

直角ノルムを用いた多目的配置問題の有効解

金 正道 Masamichi KON

弘前大学 理工学部 Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

概要 \mathbb{R}^n における直角ノルムを用いた多目的配置問題を考える。その問題の有効解の特徴付けを与え、すべての有効解を求めるアルゴリズムを提案する。

1. はじめに \mathbb{R}^n において需要点が与えられたとき、新たに単一の施設を配置する位置を決める問題は単一施設配置問題とよばれる。この問題は通常、施設と需要点の間の距離を含む関数の最小化問題として定式化される。需要点 $\mathbf{d}_i \equiv (d_i^1, d_i^2, \dots, d_i^n)^T \in \mathbb{R}^n, i \in M \equiv \{1, 2, \dots, m\}$ と \mathbb{R}^n 上定義された直角ノルム $\|\cdot\|_1$ が与えられていると仮定する。 $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n$ を配置する施設の位置を表す変数とし、 $D \equiv \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \dots, \mathbf{d}_m\}$ とする。一般性を失うことなく、各 $j \in J \equiv \{1, 2, \dots, n\}$ と任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して $D \not\subset \{(x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n : x^j = x_0\}$ であると仮定する。もし、この仮定が満たされなければここで考える問題は n より低い次元の問題に帰着できる。多目的配置問題は次のように定式化される。

$$(P) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \equiv (\|\mathbf{x} - \mathbf{d}_1\|_1, \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_2\|_1, \dots, \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_m\|_1)^T$$

(P) は有効解を求める問題である。 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ かつ $f(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}_0)$ となる $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が存在しないとき \mathbf{x}_0 を (P) の**有効解**という。集合 $E(D)$ を (P) のすべての有効解の集合とする。上の定義より $D \subset E(D)$ となることがわかる。多目的配置問題の有効解を特徴付けるために次の minisum 型配置問題も考える。

$$(P_\lambda) \quad \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^m \lambda^i \|\mathbf{x} - \mathbf{d}_i\|_1$$

ここで λ^i は各 $\mathbf{d}_i, i \in M$ に付随する正の重みである。 $\lambda \equiv (\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^m)^T$ とし、 (P_λ) のすべての最適解の集合を $S^*(\lambda)$ で定義する。

\mathbb{R}^2 および \mathbb{R}^3 における (P) のすべての有効解の集合はそれぞれ [1] および [6] におけるアルゴリズムを用いて求めることができる。 (P_λ) は [2] におけるアルゴリズムを用いて解くことができる。本稿では、 \mathbb{R}^n における直角ノルムを用いた (P) および (P_λ) を考え、 $E(D)$ を求めるためのアルゴリズムを提案する。

第 2 節では、 (P_λ) の最適解のいくつかの性質を与える。第 3 節では、 (P_λ) の最適解を用いて (P) の有効解のいくつかの性質を与える。第 4 節では、 $E(D)$ を求めるフレーム生成アルゴリズムを提案する。最後に、第 5 節において結論を述べる。

2. (P_λ) の最適性 本節では、 (P_λ) の最適解のいくつかの性質を与える。

次の定理は (P) の有効解と (P_λ) の最適解の関係を与える。

定理 1 ([8] 参照) $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ が (P) の有効解であるための必要十分条件は \mathbf{x}_0 がある $\lambda > \mathbf{0}$ に対する (P_λ) の最適解になることである。

定理 1 より $E(D)$ は次のように表すことができる。

$$(1) \quad E(D) = \{\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}^* \in S^*(\lambda) \text{ for some } \lambda > \mathbf{0}\}$$

よって、以下では (P_λ) の最適解の性質を調べる。

(P_λ) の目的関数 g は

$$g(x) = \sum_{i=1}^m \lambda^i \|x - d_i\|_1 = \sum_{i=1}^m \lambda^i \sum_{j=1}^n |x^j - d_i^j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \lambda^i |x^j - d_i^j|$$

と書き直せるので (P_λ) は n 個の独立な 1 次元の問題に帰着される。すなわち、 $x^* \equiv (x^{1*}, x^{2*}, \dots, x^{n*})^T \in S^*(\lambda)$ であるための必要十分条件は各 $x^{j*}, j \in J$ が次の 1 次元の問題の最適解となることである。

$$(P_j) \quad \min_{x \in \mathbb{R}} g_j(x) \equiv \sum_{i=1}^m \lambda^i |x - d_i^j|$$

