

ランクつき投票データ分析手法による 集団の意思の反映について

大分大学 工学部 小畑 経史 (Tsuneshi OBATA)

Faculty of Engineering, Oita University

obata@csis.oita-u.ac.jp

大阪大学大学院 情報科学研究科 石井 博昭 (Hiroaki ISHII)

Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University

ishii@ist.osaka-u.ac.jp

Abstract: Ranked voting data arise when voters select more than one candidate according to their preference. Cook and Kress (1990) introduced data envelopment analysis (DEA) to analyze ranked voting data. By using DEA, each candidate may use the most favorable weights for him/her to estimate his/her own preference score. However DEA often suggests that more than one unit have same efficiency. Also in this case, more than one candidate are judged as efficient. So, a method to discriminate these efficient candidates is needed. Green, Doyle and Cook (1996), Hashimoto (1997) and Obata and Ishii (2002) proposed methods for such purpose, respectively. In this paper, we investigate with simulation whether these methods reflect the intent of voters.

Keywords: Data envelopment analysis, Preference voting, Ranked voting data

1 ランクつき投票データと DEA

投票者が候補者の中から一人だけでなく複数の候補を望ましい順に選び投票するという投票システムのもとで得られる投票データがランクつき投票データである。いま, n 人の投票者 V_1, \dots, V_n の各々が m 人の候補者 C_1, \dots, C_m の中から k 人を順位付きで投票するとする。これを集計し, 候補 C_i が第 j 位として得た票数を v_{ij} で表す。このとき候補 C_i の総合的な好感度スコア Z_i は, 何らかのウェイト $w = (w_1, w_2, \dots, w_k)^T$ によって

$$Z_i(w) = \sum_{j=1}^k w_j v_{ij}. \quad (1)$$

と評価するのが妥当であろう。このスコアが大きいほど投票者の総意としてより望ましい候補と判断される。

このとき, 通常はこのウェイト w をあらかじめ決定しておき, すべての候補について同じウェイトを使用してスコアを評価するという方法がよくとられる。このようなウェイトの決め方の代表的なものとして, Borda 法:

$$w_1 = m - 1, \quad w_2 = m - 2, \quad \dots, \quad w_m = 0$$

が知られている [6]. しかしながらこの方法では, あらかじめ決められたウェイトの値しだいで, 結果として得られる好感度スコアが変わり, 候補者の順位付けも変化する. 各々の候補はできるだけ自分に有利なウェイト付けを望むであろう.

そこで, Cook and Kress [3] はランクつき投票データの分析にデータ包絡分析法 (DEA; data envelopment analysis) の導入を提案した. DEA とは多入力多出力のいくつかの事業体の効率を測定するために Charnes らによって提案された手法である [2]. DEA では各出力の加重和と各入力の加重和の比で効率性をあらわすが, 加重和の際のウェイトづけをあらかじめ先天的に決定して固定するのではなく, 各事業体が自分に有利なウェイト付けを行うことができる.

ランクつき投票データの分析に DEA を導入することで, 各々の候補者は自分にとって最も有利なウェイトによりスコアを評価することができる. これは次のような線形計画モデルで表現される:

$$Z_o^* = \max \sum_{j=1}^k w_j v_{oj}, \quad (2)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3)$$

$$w_j - w_{j+1} \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (4)$$

$$w_k \geq \epsilon. \quad (5)$$

ここで $\epsilon \geq 0$ はより上位の票がより大きな重みを持つように設定されたパラメータである¹.

このモデルを各候補 C_o に対して解き, 得られた最適値 Z_o^* の値を候補 C_o の好感度スコアとする. DEA にならい, $Z_o^* = 1$ である候補を効率的候補, $Z_o^* < 1$ である候補を非効率候補と呼ぶことにする.

通常の DEA と同様, ランクつき投票データの分析においても, 複数の候補が効率的候補としてトップ集団を形成し, この集団の中では優劣がつけられない. たいていの投票が, ただ一人の勝者を選出する, あるいは候補者の明確な順位付けを行うことを目的として実施されることを考えると, これはいささか都合が悪い. そのため何らかの方法で効率的候補をさらに差別化する必要がある.

