数理解析研究所講究録 1299 巻 2003 年 39-50

ある非合同部分群に対する Modular fusion algebra の非存在について

九大数理　田上　真 (Makoto Tagami)
Graduate School of Mathematics, Kyushu University

1 Introduction

代数的組合せ論に Fusion Algebra (以下 FA と表す) という概念がある。FA は数理物理の共形場理論から出てきたものであるが、坂内英一先生により FA は組合せ論における Character algebra と一対一に対応していることが示されている ([1])。この報告で考えるのは、FA に SL(2,$\mathbb{Z}$) の表現が付随している Modular fusion algebra (以下 MFA) についてである。この MFA について次のよく知られた予想がある。

予想 ([8]). MFA に付随した表現の Kernel は合同部分群である。

ここで $\overline{\Gamma} := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $\overline{\Gamma}(n) := \{\mathrm{A} \in \overline{\Gamma} \mid \mathrm{A} \equiv \mathrm{I} \pmod{n}\}(n \in \mathbb{N})$ とした時、$\overline{\Gamma}$ の部分群 G が合同部分群であるとは、$G \supset \overline{\Gamma}(n)$ なる $n \in \mathbb{N}$ が存在することである。合同部分群でない部分群を非合同部分群という。

この予想を基に Eholzer は Nobs の SL(2,$\mathbb{Z}_{p^\lambda}$) の既約表現の決定 ([16] , [17]) を用いて、4 次元以下の strongly MFA 、そして 24 次元以下の nondegenerate strongly MFA を分類した ([8])。この報告で、Eholzer の研究の ある種の imitation を考える。すなわち、次の問題を考える。この問題は九大の坂内英一先生によって提起された。

問題 . $\Gamma := \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ とする。Γ の $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を含む有限指数の正規部分群を G とする。その時 Γ/G の既約表現は MFA に付随するか？

私たちはこの予想の反例を探したい。反例をこのような正規部分群の中から探す理由はこの中に無限個の非合同部分群があり、しかもこの非合同部分群はある意味で合同部分群に最も近い非合同部分群だからである。このことについてはあとで詳しく説明する。しかし、この問題に対する答えは次の定理で与えられる。

定理 1.1. G を Γ の $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を含む有限指数の正規部分群とする。この時、Γ/G の次数 1 以外の既約表現は MFA に付随していない。

MFA に付随している表現は SL$(2,\mathbb{Z})$ の表現であるが、この報告では PSL$(2,\mathbb{Z})$ だけを考える。しかし、SL$(2,\mathbb{Z})$ でも結果は同じである。すなわち、SL$(2,\mathbb{Z})$ の場合は $-\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を含む正規部分群 G で MFA に付随しているものはあるかという問題になる、しかし SL$(2,\mathbb{Z})/G$ の既約表現は PSL$(2,\mathbb{Z})$ の時に出てくる既約表現以外でてこない。以下、この報告で使われている言葉の定義を述べ、定理 1.1 の証明の概略を述べる。

2 Fusion algebra and modular fusion algebra

Fusion algebra の定義をどのようにするかはいまだ議論されているようであるが、この報告では [1] や [8] で与えられている定義を用いる。

定義 2.1 (Fusion algebra). A を $\mathbb{C}$ 上の結合可換代数とする。A が 次の条件を満たす基底 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ を持つとき、 A を fusion algebra と言う。
$x_i \cdot x_j := \sum_{k=0}^{n} N_{ij}^k x_k$ とした時、

(i) $N_{i0}^j = \delta_{ij}$ (δ はクロネッカーの δ)

(ii) $N_{ij}^k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

(iii) $\exists$ involution $\hat{}: \{0,1,\dots,n\} \longrightarrow \{0,1,\dots,n\}$ s.t $N_{ij}^0 = \delta_{i\hat{j}}$ and $N_{\hat{i}\hat{j}}^{\hat{k}} = N_{ij}^k$

N_{ij}^k を A の structure constants と言う。

$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とした時、よく知られてるように

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = < S, T \mid S^4 = I\,,\, S^2 = (ST)^3 >$$

が成り立つ。次に MFA を定義する。

定義 2.2 (Modular fusion algebra). A を structure constants N_{ij}^k を持った n+1 次元の FA とする。ρ を SL$(2,\mathbb{Z})$ の n+1 次のユニタリー表現とする。ここで表現の行列は $\{0,1,\dots,n\}$ で index 付けられているとする。$(A\,,\,\rho)$ が次の条件を満たす時、$(A\,,\,\rho)$ を modular fusion algebra と言う。

(i) ρ(S) は対称、ρ(T) は対角行列。

(ii) $N_{ij}^0 = \rho(S^2)_{ij}$

(iii) (Verlinde's formula)

$$N_{ij}^k = \sum_{m=0}^{n} \frac{\rho(S)_{im}\rho(S)_{jm}\overline{\rho(S)_{km}}}{\rho(S)_{0m}}.$$