これらの 1 次元の問題は [2] におけるアルゴリズムを用いて解くことができる。各 $j \in J$ に対して λ に対する (P_j) のすべての最適解の集合を $S_j^*(\lambda)$ で定義する。以下、 (P_1) を考える。他の $(P_j), j \in \{2, 3, \dots, n\}$ に関しても (P_1) と同様の結果が得られる。

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を凸関数とする。その左側微分、右側微分および劣微分をそれぞれ $\frac{df(x)}{dx^-}, \frac{df(x)}{dx^+}$ および $\partial f(x)$ で定義する。すなわち

$$\frac{df(x)}{dx^-} = \lim_{\alpha \uparrow 0} \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}, \quad \frac{df(x)}{dx^+} = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}$$

および

$$\partial f(x) = \left[\frac{df(x)}{dx^-}, \frac{df(x)}{dx^+} \right] \equiv \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{df(x)}{dx^-} \leq y \leq \frac{df(x)}{dx^+} \right\}$$

である。 $x_0 \in \mathbb{R}$ において f が最小となるための必要十分条件は $0 \in \partial f(x_0)$ となることである (例えば、[4] 参照)。

$x \in \mathbb{R}$ に対して $L(x) \equiv \{i \in M : d_i^1 < x\}, R(x) \equiv \{i \in M : d_i^1 > x\}$ および $I(x) \equiv \{i \in M : d_i^1 = x\}$ とする。 (P_1) の目的関数 g_1 は区分的線形凸関数となり、それは各 $d_k^1, k \in M$ においてのみ微分不可能であり

$$\left. \frac{dg_1(x)}{dx^-} \right|_{x=d_k^1} = \sum_{i \in L(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i, \quad \left. \frac{dg_1(x)}{dx^+} \right|_{x=d_k^1} = \sum_{i \in L(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1)} \lambda^i$$

および

$$(2) \quad \partial g_1(d_k^1) = \left[\sum_{i \in L(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i, \sum_{i \in L(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1)} \lambda^i \right]$$

を得る。(2) より $d_k^1 \in S_1^*(\lambda)$ となるための必要十分条件は

$$(3) \quad \begin{cases} \left. \frac{dg_1(x)}{dx^-} \right|_{x=d_k^1} = \sum_{i \in L(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i \leq 0 \\ \left. \frac{dg_1(x)}{dx^+} \right|_{x=d_k^1} = \sum_{i \in L(d_k^1) \cup I(d_k^1)} \lambda^i - \sum_{i \in R(d_k^1)} \lambda^i \geq 0 \end{cases}$$

となることである。 $d_{\min} \equiv \min\{d_i^1 : i \in M\}$ とし $d_{\max} \equiv \max\{d_i^1 : i \in M\}$ とする。

補題 1 ([6]) 任意に固定された $\lambda > 0$ に対して $S_1^*(\lambda) \subset [d_{\min}, d_{\max}]$ となる。

3. 有効解の性質 本節では、 (P_λ) の最適解を用いて (P) の有効解のいくつかの性質を与える。

$x_0 \equiv (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^T \in \mathbb{R}^n$ に対して $x_0^j \in \{d_i^j : i \in M\}, j \in J$ であるとき x_0 を交点とよぶ。すべての交点の集合を I で定義し

$$d_{\min}^j \equiv \min\{d_i^j : i \in M\}, d_{\max}^j \equiv \max\{d_i^j : i \in M\}, j \in J$$

とおく。このとき

$$B \equiv \{(x^1, x^2, \dots, x^n)^T \in \mathbb{R}^n : d_{\min}^j \leq x^j \leq d_{\max}^j, j \in J\}$$