2 効率的候補の差別化

効率的な候補をさらに差別化するために以下のような手法が提案されている.

2.1 Cook and Kress の方法

Cook and Kress [3] 自身が提案しているのが, パラメータ ϵ を最大化する方法である. ϵ を大きくすると上位の得票のウェイトと下位の得票のウェイトのギャップがより大きくなる. 彼らは, ギャップを大きくしても効率的でいられる候補ほど, より効率のよさが安定していると考え, 効率的でなくなる ϵ の値によって効率的候補の差別化を行った.

¹本来の Cook and Kress のモデルでは, ϵ の代わりに, *discrimination intensity function* と呼ばれる関数 $d(\cdot, \epsilon)$ が使

しかしこの方法は、ウェイトをあらかじめ固定して評価することと事実上同じであることが Green ら [4] によって指摘されている。

2.2 Green らの方法

Green ら [4] はクロス評価行列 (cross evaluation matrix) を利用する方法を提案している。彼らは、自分にとって有利なウェイトで評価したスコアだけでなく、他の候補にとって有利なウェイトを使って評価したスコアをも優れている候補ほど、より高く評価されるべきだと考えた。つまり、候補 C_i にとって最も有利なウェイト $w^{(i)}$ 、すなわち Cook and Kress のモデルの最適解、を用いて評価した候補 C_o の高感度スコア $Z_{io} = Z_o(w^{(i)})$ を求め、これらを平均化した値を候補 C_o の総合評価 (overall rating) とみなす。これら Z_{io} を並べてできる行列がクロス評価行列である。

ここで、実際には各候補にとって最も有利なウェイト、すなわち Cook and Kress のモデルの最適解、は通常一意には決まらないため、最適解のうちどのウェイトを用いるかを決定するためにさらに線形計画問題を解く必要がある。そのため彼らの手法では m 人の候補の順位付けに m^2 個の線形計画問題を解くことになる。

一般的にこの手法が採用されることが多い。

2.3 Hashimoto の方法

Hashimoto [5] は DEA 除外モデル [1] を利用した手法を提案している。DEA 除外モデルとは制約の中から評価対象の事業体に関する制約を取り除いて考えるモデルである。つまり通常の DEA が自分を含めた集団の中での自分の位置づけを評価するのに対して、自分を除いた集団から自分がどれくらい抜きんでているかを評価するものといえる。この考え方をランクつき投票データに適用すると、制約 (3) を、評価対象の候補 C_o についての条件式を取り除いた条件、

$$\sum_{j=1}^k w_j v_{ij} \leq 1, \quad i \neq o$$

で置き換えた線形計画モデルを考えることになる。これが Hashimoto の方法である。

この手法では m 個の問題を解くことで、効率・非効率に関係なくすべての候補の順位付けが得られる。

2.4 Obata and Ishii の方法

Green らの方法、Hashimoto の方法は、特定の非効率候補の有無によって効率的候補の順位が入れ代わり得るといった難点を持つ。我々は非効率候補の存在にまったく影響されない手法を提案した [8, 9]。我々の手法は Cook and Kress の基本モデル (2)–(5) によりいったん効率的候補を特定した後に、その候補にとって最も有利なウェイトを正規化したウェイトを用いてスコアを評価するというアイデアにもとづく。これは以下のようなモデルで表される。

$$1/Z_o^* = \min \|w\|,$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k w_j v_{0j} &= 1, \\
\sum_{j=1}^k w_j v_{ij} &\leq 1, \quad i \neq 0, \\
w_j - w_{j+1} &\geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, k-1, \\
w_k &\geq \epsilon.
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで $\|\cdot\|$ は適当なノルムとする. 最適値の逆数 Z_0^* が候補 C_0 の (正規化) 好感度スコアとなる. 実際には制約 (6) は効率的な候補に関するもののみ考えればよい. したがって, 効率的候補の (正規化) 好感度スコアを評価する際に非効率候補についての情報を使用せず, 先に述べた順位入れ代わりの問題は生じない. また, 候補 C_0 が非効率ならこの問題は実行可能解を持たない.