特に 1 次元の MFA を trivial MFA という。

次に定義する MFA の nondegenerate という条件は Eholzer([8]) によって導入された。

定義 2.3 (Nondegenerate). (A, ρ) を MFA とする。$\rho(T)$ の特性多項式が重根を持たないとき (A, ρ) を nondegenerate MFA と言う。$\rho(T)$ を nondegenerate とも言う。

この nondegenerate に関して、Eholzer([8]) による 2 つの補題がある。

補題 2.1. *(A, ρ) を nondegenerate MFA とする。その時 ρ は既約である。*

補題 2.2. ρ 、ρ' を同値既約ユニタリー表現で、$\rho(T) = \rho'(T)$ かつ $\rho(T)$ は nondegenerate な対角行列とする。この時あるユニタリー対角行列 D が存在し、$\rho = D^{-1}\rho' D$ が成り立つ。

注意 . (i) 補題 2.1 によって nonndegenerate MFA を探すには既約表現から探せばいいということがわかる。
(ii) ρ を $\rho(T)$ が nondegenerate 対角行列であるユニタリー既約表現とする。ρ' を $\rho(T)$=$\rho'(T)$ を満たす ρ と同値なユニタリー表現とする。この時、補題 2.2 からあるユニタリー対角行列 $D = \begin{pmatrix} d_0 & & & \\ & d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$ が存在し、$\rho' = D^{-1}\rho D$ が成り立つ。

よって $\rho'(S)_{ij}$=$\dfrac{d_j}{d_i}\ \rho(S)_{ij}$ である。ρ と ρ' に Verlinde's formula を適用すれば、

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{\rho(S)'_{im}\rho(S)'_{jm}\overline{\rho(S)'_{km}}}{\rho(S)'_{0m}} = \frac{d_k}{d_i d_j}\sum_{m=0}^{n} \frac{\rho(S)_{im}\rho(S)_{jm}\overline{\rho(S)_{km}}}{\rho(S)_{0m}}$$

$|d_i|$=1 であるので、もし ある ρ' が MFA に付随しているならば、$\forall i,\ j,\ k$ に対して、

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \frac{\rho(S)_{im}\rho(S)_{jm}\overline{\rho(S)_{km}}}{\rho(S)_{0m}}\right| \in \mathbb{Z} \text{ でなければいけない。}$$

この判定条件はとても有用である。私たちはこの判定条件によって MFA に付随している表現の非存在を証明する。

3 剰余群の構造

この節は Newman([13]) に従う。

Γ において, $x := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $z := xy = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a :=$

$[x,y]=xyxy^2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $b:=[x,y^2]=xy^2xy=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ とおく。

また Γ' , Γ'' をそれぞれ第1、第2交換子群を表すとする。この時よく知られているように、

(1) $\Gamma=<x,y\mid x^2=y^3=1>$

(2) $\Gamma'=<a,b>$ (a、b によって生成される自由群)

(3) $\Gamma=\sum_{r=0}^{5}z^r\Gamma'$

(4) $\Gamma'=\sum_{i,j\in}a^ib^j\Gamma''$。($\Gamma'/\Gamma''$ は rank2 の自由アーベル群)

が成り立つ。また、$[a,b^{-1}]=\begin{pmatrix}1&6\\0&1\end{pmatrix}=z^6$ 従って $z^6\in\Gamma''$ であることに注意する。

$\triangle(m)=z^m$ を含む最小の正規部分群 とすると $1\leq \mathrm{m}\leq 5$ に対して $\triangle(m)=\Gamma(m)$ が成り立つことが Brenner([3]) によって知られている。$m=6$ で初めて主合同部分群と異なり、$\triangle(6)=\Gamma''$ となることが Newman([14]) によって示された。一般に合同部分群 G に対して、$z^m\in G$ なる最小の m と $G\subset\Gamma(m)$ なる最小の m とは一致するので $m=6$ の時に初めて非合同部分群が現れる。このことが、問題にでてきた正規部分群がもっとも合同部分群に近いものであると言った理由である。以下、Γ'' を含む正規部分群を考える。

G を z^6 を含む正規部分群とする。$\triangle(2)=\Gamma(2)$ 、$\triangle(3)=\Gamma(3)$ であるので、

$$z^2\in G\Longrightarrow G\supset\Gamma(2)、$$

$$z^3\in G\Longrightarrow G\supset\Gamma(3)$$

([8]) で、$\Gamma/\Gamma(2)\simeq S_3$ (3次対称群) 、$\Gamma/\Gamma(3)\simeq A_4$ (4次交代群) の1次以外の既約表現は MFA に付随していないことが確かめられている。次に z の Γ/G における位数が6であるとする。この場合に Newman ([13]) による次の補題が成り立つ。

