

提携形ゲームと凸解析

大阪大学大学院工学研究科

谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)

Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1 はじめに

ゲーム理論は複数の意思決定主体を伴う決定問題を扱うが、大きく分けて、展開形あるいは戦略形（標準形）表現に基づく非協力ゲーム理論と、提携形表現に基づく協力ゲーム理論がある。このうち提携形のゲーム（厳密にいうと譲渡可能効用をもつ提携形ゲーム）は、プレイヤーの提携を変数にもつ実数値集合関数により定義されることから、（離散）凸解析と密接な関連をもつ。このことは、Bilbao[1]や Bilbao and Martínez-Legaz[2]によって既に指摘されている。

本報告では、提携形ゲームと凸解析の関連についてこれまでの成果を概観するとともに、筆者らのこれまでの研究との関係を明らかにする。まず第2章では、凸ゲームと呼ばれるクラスのゲームについて、その性質及びその一般化概念について述べる。次に、第3章で、凸解析の基本概念である共役関数や劣勾配とゲームの関連について、Fujishige[5]や Murota[6, 7]の成果のゲーム理論の観点からの説明の一端を、Bilbao[1, 2]に基づき紹介する。第4章では、Lovász 拡張の概念と我々の研究したファジィゲーム [8, 9]が実は同じ定式化を与えるものであることを指摘し、その性質を述べる。次の2章は、許容される提携に制限のあるゲームを扱う。第5章では、凸性概念の離散化、組合せ論化に基づく凸幾何上で定義されたゲームについて、その意味付けを論じ、解概念について考察する。解の公理的特徴づけが可能であるが、特に提携に制限のないゲームに対する我々の研究成果が、この場合にも援用できる。第6章ではマトロイド上で定義されたゲームについて、簡単に触れる。

2 凸ゲームとその一般化

この章では、提携形ゲームの中でも重要なクラスである凸ゲームとその一般化について、既存の成果を概観する。 n 人のプレイヤーからなる集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とし、ゲームを定める特性関数を $v: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ とする。 $v(S)$ は提携 S が獲得可能な利益（利益ゲーム）と解釈されるが、これを提携 S が負担すべきコスト（コストゲーム）とみなすこともある。なお、本稿を通じて、 $v(\emptyset) = 0$ とする。また、提携に動機付けを与える意味からも、ゲームは優加法的、すなわち

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T), \quad \forall S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$$

であると仮定されることが多い。なお以下では、 $v(\{i\}) = v(i)$, $S \cup \{i\} = S \cup i$, $S \setminus \{i\} = S \setminus i$ などの略記を用いる。

定義 1 v が優加法性より強い条件である

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \quad \forall S, T \subseteq N$$

を満足するとき, このゲームは凸 (convex) であるといわれる. 集合関数としてみると, v が優モジュラーであるときゲームは凸である.

定義 2 ゲーム v の上ベクトル (upper vector) $M(v) \in \mathbf{R}^n$, 下ベクトル (lower vector) $m(v)$ とギャップ関数 (gap function) $g^v : 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ は

$$\begin{aligned} M_i(v) &:= v(N) - v(N \setminus i), & \forall i \in N, \\ m_i(v) &:= \max_{S: S \ni i} (v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v)), & \forall i \in N, \\ g^v(S) &:= \sum_{i \in S} M_i(v) - v(S) = -e^v(S, M(v)), & \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

で定義される. またゲーム v と提携 $T \subseteq N$ に対し, 差分作用素 ($\Delta_T v$) は

$$(\Delta_T v)(S) := v(S \cup T) - v(S \setminus T) \quad \forall S \subseteq N$$

で定義される.

これらの概念を用いると, 凸ゲームには以下のような幾つかの定義が可能である.

命題 1 ([4]) 次の条件は同値である :

1. $v(S \cup i) - v(S) \leq v(T \cup i) - v(T), \forall i \in N, \forall S, T \subseteq N : S \subseteq T \subseteq N \setminus i.$
2. $g^v(S \cup i) - g^v(S) \geq g^v(T \cup i) - g^v(T), \forall i \in N, \forall S, T \subseteq N : S \subseteq T \subseteq N \setminus i.$
3. $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T), \forall S, T \subseteq N.$
4. $g^v(S) + g^v(T) \geq g^v(S \cup T) + g^v(S \cap T), \forall S, T \subseteq N.$
5. $v(S \cup R) - v(S) \leq v(T \cup R) - v(T), \forall R, S, T \subseteq N : S \subseteq T \subseteq N \setminus R.$
6. $g^v(S \cup R) - g^v(S) \geq g^v(T \cup R) - g^v(T), \forall R, S, T \subseteq N : S \subseteq T \subseteq N \setminus R.$
7. $(\Delta_S(\Delta_T v))(R) \geq 0, \forall R, S, T \subseteq N.$

凸ゲームの有用性は, 提携形ゲームに対し提案されているさまざまな解の間に密接な関連が成り立つことにある. まとめると次のようになる.