ウェイトを正規化するノルムとして, L_1 ノルムを使用すると, 目的関数は

$$\sum_{j=1}^k w_j,$$

となり, したがって線形計画問題となる. またそれ以外のノルムを考える場合でも線形制約のもとでの凸関数の最小化問題となる.

この手法では候補が効率的かどうかの判定と, 効率的であった場合のスコアが得られる. 非効率な候補の順位付けには別に Cook and Kress のモデルを解く必要がある. そのためすべての候補の順位付けを行うには m 個ないし $m + (m - 1)$ 個の問題を解くことになる.

次節の実験では $\epsilon = 10^{-8}$ とし, ノルムは L_1 ノルムを使用した.

3 集団の意思のモデルと実験

前節で挙げたこれらの手法はあくまでも, 得られた投票データをもとに如何に合理的な順位付けを行うかという立場に立ったものであり, さらにいえば DEA の基本的な考え方を反映して, 各候補が如何に自分に有利な評価を獲得するか, という視点に立つものである. これは DEA に基づく以上逃れられない立場といえる.

しかし, 投票であるからには候補者側の意思だけでなく投票者側の意思も当然反映すべきであろう. そこでこれらの手法がどの程度投票者の意思を反映しているのかを評価することができないだろうか.

まず投票者全体の集団としての意思とその表出のモデルとして次のようなものを考える.

1. 候補 C_i に対する投票者全体としての集団好感度が数値 P_i で表される (集団好感度 P_i の大きい候補ほど, 投票者全体にとってより望まれる候補)
2. 各々の投票者 V_l の候補 C_i に対する好感度が, 平均 P_i の確率分布に従う確率変数の値 p_{li} で表される
3. 投票者 V_l は好感度 p_{li} の順に k 番目までの候補に投票する

このモデルのもとで, これまでに以下のような実験を行った [7].

Step 1 集団好感度 $P_i, i = 1, \dots, m$ を

$$P_i > P_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m-1$$

を満たすように, すなわち候補 C_1 が最高の好感度を, 以下 C_2, C_3, \dots , の順で, 候補 C_m が最低の好感度を持つように, 与える.

Step 2 各投票者 V_l について, p_{li} を $N(P_i, \sigma^2)$ にしたがう正規乱数として生成する.

Step 3 得られた p_{li} に基づき投票者 V_l が投票する候補を決定する.

Step 4 候補者の順位を決定し, もともとの投票者全体の意思, すなわち候補 C_1 が最高位, 以下 C_2, C_3, \dots , の順で, 候補 C_m が最下位, という意思, をどの程度反映しているか評価を行う.

候補者の人数 $m = 10$, 投票者の人数 $n = 100$ とし

好感度パターン 1. 等間隔に配置 (線型). $P_i = (m-i)/(m-1)$.

2. 上位の候補ほど好感度の差が大きい (凸型). $P_i = ((m-i)/(m-1))^2$.

3. 上位の候補ほど好感度の差が小さい (凹型). $P_i = \sqrt{(m-i)/(m-1)}$.

分散 $\sigma^2 = 1.0^2, 1.5^2$.

投票人数 $k = 2, 3, 5$.

を組み合わせ, Green らの方法, Hashimoto の方法, 我々の方法の 3 種類について評価を行った. 評価指標として, 上位 r 位までの一致度 ($r = 1, 3, 10$):

$$d_r = \sum_{j=1}^r |I_j - j|$$

(ここで I_j は評価の結果, 第 j 位に順位付けられた候補の本来の順位を表す) を調べたところ以下が示された.