補題 3.1 (Newman). $\Gamma\rhd G$、z の Γ/G における位数が6であるとする。この時 $\Gamma'\supset G\supset\Gamma''$。

以下は $\Gamma'\supset G\supset\Gamma''$ なる正規部分群 G だけを考える。そのような正規部分群達は Newman によって分類されている。([13])

定理 3.1. $\Gamma'\supset G\supset\Gamma''$、$G\neq\Gamma''$ なる正規部分群達と次のような整数の組 *(p,m,d)* の間に1対1対応がある。

$$p>0\ ,\ 0\leq m\leq d-1\ ,\ m^2+m+1\equiv 0\pmod d.$$

対応は *(p,m,d)* に対して

$$G=\sum_{i,j\in}A^iB^j\Gamma''\ (A:=a^pb^{mp}\ ,\ B:=b^{dp})\ を対応させる。$$

さらにNewmanは[15]で$\Gamma' \supset G \supset \Gamma''$が合同部分群になるのは(p,m,d) = (1,0,1), (1,1,3), (2,0,1), (2,1,3)だけであることを示した。従って、私たちは無限個の非合同部分群を得る。
$G = \sum_{i,j\in} A^i B^j \Gamma''$where $A := a^p b^{mp}$, $B := b^{dp}$ とする。この時

$$\Gamma' = \sum_{\substack{i=0,..,p-1\\ j=0,..,dp-1}} a^i b^j G、$$

よって

$$\Gamma = \sum_{i=0,..5} \sum_{\substack{j=0,..,p-1\\ k=0,..,dp-1}} z^i a^j b^k G$$

だから、剰余群の構造は

$$\Gamma/G \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z})$$

となる。$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}(=< z >)$ の $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z}$ への半直積としての作用は次のように与えられる。
$\forall (i,j) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
S^0(i,j) &:= (i,j),\\
S(i,j) &:= z^{-1}(i,j)\,z = (-mi-j, (m^2+m+1)i+(m+1)j),\\
S^2(i,j) &:= z^{-2}(i,j)\,z^2 = (-(m+1)i-j, (m^2+m+1)i+mj),\\
S^3(i,j) &:= z^{-3}(i,j)\,z^3 = (-i,-j),\\
S^4(i,j) &:= z^{-4}(i,j)\,z^4 = -S(i,j),\\
S^5(i,j) &:= z^{-5}(i,j)\,z^5 = -S^2(i,j).
\end{aligned}$$

4 The little group method

この節で剰余群の既約指標を求める為に、Little group method を復習しておく([6]参照)。この方法で $G = H \ltimes A$ (A アーベル群)の形の既約表現を求めることが出来る。この報告では、G の既約表現の同値類の全体を $\mathrm{Irr}(G)$ で表すことにする。

$G := H \ltimes A$ （A はアーベル群）とする。H は $\mathrm{Irr}(A)$ に次のように作用する。$\forall h \in H, \forall a \in A, \forall \rho \in \mathrm{Irr}(A)$ に対して、

$$(h\rho)(a) := \rho(a^h),$$

ここで a^h は H の A 上の作用を表す。

$$\mathrm{Irr}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} \hat{A}_i \quad (H\text{の作用による軌道分解})\text{とする。}$$

$\rho_i \in \hat{A}_i$ を一つ固定し、

$$H_i := \{h \in H \mid h\rho_i = \rho_i\} \ , \ G_i := H_i \cdot A.$$

と定義する。この時、$\chi \in \mathrm{Irr}(H_i)$ は次のようにして $\mathrm{Irr}(G_i)$ の元とみることができる。

$$\forall h \in H_i, \forall a \in A, \ \chi(ha) := \chi(h)$$

また ρ_i は、

$$\rho_i(ha) := \rho_i(a)$$

とおくと、$\rho_i \in \mathrm{Irr}(G_i)$ とみることができる。$\chi, \rho_i \in \mathrm{Irr}(G_i)$ と見て、

$$\theta_{\chi i} := (\chi \otimes \rho_i)^G \quad \text{と定義する。}$$

ここで $(\chi \otimes \rho_i)^G$ は $\chi \otimes \rho_i$ の G への誘導表現を表す。この時 $\theta_{\chi i} \in \mathrm{Irr}(G)$ で

$$\mathrm{Irr}(G) = \{\theta_{\chi i} \mid 1 \leq i \leq n \ , \ \chi \in H_i\} \quad \text{となる。}$$

