数理解析研究所講究録 1297 巻 2002 年 24-27

h-assignment から見た単体的複体の shelling 集合とその解析

東京大学大学院・情報理工学研究科・コンピュータ科学専攻　森山 園子 (Sonoko Moriyama)
Department of Computer Science, Faculty of Information Science and Technology,
The University of Tokyo,

Abstract

Shellable である単体的複体には，shelling と呼ばれる facet の全順序が存在する．しかし，この shelling 集合が持つ構造については知られていない．．本研究では，新しい概念 *h-assignment* を導入することで，shelling 集合 $\mathcal{S}$ を antimatroid 構造を持つ同値類 $\{C_i\}$ へと分解する．Shelling に対応する h-assignment を特に *appropriate* h-assignment と呼ぶ．Appropriate h-assignment を特徴付けることで，単体的複体における shellability の別定義を与える．

1 Introduction

Shellability はトポロジーの分野で古くから研究されてきた性質の1つである．しかし，Bruggesser and Mani による多面体の境界複体に関する研究 [2] 以降は，組合せ論の分野においても重要性が認識されている．それ以降，shellability に関する研究が数多くなされたが [3][9][10]，shelling 集合 $\mathcal{S}$ が持つ構造については言及されていない．

本研究では，新しい概念として *h-assignment* を導入することにより，$\mathcal{S}$ が antimatroid 構造を持つ shelling 部分集合へと同値類分解されることを示す．まず最初に，$\mathcal{S}$ における同値関係 $\sim$ を以下のように定義する：shelling a に対応する h-assignment が shelling b に対応する h-assignment に等しいとき，a と b の間には同値関係 $a \sim b$ が成立する．同値関係 $\sim$ の元で同値類分解された $\mathcal{S}$ の各同値類 $\{C_i\}$ は antimatroid M_i の構造を持ち，$\{C_i\}$ における shelling 集合は M_i の basic words 集合に対応する．

Shelling に対応する h-assignment を特に *appropriate* h-assignment と呼ぶ．この appropriate h-assignment は以下のように特徴付けることが可能である：単体的複体の facet と ridge の関係を示す facet-ridge 接続グラフ $G(\mathcal{C})$ が h-assignment A により向き付けられるとき，$G(\mathcal{C})$ の向き付けがある次数条件を満たし，かつ acyclic ならば，A は appropriate である．Appropriate h-assignment に与えた特徴付けと実装技術の工夫により，単体的複体の shellability 判定アルゴリズムを開発した [7].

2 Definitions and Basic Properties

$\sigma \in \mathcal{C}$ かつ $\tau \subset \sigma$ ならば $\tau \in \mathcal{C}$ を満たす有限集合 $V = \{1, \ldots, n\}$ の部分集合族 $\mathcal{C}$ を抽象的単体的複体という．この $\mathcal{C}$ の要素は *face* という．特に，集合の包含関係において極大な face を *facet* という．$\overline{\{\sigma_1, \ldots \sigma_n\}} = \{\tau | \tau \text{ is a face of } \sigma_i \text{ for some } i\}$，つまり $\overline{\{\sigma_1, \ldots \sigma_n\}}$ は $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ を faces として含む最小の単体的複体である．Face σ の次元 $\dim \sigma$ は $|\sigma| - 1$ である．$\mathcal{C}$ の次元は $\max_{\sigma \in \mathcal{C}} \dim \sigma$ で与えられる．$\mathcal{C}$ の全ての facet が同じ次元であるとき，$\mathcal{C}$ は純であるという．本研究では，単体的複体は純であると仮定する．

純な単体的複体において，次元が $\dim \mathcal{C}-1$ である face を *ridge* という．特に，1つの facet にのみ含まれる ridge を *boundary ridge* といい，この boundary ridge を持つ facet を *boundary facet* という．d 次元の純な単体的複体の表記を d-単体的複体とする．