を交点ボックスとよぶ (図1)。定理1と補題1より $E(D) \subset B$ となる。

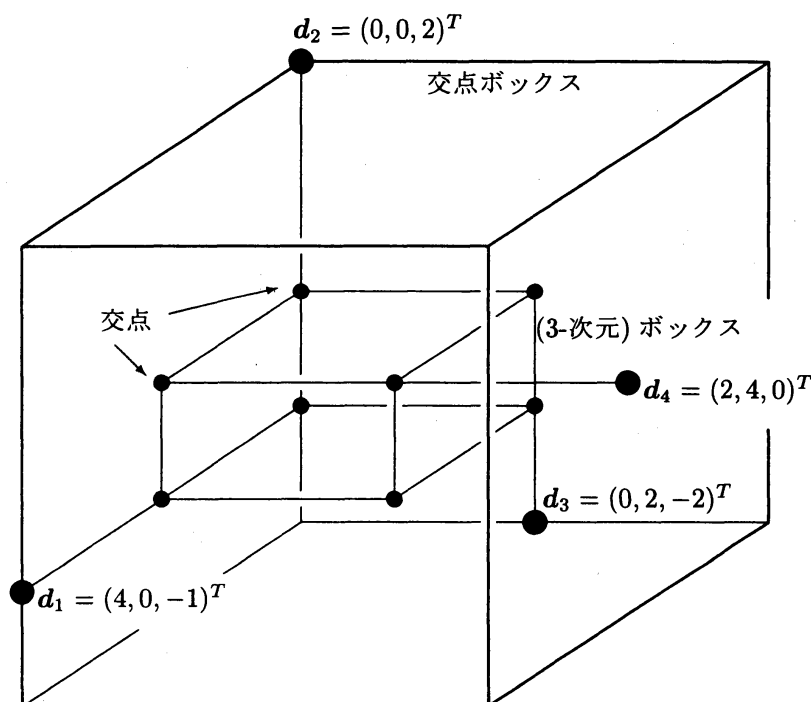


図1 交点, 交点ボックス, ボックス

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を \mathbb{R}^n の標準基底とする。すなわち、各 $e_j, j \in J$ は第 j 成分が 1 で他の成分は 0 である。 $x_k \equiv (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)^T$ と $x_h \equiv (x_h^1, x_h^2, \dots, x_h^n)^T$ を交点とする。各 $j \in J$ に対して $x_k^j > x_h^j$ (resp. $x_k^j < x_h^j$), $x_k^{j'} = x_h^{j'}, j' \neq j$ かつ $x_h^j < x_s^j < x_k^j$ (resp. $x_k^j < x_s^j < x_h^j$) となる $x_s \equiv (x_s^1, x_s^2, \dots, x_s^n)^T \in I$ が存在しないとき x_k を x_h の e_j -方向隣接交点 (resp. $-e_j$ -方向隣接交点) という。

各 $j \in J$ に対して $d_{[1]}^j, d_{[2]}^j, \dots, d_{[m_j]}^j$ を $d_1^j, d_2^j, \dots, d_m^j$ の中のすべての異なる実数で $d_{[1]}^j < d_{[2]}^j < \dots < d_{[m_j]}^j$ であるとし、

$$F_{2k-1}^j \equiv \{d_{[k]}^j\}, k = 1, 2, \dots, m_j$$

とし

$$F_{2k}^j \equiv [d_{[k]}^j, d_{[k+1]}^j], k = 1, 2, \dots, m_j - 1$$

とする。 $k_j \in \{1, 2, \dots, 2m_j - 1\}, j \in J$ に対して $F_{k_1}^1 \times F_{k_2}^2 \times \dots \times F_{k_n}^n$ をボックスとよぶ。さらに、もし k_1, k_2, \dots, k_n のなかで k 個が偶数のとき $F_{k_1}^1 \times F_{k_2}^2 \times \dots \times F_{k_n}^n$ を k -次元ボックスとよぶ (図1)。

$\lambda > 0$ を任意に固定するとある $k_j \in \{1, 2, \dots, 2m_j - 1\}, j \in J$ に対して $S^*(\lambda) = F_{k_1}^1 \times F_{k_2}^2 \times \dots \times F_{k_n}^n$ となる。ゆえに、 $E(D)$ はいくつかのボックスの和集合となる。 $E(D)$ に含まれるすべての1次元ボッ

クスの和集合を $E(D)$ のフレームとよぶ。

定理 2 ([11]) $h_1(w)$ と $h_2(w)$ を \mathbb{R} 上定義された凸関数とし、各 $i = 1, 2$ に対して h_i は w_i において最小となり $w_1 < w_2$ とする。このとき、与えられた任意の $\bar{w} \in [w_1, w_2]$ に対してある $\theta \in [0, 1]$ が存在して \bar{w} において $\theta h_2(w) + (1 - \theta)h_1(w)$ が最小となる。

