換微分作用素対の場合から見れば，(21) のスペクトル曲線の座標がここでは「非可換化」していることになる．[7]これは興味をそそられる考え方だが，以下では別の可能性を探る．

あとで $q = 2$ の場合について具体的に示すように，一般に上の線形問題は行列型線形問題

$$\partial_x \Psi = U(\lambda)\Psi, \quad \partial_\lambda \Psi = V(\lambda)\Psi \tag{26}$$

[7]Moore[2] はこの状況をスペクトル曲線の「量子化」と捉えて，曲線が「量子的に揺らぐ」様子を描いた図を論文に挿入している．

に書き直せる．$U(\lambda), V(\lambda)$ は λ に多項式的に依存する $q \times q$ 行列である．この線形問題に付随する Lax 方程式（零曲率方程式）

$$[\partial_x - U(\lambda),\ \partial_\lambda - V(\lambda)] = 0 \tag{27}$$

からもとの弦方程式が復元される．そこで，やや唐突だが，$V(\lambda)$ の固有値方程式

$$\det(\mu I - V(\lambda)) = 0 \tag{28}$$

で定まる代数曲線をこの場合の「スペクトル曲線」として採用する．

この定義を可換微分作用素対の方程式と比較してみよう．可換微分作用素対の方程式も上と同様に行列型の Lax 方程式に書き直せることがわかるが，それは

$$[\partial_x - U(\lambda),\ V(\lambda)] = 0$$

いいかえれば

$$\partial_x V(\lambda) = [U(\lambda), V(\lambda)]$$

という形になる．これは $V(\lambda)$ のスペクトル保存変形を定める．特にその固有多項式（したがってスペクトル曲線）は x に依存しない．このことが前述の代数幾何学的解法の背後にある基本的な事実である．他方，弦方程式の場合は，行列型 Lax 方程式を

$$\partial_x V(\lambda) = [U(\lambda), V(\lambda)] + \partial_\lambda V(\lambda) \tag{29}$$

と書き直してみればわかるように，右辺第２項の存在のために $V(\lambda)$ の固有多項式（したがってスペクトル曲線）は x に依存する．この意味で代数幾何学的解法は弦方程式には通用しないことがわかる．[8] しかしながら，可換微分作用素対の場合に触れたような「スペクトル曲線上の点の組のなす有限自由度力学系」という幾何学的描像は依然として成立する．このことを $q = 2$, $q = 2g + 1$ の場合について示すのが以下の議論の目標である．

4　行列型 Lax 方程式

4.1　行列型 Lax 方程式の導出

$q = 2$ の場合，Q は $Q = \partial_x^2 + u$ という２階微分作用素だから線形問題 (25) の第１の方程式（KdV 方程式の Lax 表示に出てくるスペクトル問題に他ならない）はただちに

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - u & 0 \end{pmatrix} \Psi = U(\lambda)\Psi, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_x \end{pmatrix} \tag{30}$$

[8] 通用すれば解は本質的に Abel 函数となるはずだが，Painlevé 方程式の場合には特別な場合を除けばそれは不可能であることが知られている．

という形に書き直せる．

第２の方程式を同様の形に書き直すために，P を微分作用素の割り算によって

$$P = \partial_x Q^g + \sum_{n=1}^{g} (\alpha_n + \beta_n \partial_x) Q^{g-n} \tag{31}$$

という形にあらわしておく（α_n, β_n は x の函数）．このとき

$$P\psi = \lambda^g \psi_x + \sum_{n=1}^{g} \lambda^{g-n} (\alpha_n \psi + \beta_n \psi_x)$$

となる．そこで

$$\alpha(\lambda) = \sum_{n=1}^{g} \alpha_n \lambda^{n-g}, \quad \beta(\lambda) = \lambda^g + \sum_{n=1}^{g} \beta_n \lambda^{g-n} \tag{32}$$

という λ の多項式を導入すれば，ψ が λ について満たす微分方程式

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \alpha(\lambda)\psi + \beta(\lambda)\psi_x$$