定理 1 v が凸ゲームならば以下が成り立つ :

1. コア $C(v)$ は空でない. また交渉集合と一致し, 唯一の安定集合である.
2. コア $C(v)$ と Weber 集合 $W(v)$ は一致する (これはゲームの凸性と等価な条件).
3. Shapley 値はコアに含まれる.
4. 仁 (集合) とカーネルは一致する (コアに含まれる).

凸ゲームの拡張概念として, 半凸, 1-凸, k -凸, 準凸などがある. 以下に, ギャップ関数を用いて定義される半凸と 1-凸の概念を簡単に紹介する. k -凸については Driessen [4] に詳しい. また準凸については 5 章に述べる.

定義 3 ゲーム v は優加法的で

$$g^v(i) \leq g^v(S), \quad \forall i \in N, \forall S \in 2^N : i \in S$$

を満足するならば、半凸 (semiconvex) であるといわれる。

定義 4 ゲーム v は次の条件を満足するならば 1-凸 (1-convex) であるといわれる：

$$0 \leq g^v(N) \leq g^v(S) \quad \forall S \subset N, S \neq \emptyset.$$

定義 5 ゲーム v は次の 2 条件

1. $m(v) \leq M(v)$,
2. $m(v)(N) \leq v(N) \leq M(v)(N)$

を満足するとき準平衡 (quasibalanced) であるといわれる。

凸ゲームならば半凸ゲームであり、半凸ゲームならば準平衡ゲームである。準平衡ゲームに対しては、次のような解概念 (値) が提案されている。

定義 6 準平衡ゲーム v の τ -値は

$$\tau(v) := \lambda m(v) + (1 - \lambda)M(v)$$

で定義される。ここで $\lambda \in [0, 1]$ は $\sum_{i \in N} \tau_i(v) = v(N)$ から一意に定まる。

ゲームの半凸性、1-凸性はこの τ -値の計算を極めて容易にするとともに、コアや仁との関係を与える。

定理 2 v が半凸ゲームであるとする

$$\tau(v) = \lambda \underline{v} + (1 - \lambda)M(v)$$

ただし $\underline{v} = (v(1), v(2), \dots, v(n))$ である。

定理 3 v が 1-凸ゲームであるとする

$$\tau_i(v) = M_i(v) - \frac{1}{n}g^v(N).$$

定理 4 ゲーム v が 1-凸ゲームになるのは、コア $C(v)$ の端点が $M(v) - g^v(N)e^i$, $i \in N$, になるときかつそのときに限る。ここで e^i は第 i 単位ベクトルを表す。

定理 5 v が 1-凸ゲームならば、 $\nu(v) = \tau(v)$ が成り立つ。ここで $\nu(v)$ はゲーム v の仁を

3 共役性と劣勾配

離散凸解析は、藤重 [5] や室田 [6, 7] らにより、近年大きく発展してきた。その結果のゲーム理論への応用は、Bilbao and Martínez-Legaz [2] や Bilbao [1] に詳しい。この章では、その一部のみを紹介する。詳細は上の文献に詳しい。

定義 7 $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ は空でない族とする。利益ゲーム $v: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、その凹共役関数 $v^\circ: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$v^\circ(x) = \min\{x(S) - v(S) : S \in \mathcal{F}\}$$

で定義する。またコストゲーム $c: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、その凸共役関数 $c^\circ: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$c^\circ(x) = \max\{x(S) - v(S) : S \in \mathcal{F}\}$$

で定義する。

双対的に、 v, c をそれらの共役関数から復元することも可能である。実際、 $S \in \mathcal{F}$ に対し、

$$\begin{aligned} v(S) &= \min\{x(S) - v^\circ(x) : x \in \mathbf{R}^n\}, \\ c(S) &= \max\{x(S) - c^\circ(x) : x \in \mathbf{R}^n\} \end{aligned}$$