系 1 ([7]) $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)^T, \mathbf{x}_2 \equiv (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)^T \in B$ とする。ある $j_0 \in J$ に対して $x_1^{j_0} \neq x_2^{j_0}$ であり、 $x_1^j = x_2^j, j \neq j_0$ と仮定する。 $\mathbf{x}^* \equiv \alpha \mathbf{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{x}_2, \alpha \in (0, 1) \equiv \{y \in \mathbb{R}: 0 < y < 1\}$ とおく。もし $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in E(D)$ ならば $\mathbf{x}^* \in E(D)$ となる。

系 1 より、もしあるボックスのすべての端点が (P) の有効解ならばそのボックスの任意の点は (P) の有効解となる。

定理 3 ([6]) $h_1(w)$ と $h_2(w)$ を \mathbb{R} 上定義された凸関数とし、各 $i = 1, 2$ に対して h_i は w_i において最小となり $w_1 \leq w_2$ とする。このとき、与えられた任意の $\bar{w} \in [w_1, w_2]$ に対して

$$\{\theta \in [0, 1] : \bar{w} \text{ minimizes } \theta h_2(w) + (1 - \theta)h_1(w)\}$$

は閉区間となる。

系 2 ([7]) $\mathbf{x}_h \equiv (x_h^1, x_h^2, \dots, x_h^n)^T, \mathbf{x}_k \equiv (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n)^T \in E(D) \cap I$ に対して $J_0 \equiv \{j \in J : x_h^j \neq x_k^j\} \neq \emptyset$ と仮定する。各 $j \in J_0$ に対してもし $x_h^j > x_k^j$ (resp. $x_h^j < x_k^j$) ならば $\mathbf{y}_j \equiv (y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^n)^T$ を \mathbf{x}_k の \mathbf{e}_j -方向隣接交点 (resp. $-\mathbf{e}_j$ -方向隣接交点) とする。このとき、ある $j_0 \in J_0$ が存在して $\mathbf{y}_{j_0} \in E(D)$ となる。

系 1 と 2 より $E(D)$ は連結であり、(P) の任意の 2 つの有効解の間には“ジグザグパス”が存在する。もし、 $E(D)$ のフレームが求まれば $E(D)$ が構成できる。次節では、 $E(D)$ のフレームを求めるアルゴリズムを与える。

4. すべての有効解を求めるアルゴリズム 本節では、 $E(D)$ を求めるフレーム生成アルゴリズムを提案する。

フレーム生成アルゴリズムにおいて、交点が (P) の有効解であるかどうかを調べる必要がある。そのため、以下でどのように調べるかを述べる。

$\mathbf{x}_0 \equiv (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)^T$ を交点とする。定理 1 より、 $\mathbf{x}_0 \in E(D)$ となるための必要十分条件はある $\lambda > \mathbf{0}$ に対して $\mathbf{x}_0 \in S^*(\lambda)$ となることである。(3) より、 $\lambda > \mathbf{0}$ に対して $\mathbf{x}_0 \in S^*(\lambda)$ となるための必要十分条件は

$$(4) \quad \begin{cases} \left. \frac{dg_j(x)}{dx^-} \right|_{x=x_0^j} = \sum_{i \in L_j(x_0^j)} \lambda^i - \sum_{i \in R_j(x_0^j) \cup I_j(x_0^j)} \lambda^i \leq 0, j \in J \\ \left. \frac{dg_j(x)}{dx^+} \right|_{x=x_0^j} = \sum_{i \in L_j(x_0^j) \cup I_j(x_0^j)} \lambda^i - \sum_{i \in R_j(x_0^j)} \lambda^i \geq 0, j \in J \end{cases}$$

となることである。ここで、各 $j \in J$ に対して $L_j(x_0^j) \equiv \{i \in M : d_i^j < x_0^j\}, R_j(x_0^j) \equiv \{i \in M : d_i^j > x_0^j\}, I_j(x_0^j) \equiv \{i \in M : d_i^j = x_0^j\}$ である。ゆえに、 $\mathbf{x}_0 \in E(D)$ となるための必要十分条件は (4) をみたく $\lambda > \mathbf{0}$ が存在することである。各 $i \in M, j \in J$ に対して