- 手法による違いは, Green の手法が最もよい. ただしそれほど極端に大きな違いはない.
- 好感度パターンによる違いは凸型が最もよく, ついで線形である.
- 分散による違いは, 分散が小さいほどよい結果が得られた.
- 投票人数による違いは, ひとりの投票者が多くの候補を投票するほどよい結果が得られた. ただ, その違いは予想したほどには大きくなかった.

この結果をふまえて, 今回は次のような視点で新たな実験を行った.

- 浮動票を想定

集団の意思に従って投票を行う投票者の他に, 集団の意思とは無関係にランダムに決定される好感度を持つ投票者がある割合 α で含まれるとする. このような投票者はすべての投票者に対する好感度が標準正規分布に従うとする. $\alpha = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ として実験.

表 1: 手法に関する比較. $k = 3$ (s は $k = 1$), $\alpha = 0.0$

d_1	s	B	G	H	O
平均	0.513	0.371	0.408	0.449	0.488
分散	0.6705015	0.4337928	0.492028	0.559959	0.6224785
d_3	s	B	G	H	O
平均	2.171	1.638	1.758	1.826	1.876
分散	2.7665255	2.018975	2.1075435	2.1919159	2.383007
e_3	s	B	G	H	O
平均	0.5	0.364	0.385	0.408	0.408
分散	0.2902903	0.2397437	0.249024	0.2577938	0.2577938

表 2: 手法に関する比較. $k = 3$ (s は $k = 1$), $\alpha = 0.25$

d_1	s	B	G	H	O
平均	0.69	0.514	0.569	0.592	0.677
分散	1.0249249	0.6404444	0.6999389	0.8263624	0.9716426
d_3	s	B	G	H	O
平均	2.843	2.183	2.351	2.366	2.451
分散	3.9583093	2.6661772	2.8146136	2.914959	3.0346336
e_3	s	B	G	H	O
平均	0.655	0.506	0.529	0.543	0.543
分散	0.3263013	0.2722362	0.2874464	0.2924434	0.2924434

- 単一投票, Borda 法との比較
- 別の評価指標の導入

順位にかかわらず, 上位数人が正しく得られたかどうかを表す指標として

$$e_r = \#\{j; j \leq r, I_j > r\}$$

(I_j は評価の結果, 第 j 位に順位付けられた候補の本来の順位) を考える. これは, 本来 r 位より下位の候補のうち何人が r 位以上と評価されたかを表す値となる.

今回の実験では好感度パターンは線形, 分散は $\sigma = 1.0^2$ に固定し, 投票人数 $k = 1, 2, 3, 5$ ($k = 1$ は単一投票, それ以外は各手法により順位付けを行った), 浮動票の比率 $\alpha = 0.0, 0.25, 0.5, 0.75$ を変化させた. 1000 回の試行によって得られた各指標値の平均, 分散を表 1-6 に示す (実験結果の一部). 表中の s, B, G, H, O はそれぞれ単一投票, Borda 法, Green らの方法, Hashimoto の方法, 我々の方法による順位付けを意味する.

表 3: 手法に関する比較. $k = 3$ (s は $k = 1$), $\alpha = 0.5$

d_1	s	B	G	H	O
平均	1.063	0.847	0.901	0.981	1.026
分散	2.1151461	1.390982	1.4606597	1.7163554	1.8651892
d_3	s	B	G	H	O
平均	4.22	3.435	3.624	3.79	3.804
分散	7.2908909	4.7965716	5.0676917	5.4713714	5.435019
e_3	s	B	G	H	O
平均	0.93	0.774	0.816	0.847	0.849
分散	0.4215215	0.3572813	0.3805245	0.377969	0.3765756

表 4: 手法に関する比較. $k = 3$ (s は $k = 1$), $\alpha = 0.75$

d_1	s	B	G	H	O
平均	2.113	1.829	1.876	2.07	2.239
分散	5.4797107	4.4101692	4.399023	4.9680681	5.6034825
d_3	s	B	G	H	O
平均	6.802	6.222	6.414	6.526	6.565
分散	12.6414374	11.296012	11.1157197	10.690014	10.7605355
e_3	s	B	G	H	O
平均	1.383	1.3	1.326	1.333	1.334
分散	0.4827938	0.4764765	0.4902142	0.4725836	0.4749189