が得られる．これを x で微分すれば

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_x}{\partial \lambda} &= (\alpha(\lambda)\psi + \beta(\lambda)\psi_x)_x \\
&= \alpha(\lambda)_x \psi + (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)_x)\psi + \beta(\lambda)\psi_{xx} \\
&= \Big(\alpha(\lambda)_x + (\lambda - u)\beta(\lambda)\Big)\psi + \Big(\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)_x\Big)\psi_x
\end{aligned}$$

を得る．ただし最後のところで

$$\psi_{xx} = (\lambda - u)\psi$$

を使った．これらをベクトル Ψ に対する微分方程式にまとめれば

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) \\ \gamma(\lambda) & \delta(\lambda) \end{pmatrix} \Psi = V(\lambda)\Psi \tag{33}$$

という形になる．ここで

$$\gamma(\lambda) = \alpha(\lambda)_x + (\lambda - u)\beta(\lambda), \quad \delta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda)_x \tag{34}$$

とおいた．以上の構成を少し丁寧に調べてみれば（詳細は省く）

$$\delta(\lambda) = -\alpha(\lambda) \tag{35}$$

となっていることがわかる．さらに $\alpha(\lambda)$ と $\gamma(\lambda)$ も $\beta(\lambda)$ によって

$$\alpha(\lambda) = -\frac{1}{2}\beta(\lambda)_x, \tag{36}$$

$$\gamma(\lambda) = -\frac{1}{4}\beta(\lambda)_{xx} + (\lambda - u)\beta(\lambda) \tag{37}$$

とあらわせることがわかる（こちらの関係式は次に示す Lax 方程式からも導出できる）．

4.2 Lax 方程式の内容

Lax 方程式を $U(\lambda), V(\lambda)$ の行列要素で具体的に書き下せば

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda)_x &= \gamma(\lambda) - (\lambda - u)\beta(\lambda), &(38)\\ \beta(\lambda)_x &= -2\alpha(\lambda), &(39)\\ \gamma(\lambda)_x &= 2(\lambda - u)\alpha(\lambda) + 1 &(40)\end{aligned}$$

という３つの方程式になる．$\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ の間の前述の関係を考慮すると，これらは結局１個の方程式

$$-\frac{1}{2}\beta(\lambda)_{xxx} - u_x\beta(\lambda) + 2(\lambda - u)\beta(\lambda)_x = 1 \tag{41}$$

にまとまる．ちなみに，右辺の定数項１（これはその前の３つの方程式の最後の式の右辺の定数項に由来する）は行列型 Lax 方程式のスペクトル保存性を破る項

$$\partial_\lambda U(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

から生じたものである．可換微分作用素対の方程式に対して同じことを行えば，

$$-\frac{1}{2}\beta(\lambda)_{xxx} - u_x\beta(\lambda) + 2(\lambda - u)\beta(\lambda)_x = 0$$

という方程式が得られる．

P がすでに述べた形

$$P = B_{2g+1} + c_1 B_{2g-1} + \cdots + c_g B_1$$

($c_1, \ldots, c_g$ は定数）で与えられていれば，B_{2n+1} を Q で展開する式 (13) を用いて計算することによって

$$\beta(\lambda) = R_g(\lambda) + c_1 R_{g-1}(\lambda) + \cdots + c_g \tag{42}$$

となることがわかる．ここで

$$R_n(\lambda) = \lambda^n + R_1\lambda^{n-1} + \cdots + R_n \tag{43}$$

とおいた．これを (42) に代入すれば，R_n の満たす漸化式 (14) によって λ の正べき項はすべて消える．残った項で成り立つ方程式はすでに示した (18) に他ならない．さらに，(18) の定数項 $+1$ を落とせば得られるものは可換微分作用素対を特徴づける方程式である，ということも以上のことからわかる．