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{if } i \in L_j(x_0^j) \\ +1 & \text{if } i \in R_j(x_0^j) \cup I_j(x_0^j) \end{cases}$$

$$a_{i, n+j} = \begin{cases} -1 & \text{if } i \in R_j(x_0^j) \\ +1 & \text{if } i \in L_j(x_0^j) \cup I_j(x_0^j) \end{cases}$$

とし $A = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{2n \times m}$ とすると (4) は $A\lambda \geq 0$ と表すことができる。言い換えると、 $x_0 \in E(D)$ となるための必要十分条件は $A\lambda \geq 0, \lambda > 0$ が解 λ をもつことである。後者の条件がみたされるかどうかを調べるために次の定理を適用できる。

定理4 ([10]) A を与えられた行列とするとき

I $IA^T\mu \leq 0, A^T\mu \neq 0, \mu \geq 0$ には解 μ がある。

または

II $A\lambda \geq 0, \lambda > 0$ には解 λ がある。

しかし、同時に成立することはない。

定理4より、 $A\lambda \geq 0, \lambda > 0$ が解 λ をもつための必要十分条件は x_0 に関する線形計画問題

$$(LP) \quad \begin{cases} \min & \sum_{i=1}^m a_i^T \mu \\ \text{subject to} & A^T \mu \leq 0 \\ & \mu \geq 0 \end{cases}$$

の最適値が0となることである。ここで a_i は A の第 i 列ベクトルである。よって、交点 x_0 が (P) の有効解であるかどうかは (LP) を解くことによって調べることができ、次の定理を得る。

定理5 $x_0 \in I$ に対して、 $x_0 \in E(D)$ となるための必要十分条件は x_0 に関する (LP) の最適値が0となることである。

$E(D)$ のフレームは $E(D)$ に含まれるすべての1次元ボックスの和集合であり、それは連結であるのでそれを連結グラフ (V, E) とみなすことができる。ここで $V = I \cap E(D)$ であり E はそのグラフのすべての辺の集合である。 $x_1, x_2 \in I \cap E(D)$ が与えられたとき、 x_1 と x_2 を連結する辺 $a(x_1, x_2)$ が E に含まれるための必要十分条件は x_1 と x_2 が隣接している (P) の有効解となることとする。 $E(D)$ のフレームを求めるアルゴリズムはこの考え方を基に構成される。

フレーム生成アルゴリズムにおいてすべての交点の集合 I は

$$I = \{(d_{[k_1]}^1, d_{[k_2]}^2, \dots, d_{[k_n]}^n)^T \in \mathbb{R}^n : k_j \in \{1, 2, \dots, m_j\}, j \in J\}$$

と表されている。フレーム生成アルゴリズムは任意の需要点を初期点として交点を辿って連結されている $E(D)$ に含まれる1次元ボックスを求める。 L は初期点と交点を辿って連結されていることが判定された交点の集合である。 $S \subset L$ は交点の集合でそれらの交点に連結している1次元ボックスが $E(D)$ に含まれるかどうかを既に判定されたものである。 $G, H \subset I$ はそれぞれ (P) の有効解であると判定された交点の集合と (P) の有効解ではないと判定された交点の集合である。 T を $E(D)$ に含まれると既に判定された1次元ボックスの和集合とする。さらに、 $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $[x, y] \equiv \{(1-\lambda)x + \lambda y : \lambda \in [0, 1]\}$ とする。

フレーム生成アルゴリズム

ステップ0 $S = \emptyset, H = \emptyset, G = D, T = \emptyset$ とする。任意に $d_k \in D$ を選び、 $L = \{d_k\}$ とする。

ステップ1 もし $L = S$ ならば終了。(T が $E(D)$ のフレームである。)

ステップ2 任意に $x_0 = (d_{[k_1]}^1, d_{[k_2]}^2, \dots, d_{[k_n]}^n)^T \in L \setminus S$ を選び、 $S = S \cup \{x_0\}$ とする。

ステップ3 $W = \emptyset$ とする。各 $j \in J$ に対して

- (a) もし $k_j > 1$ ならば $x_{-j} = (d_{[k_1]}^1, \dots, d_{[k_j-1]}^j, \dots, d_{[k_n]}^n)^T$ とし $W = W \cup \{x_{-j}\}$ とする。
 (b) もし $k_j < m_j$ ならば $x_j = (d_{[k_1]}^1, \dots, d_{[k_j+1]}^j, \dots, d_{[k_n]}^n)^T$ とし $W = W \cup \{x_j\}$ とする。