が成り立つ。

\mathcal{F}, \mathcal{G} を N の部分集合の空でない族とし、コストゲーム $c: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ 、利益ゲーム $v: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられているものとする。次のような主問題と双対問題の対が定義される。

$$\begin{aligned} \text{主問題:} \quad & \text{Find } \min\{c(S) - v(S) : S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\}, \\ \text{双対問題:} \quad & \text{Find } \max\{v^\circ(x) - c^\circ(x) : x \in \mathbf{R}^n\}. \end{aligned}$$

このとき、Fenchel タイプの双対定理が成り立つ。

定理 6 ([5]) $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq 2^N$ は $\emptyset, N \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ を満たす分配束で、 $c: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ は凹コストゲーム、 $v: \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}$ は凸利益ゲームとする。このとき

$$\min\{c(S) - v(S) : S \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}\} = \max\{v^\circ(x) - c^\circ(x) : x \in \mathbf{R}^n\}$$

が成り立つ。

次に、劣勾配の概念も通常の凸解析の場合の自然な拡張として、定義される。

定義 8 $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ は空でない族、 $v: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ は利益ゲームとする。ベクトル $x \in \mathbf{R}^n$ は次を満たすとき、 $S \in \mathcal{F}$ における v の劣勾配であるといわれる。

$$v(T) - v(S) \leq x(T) - x(S) \quad \text{for all } T \in \mathcal{F}.$$

同様にコストゲーム $c: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{R}$ に対し、

$$c(T) - c(S) \geq x(T) - x(S) \quad \text{for all } T \in \mathcal{F}.$$

を満たすベクトル $x \in \mathbf{R}^n$ は $S \in \mathcal{F}$ における c の劣勾配といわれる。 S における v の劣勾配全体を S における v の劣微分といい、 $\partial v(S)$ で表す。

命題 2 $v: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ を利益ゲーム, $c: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ をコストゲームとする. また v^* , c^* はそれぞれの双対ゲームで,

$$\begin{aligned} v^*(S) &= v(N) - v(N \setminus S), \quad \forall S \subseteq N \\ c^*(S) &= c(N) - c(N \setminus S), \quad \forall S \subseteq N \end{aligned}$$

で定義されるとする. このとき

1. $\partial v(\emptyset) = P(v)$, $\partial v(N) = P(v^*)$,
2. $\partial c(\emptyset) = P(c)$, $\partial c(N) = P(c^*)$,
3. $\partial v(\emptyset) \cap \partial v(N) = C(v) = C(v^*)$,
4. $\partial c(\emptyset) \cap \partial c(N) = C(c) = C(c^*)$.

が成り立つ.

4 Lovász 拡張

この章では, ゲーム $v: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ の Lovász 拡張について述べる. ゲーム v は, $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)^T$ に対し, $v(\mathbf{0}) = 0$ を満たす関数 $v: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbf{R}$ とみなすことができる. この定義域を \mathbf{R}_+^n に拡張する. 非負ベクトル $x \in \mathbf{R}_+^n$ に対し, x の成分 x_i の相異なる値を大きさの順に並べたものを $0 \leq x^1 < x^2 < \dots < x^k$ とし, $x^0 = 0$ とおく.

$$\begin{aligned} S_p &= \{i \in N : x_i \geq x^p\} \\ f_x(S) &= \begin{cases} x^p - x^{p-1}, & \text{if } S = S_p \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

と定義すると,

$$x = \sum_{S \subseteq N} f_x(S) \mathbf{1}_S$$

と表すことができる. ただし, $\mathbf{1}_S \in \mathbf{R}^n$ は $i \in S$ となる i 成分が 1 で他は 0 となるベクトルを表す. この表現と $v(\mathbf{1}_S) = v(S)$ となることから, 次のような拡張が考えられる.

定義 9 ゲーム $v: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$ から

$$\hat{v}(x) = \sum_{S \subseteq N} f_x(S) v(S)$$

で定義される関数 $\hat{v}: \mathbf{R}_+^n \rightarrow \mathbf{R}$ をゲーム v の Lovász 拡張という.