5　スペクトル曲線と Dubrovin 方程式

5.1　スペクトル曲線の特徴

前節の 2×2 行列型 Lax 方程式に対してスペクトル曲線の方程式を求めれば，可換微分作用素対の場合に触れたものと同じ形

$$\mu^2 + p(\lambda) = 0 \tag{44}$$

になる．$p(\lambda)$ は

$$p(\lambda) = \det V(\lambda) = -\alpha(\lambda)^2 - \beta(\lambda)\gamma(\lambda) \tag{45}$$

で与えられる λ の $2g+1$ 次多項式である．

可換微分作用素対のスペクトル曲線の場合には $p(\lambda)$ は x に依存しないが，今の場合は x に依存する．実際，

$$\dot{p}(\lambda) = -2\alpha(\lambda)\dot{\alpha}(\lambda) - \dot{\beta}(\lambda)\gamma(\lambda) - \beta(\lambda)\dot{\gamma}(\lambda)$$

に対して (40) を適用すれば

$$\dot{p}(\lambda) = -\beta(\lambda) \tag{46}$$

という関係式が選られる．$\beta(\lambda)$ は

$$\beta(\lambda) = \lambda^g + \beta_1\lambda^{g-1} + \cdots + \beta_g$$

という多項式なので，$p(\lambda)$ の中で $\lambda^{2g+1}, \lambda^{2g}, \ldots, \lambda^{g+1}$ の係数は x に依らない量である．その部分を λ^g の項とまとめて $I_0(\lambda)\lambda^g$ と書くことにすれば，$p(\lambda)$ は

$$p(\lambda) = I_0(\lambda)\lambda^g + I_1\lambda^{g-1} + \cdots + I_g \tag{47}$$

とあらわせて

$$\dot{I}_0(\lambda) = -1 \tag{48}$$

および

$$\dot{I}_1 = -\beta_1,\ \ldots,\ \dot{I}_g = -\beta_g \tag{49}$$

という等式が成立する．もう少し詳しく調べれば，$I_0(\lambda)$ は

$$I_0(\lambda) = -x\lambda^g + \text{高次の項} \tag{50}$$

という形をしていて，高次の項は $c_1, \ldots, c_g$ の定数係数多項式からなる（特に x に依存しない），ということがわかる．これを可換微分作用素対の場合と比べてみれば，その場合には $I_0(\lambda), I_1, \ldots, I_g$ は定数（保存量）だが，今の場合はこれらは x に依存する量となる．

5.2 Dubrovin 方程式

$\beta(\lambda)$ の根を $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ であらわすことにする：

$$\beta(\lambda) = \prod_{j=1}^{g} (\lambda - \lambda_j). \tag{51}$$

これらが Hamilton 系を書き下すための $2g$ 個の正準座標の半分である．残りの半分についてはあとで説明することにして，ここではまず，これらの根が x について満たす微分方程式を導出する．この微分方程式の類似物は可換微分作用素対や KdV 方程式の理論の場合に「Dubrovin 方程式」として知られている．その名前を借りてこれらの方程式をここでも Dubrovin 方程式と呼ぶことにしよう．

λ_j の満たす微分方程式を求めるために，Lax 方程式を書き下したもの (40) の２番目の方程式に注目する．この方程式に上の因数分解された $\beta(\lambda)$ の表示を代入して$\lambda = \lambda_j$ と置く．このとき

$$\beta(\lambda)_x = -\frac{\beta(\lambda)}{\lambda - \lambda_j}\lambda_{j,x} \quad \stackrel{\lambda \to \lambda_j}{\longrightarrow} \quad -\beta'(\lambda_j)\lambda_{j,x}$$

となるから（プライムで

$$\beta'(\lambda) = \frac{\partial \beta(\lambda)}{\partial \lambda}$$

というように λ についての導函数をあらわす），

$$-\beta'(\lambda_j)\lambda_{j,x} = 2\alpha(\lambda_j)$$

すなわち

$$\lambda_{j,x} = \frac{2\alpha(\lambda_j)}{\beta'(\lambda_j)} \tag{52}$$

という等式が得られる．このままでは $\alpha(\lambda_j)$ というよく分からない量が含まれているので閉じた微分方程式には見えない．ところが $\beta(\lambda_j) = 0$ だから $V(\lambda_j)$ は

$$V(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \alpha(\lambda_j) & 0 \\ \gamma(\lambda_j) & -\alpha(\lambda_j) \end{pmatrix}$$