ステップ4 もし $W = \emptyset$ ならばステップ1へ。そうでなかったら、任意に $x_\eta \in W$ を選び、 $W = W \setminus \{x_\eta\}$ とする。

ステップ5 もし $[x_0, x_\eta] \subset T$ ならばステップ4へ。

- (a) もし $x_\eta \in G$ ならば $T = T \cup [x_0, x_\eta]$ とし、 $x_\eta \notin L$ ならば $L = L \cup \{x_\eta\}$ としステップ4へ。
 (b) もし $x_\eta \notin H$ ならば x_η に関する (LP) を解くことによって $x_\eta \in E(D)$ であるかどうかを調べる。もし $x_\eta \in E(D)$ ならば $T = T \cup [x_0, x_\eta]$, $G = G \cup \{x_\eta\}$, $L = L \cup \{x_\eta\}$ としステップ4へ。
 (c) もし $x_\eta \in H$ または $x_\eta \notin H \cup E(D)$ ならば $j = |\eta|$ として

$$H = \begin{cases} H \cup \{(d_{[k_1]}^1, \dots, d_{[p]}^j, \dots, d_{[k_n]}^n)^T : p = 1, 2, \dots, k_j - 1\} & \text{if } \eta < 0 \\ H \cup \{(d_{[k_1]}^1, \dots, d_{[p]}^j, \dots, d_{[k_n]}^n)^T : p = k_j + 1, \dots, m_j\} & \text{if } \eta > 0 \end{cases}$$

としステップ4へ。

数値例

次の多目的配置問題 (P) を考える。

$$\min_{x \in \mathbb{R}^4} (\|x - d_1\|_1, \|x - d_2\|_1, \|x - d_3\|_1, \|x - d_4\|_1, \|x - d_5\|_1)^T$$

ここで $d_1 = (3, 0, 4, 1)^T$, $d_2 = (4, 2, 0, 2)^T$, $d_3 = (2, 1, 3, 3)^T$, $d_4 = (0, 4, 5, 4)^T$, $d_5 = (1, 5, 2, 5)^T$ である。いまの場合、 $n = 4$, $m = 5$, $J = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ である。この問題にフレーム生成アルゴリズムを適用すると図2-10に示されているような $E(D)$ のフレームが得られる。

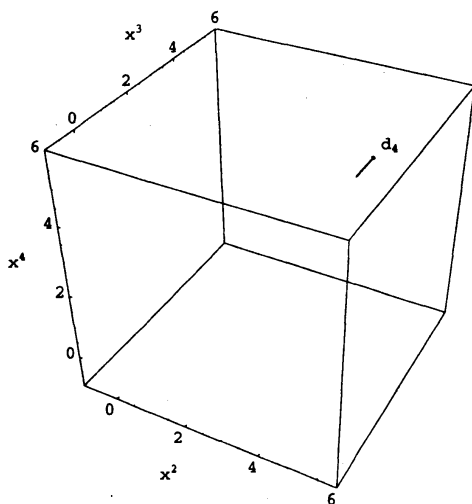


図2 $E(D)$ のフレーム ($x^1 = 0$)

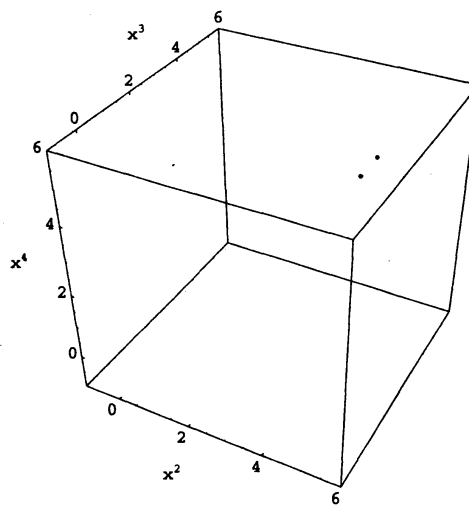


図3 $E(D)$ のフレーム ($0 < x^1 < 1$)