$x_i \in [0, 1]$ をプレイヤー i が提携に参加する度合いと解釈し, \hat{v} の定義域を $[0, 1]^n$ に限定すると, いわゆるファジィゲームを考えることができる. 著者らは Butnariu[3] によるファジィゲームの不自然さを克服する視点から, Choquet 積分型のファジィゲームを提案, 研究した [8, 9]. その定義は

$$\hat{v}(x) = \sum_{p=1}^k v(S_p) (x^p - x^{p-1})$$

で与えられるが、もちろんこれは Lovász 拡張の定義と一致する。著者は Bilbao[1] を通じて、Lovász 拡張の存在を知りその一致に驚いた次第である。[8, 9] の研究の主眼は、このクラスのゲームに対する解概念の提案にあるが、それは言葉を変えれば Lovász 拡張に対する解を考察していることになる。

Lovász 拡張には、いろいろ興味深い性質があるので、以下にそれを紹介しておく ([1, 2])。まず凸利益ゲームに対して

$$\hat{v}(x) = \min\{\langle x, y \rangle : y \in P(v)\},$$

が成り立つ。ここで $\langle x, y \rangle$ は通常のユークリッド内積を表す。次の定理は凸ゲームを特徴付けるものとして興味深い。

定理 7 v が優モジュラー (すなわち凸ゲーム) であることと \hat{v} が凹関数であることは等価である。

N の要素の全順序 C

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_n$$

が与えられたとき、提携の鎖

$$C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_{n-1} \subset C_n,$$

を考える。ただし $C_0 = \emptyset$, $C_k = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $k = 1, \dots, n$ とする。

定義 10 ゲーム v における順序 C に関する限界価値ベクトル (marginal worth vector) $a^C(v) \in \mathbf{R}^n$ は

$$a_{i_k}^C(v) = v(C_k) - v(C_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n$$

で定義される。また、ゲーム v の Weber 集合は、

$$\text{Weber}(v) = \text{conv}\{a^C(v) : C \text{ は } N \text{ の全順序}\}$$

で与えられる。

定理 8 ゲーム v が凸ゲームであれば、

$$\hat{v}(x) = \min\{\langle x, y \rangle : y \in C(v)\} = \langle x, a^C(v) \rangle$$

が成り立つ。ここで $C(i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ は、 x に対し

$$x_{i_1} \geq x_{i_2} \geq \cdots \geq x_{i_n} \geq 0$$

を満足する順序である。

ゲーム v の満場一致係数 (dividend) は,

$$d_S(v) = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} v(T)$$

あるいは回帰的に

$$d_S(v) = \begin{cases} 0, & \text{if } S = \emptyset \\ v(S) - \sum_{T \subset S} d_T(v), & \text{if } S \neq \emptyset. \end{cases}$$

で定義されるが, これを用いると,

$$v = \sum_{S \subseteq N} d_S(v) u_S$$

と表される. ここで u_S は満場一致ゲームで,

$$u_S(T) = \begin{cases} 1, & \text{if } T \supseteq S \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される. すなわち, ゲーム全体は通常関数の和とスカラー倍によって線形空間をなすが, 満場一致ゲームはその基底をなし, 任意のゲームをこの基底によって線形結合表現したときの係数が満場一致係数である. $x \in \{0, 1\}^n$ とした場合,

$$u_S(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x_i = 1, \forall i \in S \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるが, Lovász 拡張は, この式の一般の $x \in \mathbf{R}_+^n$ の場合へのひとつの拡張になっている.

定理 9 ゲーム v の Lovász 拡張について, 次式が成り立つ:

$$\hat{v}(x) = \sum_{S \subseteq N} d_S(v) \min_{i \in S} x_i$$

これ以外の拡張として, Hammer and Rudeanu による多重線形拡張がある:

$$\hat{v}(x) = \sum_{S \subseteq N} d_S(v) \prod_{i \in S} x_i$$

5 凸幾何上で定義されたゲーム

これまでの提携形ゲームでは, $v: 2^N \rightarrow \mathbf{R}$, すなわち, 任意の提携 $S \subseteq N$ が実現可能であると仮定してきた. しかしながら, 実際状況では何らかの理由, 例えばイデオロギーの相違や物理的制約などにより, 実現可能な制約に制限が生じることがある. そのため, N の部分集合の族 $\mathcal{F} \subseteq 2^N$ 上で定義されたゲームを考えることが必要になる.

この際, 族 \mathcal{F} に何らかの構造を仮定することが自然である. この構造として, 本稿では凸幾何とマトロイドを考える.