というように三角行列になっている．その行列式から

$$p(\lambda_j) = -\alpha(\lambda_j)^2$$

という等式が得られるので，$\alpha(\lambda_j)$ は平方根の符号を別にすれば

$$\alpha(\lambda_j) = \sqrt{-p(\lambda_j)}$$

という形に決まる．こうして

$$\dot{\lambda}_{j,x} = \frac{\sqrt{-p(\lambda_j)}}{\beta'(\lambda_j)} \tag{53}$$

という微分方程式が得られる．これが今の場合の Dubrovin 方程式である．これは本来の可換微分作用素対の場合の dubrovin 方程式と同じ形をしているが，今の場合は $p(\lambda)$ が x に依存する（その意味で微分方程式としては非自励系になる）という点が異なる．

平方根の符号を決めるにはスペクトル曲線の分岐点の配置やそれと λ_j の位置関係などについてもう少し精密な議論が必要である．[9]あとで Hamilton 系を議論する際には (53) ではなくて (52) の方を用いるので，平方根の分枝の問題には立ち入らない．

5.3 共役変数

Hamilton 系を書き下すために用いる残りの正準変数 μ_j は上の議論の中に既に登場している．それは $V(\lambda_j)$ の対角要素である．ここではその左上の要素を用いて

$$\mu_j = \alpha(\lambda_j) \tag{54}$$

と決めることにする．定義から明らかなように，(λ_j, μ_j) はスペクトル曲線上の点である．つまり

$$\mu_j^2 + p(\alpha_j) = 0 \tag{55}$$

という等式が成立する．こうしてスペクトル曲線上の g 個の点の組が決まった．このままではこれらの変数は独立ではないように見えるが，それは弦方程式の特定の解を考えている（対応する有限自由度力学系の点は相空間内の解軌道をたどる）から当然のことである．これから行うのはこのスペクトル曲線の方程式による束縛を消去して λ_j, μ_j の満たすべき Hamilton の運動方程式を導出することである．

6 Hamilton 系としての表示

6.1 主結果とその解説

まず結果を先に述べる．

---

[9] 可換微分作用素対の場合にはスペクトル曲線は一定だが，今の場合にはスペクトル曲線自体が x に依存して変化するので状況は複雑である．

定理　$(2,2g+1)$ 型弦方程式は非自励 Hamilton 系

$$\dot{\lambda}_j = \frac{\partial H}{\partial \mu_j}, \quad \dot{\mu}_j = -\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \tag{56}$$

に同値である．ここで Hamilton 函数 H は

$$H = \sum_{j=1}^{g} \frac{\mu_j^2 + I_0(\lambda_j)\lambda_j^g}{\beta'(\lambda_j)} \tag{57}$$

で与えられる（これは $I_0(\lambda)$ を通じて x に依存する函数である）．

補足１　H と $P(\lambda)$ の係数の間には

$$H = -I_1 \tag{58}$$

という関係がある．他の係数 I_n も λ_j, μ_j によって

$$I_n = \sum_{j=1}^{g} \frac{\mu_j^2 + I_0(\lambda_j)\lambda_j}{\beta'(\lambda_j)} \frac{\partial \beta_n}{\partial \lambda_j} \tag{59}$$

とあらわせる（β_n は $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ たちの基本対称式であることに注意）．この表示は λ_j, μ_j が満たす等式

$$\mu_j^2 + p(\lambda_j) = \mu_j^2 + I_0(\lambda_j)\lambda_j^g + \sum_{n=1}^{g} I_n \lambda_j^{g-n} = 0 \quad (j = 1, \ldots, g) \tag{60}$$