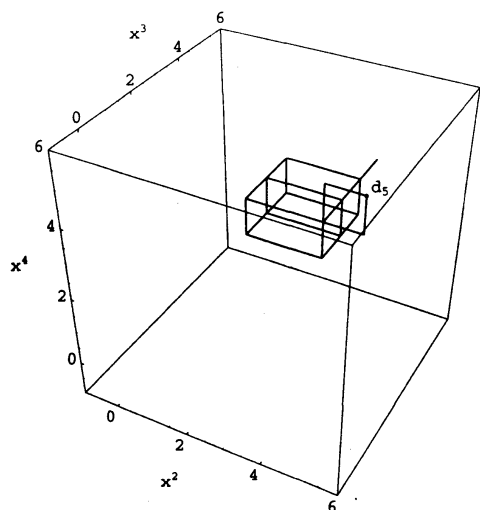


図4 $E(D)$ のフレーム ($x^1 = 1$)

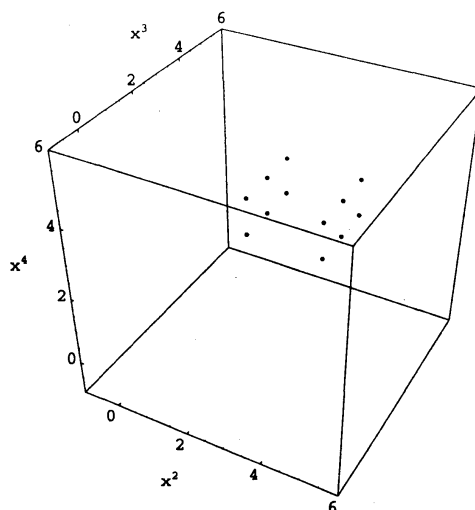


図5 $E(D)$ のフレーム ($1 < x^1 < 2$)

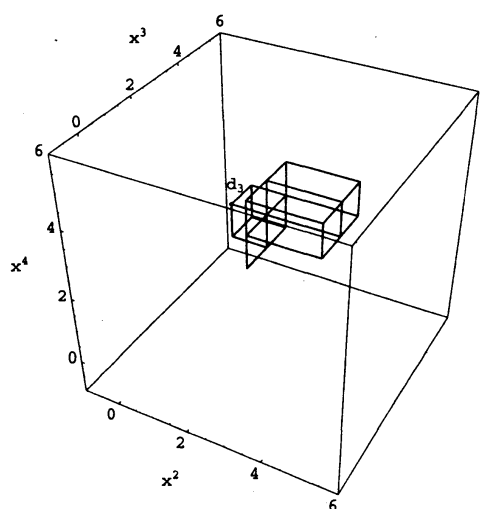


図6 $E(D)$ のフレーム ($x^1 = 2$)

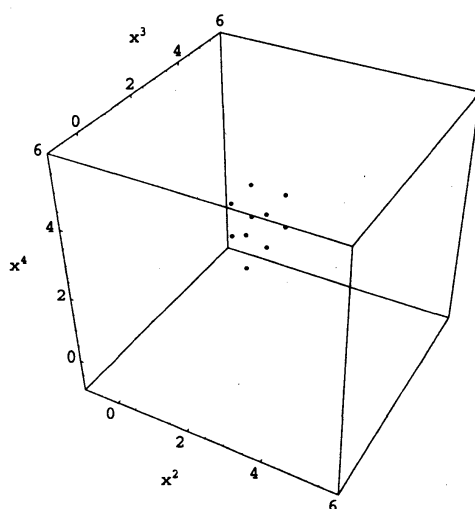


図7 $E(D)$ のフレーム ($2 < x^1 < 3$)

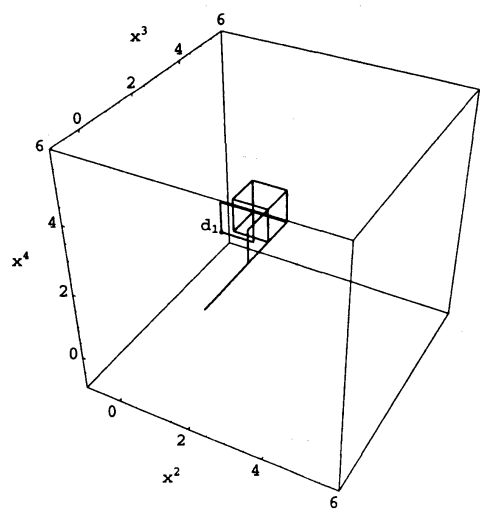


図8 $E(D)$ のフレーム ($x^1 = 3$)