$\mathcal{C}$ の i-face の数を $f_i(\mathcal{C})$ と表すとき，$\mathcal{C}$ の f-vector は $f(\mathcal{C})=(f_{-1}(\mathcal{C}),f_0(\mathcal{C}),f_1(\mathcal{C}),...,f_d(\mathcal{C}))$ となる．$\mathcal{C}$ の h-vector $h(\mathcal{C})=(h_0(\mathcal{C}),h_1(\mathcal{C}),h_2(\mathcal{C}),...,h_{d+1}(\mathcal{C}))$ は $h_k:=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{d+1-i}{d+1-k}f_{i-1}$ $(0\leq k\leq d+1)$ により定義される．

d-単体的複体 $\mathcal{C}$ の *shelling* は，以下を満たす facet の全順序である：$\overline{F_i}\cap\left(\cup_{j=1}^{i-1}\overline{F_j}\right)$ は $(d-1)$-単体的複体 $(2\leq i\leq t)$ である．$\mathcal{C}$ が shelling を持つとき，$\mathcal{C}$ は *shellable* であるという．単体的複体が shellable ならば，*Cohen-Macaulayness* である [5].

Shellable な単体的複体 $\mathcal{C}$ において，$\mathcal{C}$ の h-vector と shelling の間に以下のような関係が存在することが知られている．Shelling $F_1,F_2,\cdots,F_t$ において，face F_j の *restriction* $Res(F_j)$ は，$F_j-\{v\}$ が既出 facet 集合の 1 つに含まれるような頂点集合 $v\in V$ として定義される：$Res(F_j):=\{v\in F_j : F_j-\{v\}\subseteq F_i$ for some $1\leq i<j\}$．この shelling に従って $\mathcal{C}$ を構成するとき，第 j ステップ目における新しい face 集合は $\{G|Res(F_j)\subseteq G\subseteq F_j\}=[Res(F_j),F_j]$ に等しい．これは $\mathcal{C}$ の *partition* を構成する．また，$|\{j : |Res(F_j)|=i\}|=h_i(\mathcal{C})$ であることが知られている．

単体的複体と shellability についての詳細は [10] を参照されたい．

3 An Appropriate h-assignment and Its Properties

3.1 A New Concept: An h-assignment

Shellable である単体的複体の h-vectors の性質を用いて，新しい概念 h-assignment を導入し，更に h-assignment の shellability を以下のように定義した：

Definition 1 *h-assignment* とは，ラベル i を持つ *facet* の数が h_i に等しいという条件を満たす，ラベル $0\leq i\leq d+1$ の割当てである．$A(F)$ は，*h-assignment* A において *facet* F に割当てられたラベルを示す．

Definition 2 ある *shelling* における *restriction* のサイズに従って $\mathcal{C}$ の各 *facet* がラベル付けられるとき，*h-assignment* はこの *shelling* に対応する．*Shellable h-assignment* とは，$\mathcal{C}$ のある *shelling* に対応する *h-assignment* である．

t 個の facet を持つ単体的複体 $\mathcal{C}$ における h-assignment の数は $\frac{t!}{h_0!h_1!\cdots h_d!h_{d+1}!}$ に等しく，また $\mathcal{C}$ が shellable h-assignment を持つとき，$\mathcal{C}$ は shellable である．

$\mathcal{C}$ が shellable であり，かつ A が shellable h-assignment であるとき，shelling における各ステップは以下を満たす：新しく加えられた facet のラベルが k であるとき，その facet は $d+1-k$ 個の boundary ridge を持つ．ここで，以下の proposition を与える．

Proposition 3 t 個の *facet* を持つ d-単体的複体を $\mathcal{C}$ とし，$\mathcal{C}$ の *h-assignment* を A とする．以下の *2* つを満たす *facet* を G とする：(1) $A(G)=k$，(2) G は $d+1-k$ 個の *boundary ridges* を持つ．G 以外の *facet* により生成された単体的複体を $\mathcal{C}'$ とする．$\mathcal{C}'$ は A から誘導される *h-assignment* A' を持つ．このとき，A' が $\mathcal{C}'$ の *shellable h-assignment* であることと，A が $\mathcal{C}$ の *shellable h-assignment* であることとは同値である．この *proposition* において G が満たす条件を removability condition と呼び，$\mathcal{C}$ から G を削除する操作を removing step と呼ぶ．