定義 11 族 $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ は次の3つの条件を満足するとき、凸幾何 (*convex geometry*) であるといわれる。

(C1) $\emptyset \in \mathcal{L}$,

(C2) $S, T \in \mathcal{L} \implies S \cap T \in \mathcal{L}$,

(C3) $S \in \mathcal{L}, S \neq \emptyset, \implies \exists j \in N \setminus S : S \cup j \in \mathcal{L}$.

凸幾何 \mathcal{L} の要素である集合 S は凸集合と呼ばれる。凸集合 $S \in \mathcal{L}$ の要素 i は $S \setminus i \in \mathcal{L}$ のとき S の端点であるといわれる。 S の端点全体の集合は、 $\text{ex}(S)$ で表される。

定義 12 凸幾何 \mathcal{L} 上で定義されたゲームとは、 $v(\emptyset) = 0$ を満足する関数 $v : \mathcal{L} \rightarrow \mathbf{R}$ である。 \mathcal{L} 上で定義されたゲーム全体の集合を $\Gamma(\mathcal{L})$ で表す。

さて、通常のゲームに対する Shapley 値は次のように解釈される。プレイヤーが一人ずつ提携に加わっていき最終的に全体提携が形成されるものとする。その際プレイヤーの順列は同じ確率で生じるものとし、各プレイヤー i の限界提携値のすべての順列に関する期待値をとったものが Shapley 値である。凸幾何はこの順列の形成に制限を与えたものと考えることができる。もちろん、何の制限も与えない場合に相当する 2^N 自身も凸幾何であるから、凸幾何上のゲームに対する結果はすべて従来の提携ゲームの場合にも成立する。

凸幾何上のゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ に対し、その解 $\Phi_i(v) \in \mathbf{R}$ はプレイヤー i の利得を表すものとする。限界提携値に基づく解として一般的なものが、次の確率値である。

定義 13 プレイヤー $i \in N$ に対する確率値 (probabilistic value) とは、次の条件を満足する関数 $\Phi_i : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}$ のことをいう：

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{L}: i \in \text{ex}(S)} p_S^i (v(S) - v(S \setminus i)), \quad p_S^i \geq 0, \quad \sum_{S \in \mathcal{L}: i \in \text{ex}(S)} p_S^i = 1.$$

注意 1 もし $T = S \setminus i$ ととると次の同値な表現を得る：

$$\Phi_i(v) = \sum_{T \in \mathcal{L}: i \notin T, T \cup i \in \mathcal{L}} p_T^i (v(T \cup i) - v(T)).$$

以下では、確率値を特徴付ける公理を述べる。

線形性公理 すべての $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ と $v, w \in \Gamma(\mathcal{L})$ に対し

$$\Phi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha \Phi_i(v) + \beta \Phi_i(w).$$

定義 14 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ においてプレイヤー $i \in N$ がダミー (dummy) であるとは、すべての $T \in \mathcal{L}$, $i \notin T$, $T \cup i \in \mathcal{L}$ に対し

$$v(T \cup i) - v(T) = \begin{cases} v(i), & \text{if } \{i\} \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つことをいう。

注意 2 次の定義は同値である: すべての $S \in \mathcal{L}$, $i \in \text{ex}(S)$ に対し,

$$v(S) - v(S \setminus i) = \begin{cases} v(i), & \text{if } \{i\} \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ダミー公理 もしプレイヤー $i \in N$ が $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ においてダミーであれば,

$$\Phi_i(v) = \begin{cases} v(i), & \text{if } \{i\} \in \mathcal{L} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定義 15 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ は, もしすべての $S \subseteq T$ なる $S, T \in \mathcal{L}$ に対し $v(S) \leq v(T)$ を満足するなら, 単調 (monotone) であるといわれる.

単調性公理 もしゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ が単調ならば, $\Phi_i(v) \geq 0$.

定理 10 $\Phi_i : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}$ を $\{i\} \in \mathcal{L}$ なるプレイヤー i に対する値とする. Φ_i が線形性公理, ダミー公理, 単調性公理を満足するのは, それが確率値であるときかつそのときに限る.

集合 S に対し, S を含むすべての凸集合の共通集合 (凸) を S の凸包といい, \overline{S} で表す. $\overline{\{i\}}$ 上で定義された満場一致ゲームを

$$u_{\overline{\{i\}}}(T) = \begin{cases} 1, & \text{if } \overline{\{i\}} \subseteq T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{if } i \in T \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とするとき, $i \in \mathcal{L}$ とは限らない場合でも次の結果が成り立つ.