を I_n についての連立線形方程式とみなして解くこと（Lagrange の補間公式の応用）によって得られる．

補足２　$(2,2g+1)$ 型可換微分作用素対の場合にも同じ形の Hamilton 系が得られる．違いは，$I_0(\lambda), I_1, \ldots, I_g$ が x に依らない定数であることにある．I_n は高次 KdV 方程式の時間発展と関係がある．

補足３　定理が「同値である」と主張するからには，Hamilton 系から弦方程式が復元できなければならないが，復元の仕方についてはあとで触れる．実際には，交換子方程式よりもむしろ行列型 Lax 方程式との同値性を示すことになる．

6.2 Hamilton 系の導出

弦方程式から前述の Hamilton 系が従うことを示す．Hamilton 函数 H の形から λ_j に対する運動方程式は

$$\dot{\lambda}_j = \frac{\partial H}{\partial \mu_j} = \frac{2\mu_j}{\beta'(\lambda_j)}$$

となるが，これは Dubrovin 方程式の導出の際に得た方程式 (52) に他ならない．あとは μ_j の運動方程式が満たされていることを確かめればよい．これを直接計算によって示すこともできなくはないが，それは長くて効率の悪い計算になる．λ_j, μ_j が満たす代数的関係式 (60) を利用すれば次のように比較的効率よく確かめられる．

要は λ_j に関する $H = -I_1$ の導函数の計算である．H の定義式 (57) および $I_2, \ldots, I_g$ の表示式 (59) は (60) を $I_1, \ldots, I_n$ について解いて得られたものだから，これらの定義式・表示式をあらためて (60) に代入したものは恒等式（λ_j, μ_j の任意の値に対して成立する）になる．この恒等式で j を k に置き換えたもの

$$\mu_k^2 + p(\lambda_k) = 0$$

を λ_j で微分すると

$$\sum_{n=1}^{g} \frac{\partial I_n}{\partial \lambda_j} \lambda_k^{g-n} + p'(\lambda_k)\delta_{jk} = 0$$

となる．これを $\partial I_n / \partial \lambda_j$ についての連立線形方程式とみなして Lagrange 補間公式の方法で解けば

$$\frac{\partial I_n}{\partial \lambda_j} = \sum_{k=1}^{g} \frac{p'(\lambda_k)\delta_{jk}}{\beta'(\lambda_j)} \frac{\partial \beta_n}{\partial \lambda_k} = \frac{p'(\lambda_j)}{\beta'(\lambda_j)} \frac{\partial \beta_n}{\partial \lambda_j}$$

を得る．特に H の μ_j についての導函数は

$$\frac{\partial H}{\partial \mu_j} = -\frac{p'(\lambda_j)}{\beta'(\lambda_j)}$$

というようにあらわせる．

他方，改めて，λ_j, μ_j が Lax 方程式から導かれた x の函数であると考えて，それが満たす等式

$$\mu_j^2 + p(\lambda_j) = 0$$

を x について微分すれば

$$2\mu_j\dot{\mu}_j + p'(\lambda_j)\dot{\lambda}_j + \dot{p}(\lambda_j) = 0$$

となる．$\dot{p}(\lambda_j)$ は $\dot{p}(\lambda)$ で $\lambda = \lambda_j$ とおいたものを意味する．ところで $\dot{p}(\lambda)$ については等式 (46) が成立するので

$$\dot{p}(\lambda_j) = 0$$

したがって

$$\dot{\mu}_j = -\frac{p'(\lambda_j)}{2\mu_j}\dot{\lambda}_j$$

となることがわかる．ここに λ_j の運動方程式を代入すれば

$$\dot{\mu}_j = -\frac{p'(\lambda_j)}{2\mu_j}\frac{2\mu_j}{\beta'(\lambda_j)} = -\frac{p'(\lambda_j)}{\beta'(\lambda_j)}$$