この proposition は，$\mathcal{C}$ の h-assignment A が shellable であることと，$\mathcal{C}$ の全ての facet が削除されるまで removing step が適用可能であることが同値であることを示している．また，与えられた h-assignment が shellable であるか否かは $O(t)$ 時間で判定可能である．各 removing step において削除される facet G は，その時点で構成されている複体に存在する shelling において最後に配置される facet と考えられる．全ての t 個の facet に removing step を適用することで，逆順に並べられた shelling，*reverse shelling* を列挙できる．

3.2 An Appropriate h-assignment and Its Characterization

Definition 4 *Facet* $\{F_i\}$ と *ridge* $\{R_j\}$ を持つ単体的複体を $\mathcal{C}$ とする．$\mathcal{C}$ の *facet-ridge* 接続グラフとは，*facet* F_i に対応するノード v_{F_i} と *ridege* R_j に対応するノード v_{R_j} を持ち，$F_i \supset R_j$ であるときに枝 $v_{F_i}v_{R_j}$ を持つようなグラフである．

Definition 5 *h-assignment* A において，$G(\mathcal{C})$ に対する向き付けが以下の次数条件を満たすとき，この *h-assignment* は appropriate である：

- $\deg_{in}(v_{F_i})=A(F_i)$，$\deg_{out}(v_{F_i})=d+1-A(F_i)$,
- $\deg_{in}(v_{R_j})=1$，$\deg_{out}(v_{R_j})=\#\{F_i|F_i \supset R_j\}-1$,
- 全体の向き付けが acyclic である．

Shellable h-assignment を以下のように特徴付けられることから，$\mathcal{C}$ における appropriate h-assignment の存在が $\mathcal{C}$ の shellability に対応することがわかる．

Theorem 6 *t 個の facet を持つ単体的複体を $\mathcal{C}$ とし，$\mathcal{C}$ の h-assignment を A とする．h-assignment A が shellable であることと，A が appropriate であることは同値である．*

この theorem では，与えられた appropriate h-assignment A に対して $G(\mathcal{C})$ を向き付ける方法を示している．つまり，removability condition を満たす facet を連続的に削除して，削除された facet からその boundary ridge へと向き付けることにより A から $G(\mathcal{C})$ を向き付けられる．同時に，A に対応した向き付けがユニークに決定されることが観察できる．

4 The Antimatroid Structure in A Set of All Shellings

4.1 Decomposition of All Shellings by h-assignments

ここでは，*Language* に関して antimatroid の順序版を議論する．有限台集合 E に対して，アルファベット E 上の全ての *word* の free monoid を E^* で表記する．E^* の word を $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ で表し，E の要素である文字を $x,y,z\cdots$ で表す．α と β の連結を $\alpha\beta$ を表す．任意の word $\alpha \in E^*$ において，$|\alpha|$ は α 内の文字数を示す．α の *supports* $\tilde{\alpha}$ は α 内の文字集合を示す．ある word が同じ文字を 1 つ以上含まないとき，つまり $|\alpha|=|\tilde{\alpha}|$ であるとき，この word を *simple* であるという．E 上の *language* $\mathcal{L}$ とは，E 上の word 集合 $\mathcal{L} \subseteq E^*$ であり，$\mathcal{L}$ 内の全ての word が simple であるとき $\mathcal{L}$ を *simple* であるという．