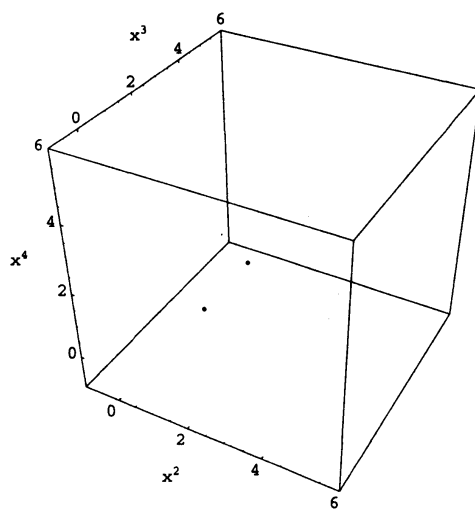


図9 $E(D)$ のフレーム ($4 < x^1 < 4$)

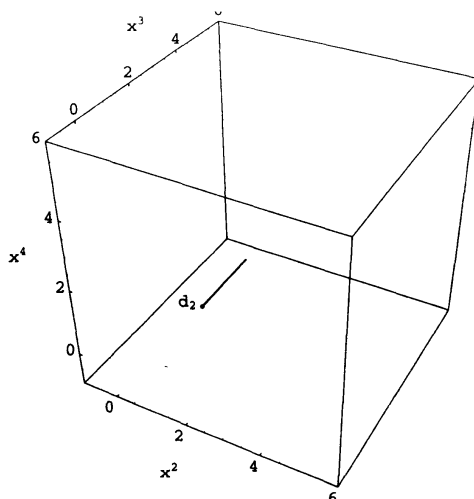


図10 $E(D)$ のフレーム ($x^1 = 4$)

5. 結論

\mathbb{R}^n における直角ノルムを用いた多目的配置問題と minisum 型配置問題を扱い、 $E(D)$ を求めることを考えた。まず、(P) の有効解の性質によって $E(D)$ のフレームが求まれば $E(D)$ が構成できることを示した。次に、定理5として (P) の有効解のもう一つの性質を与えた。その性質によって交点が (P) の有効解であるかどうか判定できる。最後に、これらの結果に基づいて $E(D)$ のフレームを求めるフレーム生成アルゴリズムを提案した。フレーム生成アルゴリズムは $E(D)$ に含まれる 1次元ボックスを順次辿っていくことによって $E(D)$ のフレームを生成する。

参考文献

- [1] L. G. Chalmet, R. L. Francis and A. Kolen, *Finding efficient solutions for rectilinear distance location problems efficiently*, Eur. J. Oper. Res., **6** (1981), 117-124.
- [2] Z. Drezner and G. O. Wesolowsky, *The asymmetric distance location problem*, Trans. Sci., **23** (1989), 201-207.
- [3] R. Durier, *On Pareto optima, the Fermat-Weber problem, and polyhedral gauges*, Math. Programming, **47** (1990), 65-79.
- [4] J. -B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [5] M. Kon, *Efficient solutions for multicriteria location problems under the block norm*, Mathematica Japonica, **47** (1998), 295-303.
- [6] M. Kon, *Efficient solutions of multicriteria location problems with rectilinear norm in \mathbb{R}^3* , Scientiae Mathematicae Japonicae, **54** (2001), 289-299.
- [7] M. Kon, *On efficient solutions of multicriteria location problems with rectilinear norm* (in Japanese), RIMS Kokyuroku **1241** (2001), 94-102

- [8] M. Kon and S. Kushimoto, *On efficient solutions of multicriteria location problems with the block norm*, *Scientiae Mathematicae*, **2** (1999), 245-254.
- [9] T. J. Lowe, J. -F. Thisse, J. E. Ward and R. E. Wendell, *On efficient solutions to multiple objective mathematical programs*, *Manage. Sci.*, **30** (1984), 1346-1349.
- [10] O. L. Mangasarian, *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [11] R. E. Wendell, A. P. Hurter, Jr. and T. J. Lowe, *Efficient points in location problems*, *AIIE Trans.*, **9** (1977), 238-246.