を得る．

以上二つの計算結果を見比べれば μ_j に対する Hamilton の運動方程式

$$\dot{\mu}_j = -\frac{\partial H}{\partial \mu_j}$$

が成立していることがわかる．

6.3 Lax 方程式の復元

λ_j, μ_j の Hamilton 運動方程式が成立しているとして，逆にそこから行列型 Lax 方程式が復元できることを説明しよう．細かく議論すると長くなるので，ここでは大筋のみ示す．

Lax 方程式を復元するには同時に行列要素 $\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ を復元しなければならない．まず，λ_j の定義式 (51) を逆に $\beta(\lambda)$ の定義式として読み替えて $\beta(\lambda)$ を復元する．$\alpha(\lambda)$ を復元するには，μ_j の定義式

$$\mu_j = \alpha(\lambda_j)$$

を $\alpha(\lambda)$（$g-1$ 次の多項式である）の係数に対する連立線形方程式とみなして解けばよい（ここでも Lagrange の補間公式の方法を用いる）．$\gamma(\lambda)$ は $p(\lambda)$ の定義式を書き換えたもの

$$\gamma(\lambda) = -\frac{p(\lambda) + \alpha(\lambda)^2}{\beta(\lambda)} \tag{61}$$

で定める．ただしそのためには $p(\lambda)$ が復元されていなければならないが，それには (60) を $I_1, \ldots, I_n$ の連立線形方程式とみなして解けばよい．($I_0(\lambda)$ は Hamilton 函数の構成要素としてあらかじめ与えられていることに注意)．このようにして $V(\lambda)$ の行列要素がすべて復元できる．

次に，このようにして復元された $V(\lambda)$ の行列要素に対して (40) が満たされていることを示す（未定の函数 u を決めることもここには含まれている）．これは要するに，λ_j, μ_j に対する Hamilton の運動方程式を λ の多項式 $\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ に翻訳して行く作業である．

1) λ_j の運動方程式

$$\dot{\lambda}_j = \frac{\partial H}{\partial \mu_j} = \frac{2\mu_j}{\beta'(\lambda_j)}$$

を考える．λ_j の満たす恒等式 $\beta(\lambda_j) = 0$ を x で微分すれば

$$\beta'(\lambda_j)\dot{\lambda}_j + \dot{\beta}(\lambda_j) = 0$$

となる．これらの等式から $\dot{\lambda}_j$ を消去し，$z_j = \alpha(\lambda_j)$ を代入すれば

$$\dot{\beta}(\lambda_j) + 2\alpha(\lambda_j) = 0$$

という等式が得られる．$\dot{\beta}(\lambda) + 2\alpha(\lambda)$ は $g-1$ 次の多項式であるが，それに対して g 個の点 $\lambda = \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, g)$ でこれらの等式が成立するのはこの多項式が恒等的にゼロの場合だけである．こうして

$$\dot{\beta}(\lambda) + 2\alpha(\lambda) = 0$$

という等式が得られるが，これは (40) の第二の方程式に他ならない．

2) 同様の議論で μ_j に対する Hamilton の運動方程式から (46) が導かれる．

3) λ_j, μ_j の間に成立する等式

$$\mu_j = \alpha(\lambda_j)$$

を x で微分して上と同様の（もう少し複雑な）議論を展開することによって (40) の第一の方程式が導出できる．

4) 最後に，$\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)$ と $p(\lambda)$ の間の代数的関係式と既に導出できた微分方程式を組み合わせることによって，(40) の第三の方程式が導出できる．

7 まとめ

弦方程式 (2) と可換微分作用素対の方程式 (21) は形が似ているということ以上の類似性がある．本稿ではそれに基づいて $(2, 2g+1)$ 型の場合の行列型 Lax 表示，スペクトル曲線，Hamilton 系への書き換えなどを議論した．$(2, 2g+1)$ 型の特殊性を反映して，Hamilton 系への書き換えは技術的にさほど困難なく実行することができた．結果として得られた Hamilton 系は可換微分作用素対の場合とほとんど同じ形をしている．