定理 11 $\Phi_i : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}$ をプレイヤー i に対する値とする. Φ_i が線形性公理, ダミー公理, 単調性公理および $\Phi_i(u_{\overline{\{i\}}}) = 1$ を満足するのは, それが確率値であるときかつそのときに限る.

さらに, 各プレイヤーに対する値をベクトルとしてみたグループ値 Φ について考察する. すなわち, $\Phi : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}^n$, $v \mapsto (\Phi_1(v), \dots, \Phi_n(v))$ とする.

有効性公理. 各ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ に対し, $\sum_{i \in N} \Phi_i(v) = v(N)$.

定理 12 Φ を有効性公理を満たすグループ値とする. このとき, もしすべての $i \in N$ に対し Φ_i が線形性公理, ダミー公理, 単調性公理を満足するならば, Φ_i は確率値である.

凸幾何 $\mathcal{L} \subseteq 2^N$ に対する適合順序とは, N の要素の全順序 $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ で, すべての $j = 1, \dots, n$ に対し $\{i_1, i_2, \dots, i_j\} \in \mathcal{L}$ を満足するものをいう. \mathcal{L} の適合順序は \mathcal{L} 内の極大鎖に対応する. $c(\mathcal{L})$ で適合順序 (極大鎖) の総数を, $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ ですべての適合順序 (極大鎖) の集合を表す. $i \in N$ と $C = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ が与えられたときに, 集合

$$C(i) := \{j \in N : j \leq i \text{ in } C\}$$

と定義する。 $C(i)$ は凸集合で、 $i \in \text{ex}(C(i))$ である。

ゲーム v における適合順序（極大鎖） C に対応する限界価値（貢献度）ベクトル $a^C(v) \in \mathbf{R}^n$ は

$$a_i^C(v) = v(C(i)) - v(C(i) \setminus i), \quad \text{for all } i \in N$$

で定義される。これに基づくグループ値を適合順序値という。

定義 16 $\{p_C : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$ を $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ 上の確率分布とする。 $\Gamma(\mathcal{L})$ 上の適合順序値 (compatible-order value) は関数

$$\Omega : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}^n, \quad v \mapsto (\Omega_1(v), \dots, \Omega_n(v)),$$

で、その $i \in N$ に対する各成分が

$$\Omega_i(v) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} a_i^C(v) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} p_C [v(C(i)) - v(C(i) \setminus i)].$$

で定義されるものをいう。

定理 13 $\Omega = (\Omega_1(v), \dots, \Omega_n(v))$ を $\Gamma(\mathcal{L})$ 上の適合順序値とすると、 Ω は有効性公理を満たし、各 $i \in N$ に対し Ω_i は確率値である。

定理 14 $\Phi : \Gamma(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{R}^n$ を有効性公理を満たすグループ値で各 $i \in N$ に対し Φ_i は確率値であるとする。そのとき Φ は適合順序値である。

適合順序値は、通常の提携形ゲームに対し鶴見と著者らによって考察された非対称解を凸幾何上のゲームに限定し、基準要素として適合順序を考えた場合の値になる。したがって、上記の研究で得られた公理的特徴づけが可能である。

グループ値 $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ はゲーム v と同様 $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ 上の確率分布 p にも依存するので、

$$\Phi(v; p) = (\Phi_1(v; p), \dots, \Phi_n(v; p))$$

で表す。 $\bar{C} \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ に対し確率分布 $p^{\bar{C}}$ を次式で定義する。

$$p^{\bar{C}} = \begin{cases} 1 & \text{if } C = \bar{C} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

公理 P1 $\Phi_i(v; p^{\bar{C}}) = v(\bar{C}(i)) - v(\bar{C}(i) \setminus i)$

公理 P2 p^1, p^2 が $\mathcal{C}(\mathcal{L})$ 上の確率分布で、 $\alpha_1, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ならば

$$\Phi(v; \alpha_1 p^1 + \alpha_2 p^2) = \alpha_1 \Phi(v; p^1) + \alpha_2 \Phi(v; p^2)$$

定理 15 適合順序値 $\Phi(v; p)$ は公理 P1, P2 を満足する唯一のグループ値である。

次に、凸幾何上のゲームに対し、コアや Weber 集合を考える。

定義 17 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ のコアは次の集合である.

$$C(\mathcal{L}, v) := \{x \in \mathbf{R}^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \forall S \in \mathcal{L}\}$$

定義 18 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ の Weber 集合は次の集合である.

$$\text{Weber}(\mathcal{L}, v) := \text{conv}\{a^C(v) : C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})\}$$

定義 19 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ に対する Shapley 値は

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{c(\mathcal{L})} \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})} a_i^C(v), \quad \forall i \in N$$

で与えられる.