$\mathcal{F}$ が以下の 3 条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ は空でない有限台集合 E 上の *antimatroid* である：(1) 任意のアルファベットは $\mathcal{F}$ 内の word に出現する (normal)，(2)(i)$\emptyset \in F$, (ii)$\alpha\beta \in \mathcal{F}$ ならば $\alpha \in \mathcal{F}$ (hereditary), (3)$\tilde{\alpha} \not\subseteq \tilde{\beta}$ を満たす $\alpha,\beta \in \mathcal{F}$ に対して，$\beta x \in \mathcal{F}$ を満たす $x \in \tilde{\alpha}$ が存在する．$\mathcal{F}$ の各

要素は *feasible word* といい，特に support が E に等しい feasible word を $\mathcal{F}$ の basic word という．

Poset $P=(E,\leq)$ 上で以下の条件を満たすよう定義された antimatroid を *poset shelling* という：x_i が $P\backslash\{x_1,\cdots,x_{k-1}\}$ の極小要素となる，poset P の要素 $x_1,\cdots,x_k$ が feasible word である．Antimatroid の詳細については [6] を参照されたい．

Shellable な単体的複体 $\mathcal{C}$ の appropriate h-assignments は，$\mathcal{C}$ における shelling に対して以下の同値関係を与える．

Definition 7 *$\mathcal{C}$ の 2 つの shellings a と b に対して，a と b の両方が同じ appropriate h-assignment に対応するならば，2 つの shelling 間の関係を $a \sim b$ と表す．この関係は同値関係であり，これは shelling 集合を同値類 $\{C_i\}$ に分解する．*

$G(\mathcal{C})$ がある appropriate h-assignment に対応するとき，$G(\mathcal{C})$ の全ての頂点 $\{v_{F_k}\}$ を示す全ての facet $\{F_k\}$ を台集合 E とし，$v_{F_i}\rightarrow v_R\rightarrow v_{F_j}$ を満たす ridge R が存在するとき $F_i\leq F_j$ と定義して，$F(\mathcal{C})$ を生成する．この関係 $\leq$ は E 上の半順序関係である．従って，appropriate h-assignment を持つ $F(\mathcal{C})$ は poset とみなせる．ここで，removing step により削除される facet は $F(\mathcal{C})$ の極小要素にあたることが観察できる．つまり，ある appropriate h-assignment から生成された reverse shelling は poset $F(\mathcal{C})$ における poset shelling である．従って，同値類 C_i に含まれる全ての shelling 集合は antimatroid (poset shelling) の basic word 集合である．

Theorem 8 *C_i が antimatroid (poset shelling) の basic word 集合であるとき，reverse shelling 集合は全ての C_i の disjoint union に等しい．*

References

[1] A. Björner, *The homology and shellability of matroids and geometric lattices*, in *Matroid Applications*. N. White ed., Cambridge (1991).

[2] H. Bruggesser and P. Mani, *Shellable decompositions of cells and spheres*, Math. Scand. 29 (1971), 197–205.

[3] G. Danaraj and V. Klee, *Which spheres are shellable?*, Annals of Discrete Mathematics 2 (1978), 33–52.

[4] G. Danaraj and V. Klee, *A Representation of 2-dimensional pseudomanifolds and its use in the design of a linear-time shelling algorithm*, Annals of Discrete Mathematics 2 (1978), 53–63.

[5] T. Hibi, *Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes*, Carslaw Publications (1992).

[6] B. Korte, L. Lovász and R. Schrader, *Greedoids*, Springer-Verlag (1991).

[7] S. Moriyama, A. Nagai, and H. Imai, *Fast and Space-efficient Algorithms for Deciding Shellability of Simplicial Complexes of Large Size Using h-assignments*, to appear in Proc. of International Congress of Mathematical Software (ICMS'02).

[8] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Birkhäuser (1996), 84.

[9] G. M. Ziegler, *Shelling Polyhedral 3-Balls and 4-Polytopes*, Discrete Comput. Geom. 19 (1998), 159–174.

[10] G. M. Ziegler, *Lectures on Polytopes*, Springer-Verlag (1994).