弦方程式と両立する高次 KdV 方程式も Hamilton 系に書き直すことができる．これに相当することは可換微分作用素対の方程式の場合には昔から知られていて，$p(\lambda)$ の $H = -I_1$ 以外の係数 I_n が高次時間発展の Hamilton 函数になる．弦方程式の場合はもう少し複雑で，I_n に補正項を付け加えたものが高次時間発展の Hamilton 函数を与えることがわかる．この結果については別の機会に譲る．

ここで紹介した結果を $q > 2$ の場合に拡張することが今後の課題である．行列型 Lax 対を構成してスペクトル曲線を定義することには困難はないが，スペクトル曲線は Riemann 球面の q 重被覆面となって，もはや超楕円曲線ではない．それ以上に厄介なのは，λ_j, μ_j の構成法が複雑化することである．λ_j, μ_j の構成法自体は今ではよくわかっていて，たとえば Adams, Harnad, Hurtubise [16] が可積分系の変数分離法に関する Moser の仕事を拡張する形で示した処方箋に習えばよいはずだが，具体的に調べようとするとかなり複雑である．また，Hamilton 系を導出する際にも Dubrovin 方程式（の類似）を仲介にするという手軽な方法はもやは使えず，もっと系統的な接近法が必要になる．さらに，モノドロミー保存変形の場合には Hamilton 函数が時間変数に依存することに伴って余分の議論が必要になる．

参考文献

[1] M. Douglas, Strings in less than one-dimension and the generalized K-dV hierarchies, Phys. Lett. **238B** (1990), 176–180.

[2] G. Moore, Geometry of the string equations, Commun. Math. Phys. **133** (1990), 261–304; Matrix models of 2D gravity and isomonodromic deformations, Prog. Theor. Phys. Suppl. **102** (1990), 255–285.

[3] M. Fukuma, H. Kawai and R. Nakayama, Infinite dimensional Grassmannian structure of two dimensional string theory, Commun. Math. Phys. **143** (1991), 371–403.

[4] V. Kac and A. Schwarz, Geometric interpretation of partition functions of 2D gravity, Phys. Lett. **B257** (1991), 329–334.

[5] A. Schwarz, On solutions to the string equations, Mod. Phys. Lett. **A29** (1991), 2713–2725.

[6] M. Adler and P. van Moerbeke, A matrix integral solution to two-dimensional W_p-gravity, Commun. Math. Phys. **147** (1992), 25–56.

[7] P. van Moerbeke, Integrable foundations of string theory, in *Lectures on integrable systems*, pp. 163–267 (World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994).

[8] 田中俊一・伊達悦朗，KdV 方程式，紀伊国屋書店 1979 年.

[9] J.L. Burchnall and T.W. Chaundy, Commutative ordinary differential operators, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **21** (1922), 420–440.

[10] I.M. Krichever, Commutative rings of ordinary linear differential operators, Functional Anal. Appl. **12** (1978), 175–185; Methods of algebraic geometry in the theory of nonlinear equations, Russian Math. Surv. **32:6** (1977), 185–214.

[11] M. Mulase, Complete integrability of the Kadomtsev-Petviashvili equation, Adv. Math. 54 (1984), 57–66; Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties, J. Diff. Geom. 19 (1984), 403–430.

[12] T. Shiota, Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Inv. Math. **83** (1986), 333–382.

[13] E. Previato, Seventy years of spectral curves: 1923–1993, in *Integrable Systems and Quantum Groups*, Lecture Notes in Math. vol. 1620, pp. 419–481 (Springer-Verlag, 1996).

[14] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev and S.P. Novikov, Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators and Abelian varieties, Russian Math. Surv. **31:1** (1976), 59–146.

[15] J. Moser, Geometry of quadrics and spectral theory, in: W.-Y. Hsiang et al. (eds.), *The Chern Symposium 1979*, pp. 147–188 (Springer-Verlag, 1980).

[16] M.R. Adams, J. Harnad and J. Hurtubise, Darboux coordinates and Liouville-Arnold integration in loop algebras, Commun. Math. Phys. **155** (1993), 385–413.