表 5: 投票人数に関する比較. $k = 2, 3, 5$ は Green の手法, 評価指標 d_3

$\alpha = 0.0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$
平均	2.171	1.908	1.758	1.558
分散	2.7665255	2.3618979	2.1075435	1.9886246
$\alpha = 0.5$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 5$
平均	4.22	3.984	3.624	3.3
分散	7.2908909	5.9136577	5.0676917	4.2362362

表 6: 浮動票の割合に関する比較. $k = 3$, 評価指標 d_3

s	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$
平均	2.171	2.843	4.22	6.802
分散	2.7665255	3.9583093	7.2908909	12.6414374
B	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$
平均	1.638	2.183	3.435	6.222
分散	2.018975	2.6661772	4.7965716	11.296012
G	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$
平均	1.758	2.351	3.624	6.414
分散	2.1075435	2.8146136	5.0676917	11.1157197
H	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$
平均	1.826	2.366	3.79	6.526
分散	2.1919159	2.914959	5.4713714	10.690014
O	$\alpha = 0.0$	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$
平均	1.876	2.451	3.804	6.565
分散	2.383007	3.0346336	5.435019	10.7605355

4 まとめ

いずれの状況でも, また, いずれの指標でも, Borda法が最もよく, 以下, Greenらの手法, Hashimotoの手法, 我々の手法, 単一投票の順であった. DEAに基づく3手法については, 浮動票を混入した場合でも以前の実験と同様の傾向が示された.

Borda法が最も優れていた理由は, 次のように推測される. 実験で想定した集団の好感度パターンが線形, すなわち好感度値が等間隔であったため, 同じく等間隔のウェイトにより好感度スコアを評価するBorda法が本来の集団好感度に近いスコアを再現できたのではないだろうか. 他の好感度パターンについて調べることで, この点が明らかになるであろう.

また, 単一投票が最も悪い結果となることから, 単一投票では十分に集団の意思を反映することができないことが確認された.

どの手法でも, 浮動票の割合が増えるほど集団の意思を反映する順位付けを得ることが困難になる様子が見て取れる. 指標値の悪化の仕方については手法による違いは特に見受けられない.

今回新たな指標として, e_r を調査したが, 指標 d_r と特に異なる傾向はみられなかった.

これまでの実験により, 提案した集団の意思のモデルとそれに基づく評価が, 従来とは違った角度での順位付け手法の一つの評価法として利用できることが示されたのではないだろうか.

参考文献

- [1] P. Andersen and N.C. Petersen, A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis, *Management Science* 39/10 (1993), 1261-1264.

- [2] A. Charnes, W.W. Cooper and E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research* 2 (1978), 429–444.
- [3] W.D. Cook and M. Kress, A data envelopment model for aggregating preference rankings, *Management Science* 36/11 (1990), 1302–1310.
- [4] R.H. Green, J.R. Doyle and W.D. Cook, Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation, *European Journal of Operational Research* 90 (1996), 461–472.
- [5] A. Hashimoto, A ranked voting system using a DEA/AR exclusion model: A note, *European Journal of Operational Research* 97 (1997), 600–604.
- [6] 今野 浩, 数理決定法入門, 朝倉書店, 1992.
- [7] 小畑 経史, DEA を利用したランクつき投票データ分析手法の集団の意思の反映に関する検討, 大分大学工学部研究報告 第 45 号 (2002), 35–41.
- [8] T. Obata and H. Ishii, Discrimination for DEA efficient candidates for ranked voting data, 最適化: モデリングとアルゴリズム 15, 統計数理研究所共同研究レポート 148 (2002), 150–157.
- [9] T. Obata and H. Ishii, A method for discriminating efficient candidates with ranked voting data, *European Journal of Operational Research* (2002, to appear).