凸ゲームの概念を凸幾何上のゲームに拡張すると, 準凸ゲームが定義される.

定義 20 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ は, もし $S \cup T \in \mathcal{L}$ を満たすすべての $S, T \in \mathcal{L}$, に対し

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

を満足するなら, 準凸 (quasi-convex) であるといわれる.

命題 3 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ が準凸であるための必要十分条件は, $T \subset S$ を満たすすべての $S, T \in \mathcal{L}$ とすべての $i \in \text{ex}(S) \cap T$ に対し

$$v(S) - v(S \setminus i) \geq v(T) - v(T \setminus i).$$

が成り立つことである.

定理 16 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ が準凸であるための必要十分条件は, すべての $C \in \mathcal{C}(\mathcal{L})$ に対し $a^C(v) \in C(\mathcal{L}, v)$ が成り立つことである.

系 1 ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ が準凸であるための必要十分条件は, $\text{Weber}(\mathcal{L}, v) \subseteq C(\mathcal{L}, v)$ が成り立つことである.

6 マトロイド上で定義されたゲーム

この章では, マトロイド上で定義されたゲームに対して, 簡単に触れておく.

定義 21 族 $\mathcal{M} \subseteq 2^N$ は次の3つの条件を満足するとき, マトロイド (matroid) であるといわれる.

(M1) $\emptyset \in \mathcal{M}$.

(M2) $S \in \mathcal{M}, T \subseteq S, \implies T \in \mathcal{M}$.

(M3) $T, S \in \mathcal{M}, |S| = |T| + 1, \implies \exists i \in S \setminus T : T \cup i \in \mathcal{M}$.

マトロイドは一次独立性の概念を一般化したものであるから、マトロイド上で定義されたゲームは、より多くのプレイヤーが参加すると提携の実現が難しくなっていく状況を反映したものと考えられる。例えば、マトロイド $M_n(i||j)$ 上のゲームは、二人のプレイヤー i と j が完全な敵対関係にあり、彼らを同時に含む提携が決して形成されないような状況を反映する。

マトロイド上のゲームに対しては、以下のような成果が得られている (Bilbao[1])。

1. マトロイドのランク関数そのものをゲームとみたときのコアとマトロイドの基底の関係。
2. 線形性, ダミー性, 有効性, 対称性による Shapley 値の特徴づけと具体的表現。
3. 各プレイヤーの限界貢献度に基づく一般的解としての準確率値。
4. マトロイド上のゲームでは、一般には全体提携は形成されず基底が形成される。このことに留意した解概念としての確率 Shapley 値。

参考文献

- [1] Bilbao, J.M.: *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers (2000).
- [2] Bilbao, J.M. and J.E. Martínez-Legaz: Some applications of convex analysis to cooperative game theory, *Journal of Statistics and Management Systems* (2002).
- [3] Butnariu, D.: Stability and Shapley value for an n -person fuzzy game, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 63-72.
- [4] Driessen, T.: *Cooperative Games, Solutions and Applications*, Kluwer Academic Publishers (1988).
- [5] Fujishige, S.: *Submodular Functions and Optimization*, North-Holland (1991).
- [6] Murota, K.: Discrete convex analysis, *Mathematical Programming* 82 (1998) 357-375.
- [7] 室田：離散凸解析，共立出版 (2001).
- [8] Tsurumi, M., T. Tanino and M. Inuiguchi: The core and the related solution concepts in cooperative fuzzy games, *日本ファジィ学会誌* 12-1 (2000) 193-202.
- [9] Tsurumi, M., T. Tanino and M. Inuiguchi: A Shapley function on a class of cooperative fuzzy games, *European Journal of Operational Research* 129 (2001) 596-618.
- [10] Tsurumi, M., T. Tanino and M. Inuiguchi: Solutions of cooperative games based on contribution and their applications, *RIMS 講究録* 1241 (2001) 30-38.
- [11] Tsurumi, M., T. Tanino and M. Inuiguchi: Nonsymmetric values in cooperative games and their applications, *Proceedings of NACA 2001* (2002) to appear.