5 次数２、３の既約表現

この節で、$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z})$ の既約表現を求め、次数2、3の表現からMFAが出来るかどうか考える。この報告を通して ξ_n は1の原始 n 乗根を表すとする。$G := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z})$, $H := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $A := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z}$ とする。$\forall (i,j),\ (k,l) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z}$, $\phi_{ij}(k,l) := \xi_{dp}^{ikd+jl}$ と定義すると、

$$\mathrm{Irr}(A) = \{\phi_{ij} \mid (i,j) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z}\} \text{ である。}$$

H は $\mathrm{Irr}(A)$ に

$$\forall (l,m) \in A, \ (z^k\phi_{ij})(l,m) := \phi_{ij}(S^k(l,m)) \text{ で作用する。}$$

$\phi_{ij} \in \mathrm{Irr}(A)$ を一つ固定する。$H_{ij} := \{h \in H \mid (h\phi_{ij}) = \phi_{ij}\}$, $G_{ij} := H_{ij} \cdot A$ とおく。この時、明らかに次の補題が成り立つ。

補題 5.1. $z \in H_{ij} \iff i = j = 0$
$z^2 \in H_{ij} \iff 3j \equiv 0 \ , \ id \equiv (m-1)j \pmod{dp}$
$z^3 \in H_{ij} \iff 2i \equiv 0 \pmod{p} \ , \ 2j \equiv 0 \pmod{dp}$

$\psi \in \mathrm{Irr}(H_{ij})$ を1つとる。$\theta_{\psi ij} := (\psi \otimes \phi_{ij})^G$ とすると、little group method によりこれは既約表現で、G の既約表現はすべてこのような形で得られる。H_{ij} はアーベル群なので、 $\deg\psi = 1$。よって、

$$\deg\theta_{\psi ij} = |G : G_{ij}| = |H : H_{ij}|。$$

だから、Gの既約表現の次数は1、2、3、6であることがわかる。では、次数2と3の表現からMFAが出来るかを調べる。ここで、$x = z^3S^4(0,1) \in G$に注意する。

(i) 次数 **2**

次数 2 の既約表現は $|H : H_{ij}| = 2$ の時、即ち $H_{ij} =< z^2 >$ の時に出てくる。この時、

$$G_{ij} =< z^2 > \cdot A\ ,\ G = G_{ij} + zG_{ij}$$

となる。$0 \le \forall k, l \le 2,\ \psi_k(z^{2l}) := \omega^{kl}\ (\omega := \xi_3)$ とおく。$\theta_{kij} := (\psi_k \otimes \phi_{ij})^G$ とすると、

$$\theta_{kij}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^k \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \theta_{kij}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{2k}\xi_{dp}^{id-mj} \\ \omega^k\xi_{dp}^{id-(m+1)j} & 0 \end{pmatrix} となる。$$

補題5.1より $z^2 \in H_{ij} \iff 3j \equiv 0\ ,\ id \equiv (m-1)j\ (\mathrm{mod}\ dp)$ であるから、

$$\theta_{kij}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{2k}\xi_{dp}^{-j} \\ \omega^k\xi_{dp}^{-2j} & 0 \end{pmatrix} となる。$$

$\alpha := \xi_6$ 、$\beta := \xi_{dp}$ とおく。$P := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \alpha^k & -\alpha^k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ で θ_{kij} の共役をとると

$$P^{-1}\theta_{kij}(z)P = \begin{pmatrix} \alpha^k & 0 \\ 0 & -\alpha^k \end{pmatrix}, P^{-1}\theta_{kij}(x)P = \frac{\alpha^{3k}}{2}\begin{pmatrix} \beta^{-j}+\beta^{-2j} & \beta^{-j}-\beta^{-2j} \\ \beta^{-2j}-\beta^{-j} & -(\beta^{-j}+\beta^{-2j}) \end{pmatrix}$$

$3j \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ dp)$ であるから、$\beta^{-j} = \omega^l\ (l = 1, 2)$ となる。(もし $l = 0,\ j = 0$ ならば、$id \equiv (m-1)j\ (\mathrm{mod}\ dp)$ であるので、それはi=0を意味する。これは $z \notin H_{ij}$ に矛盾する。)

よって $P^{-1}\theta_{kij}(x)P$ の可能性は

$$\frac{\alpha^{3k}}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},\ \frac{\alpha^{3k}}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} の2つしかない。$$

上の 2 つの表現はそれぞれ $N_1(\chi_1) \otimes \rho_k$ と $N_1(\chi_1) \otimes \rho_{k+3}$ に同値である。ここで $\rho_k(x) := (-1)^k$、$\rho_k(z) := \alpha^k$ で、また $N_1(\chi_1)$ については[17]の記号を使った。$N_1(\chi_1)$ のKernelは合同部分群なので、反例にはならない。なお、[8] にこれらの表現からはMFAは出てこないということが確かめられている。

(ii) 次数 **3**

次数 3 の表現は $|H : H_{ij}| = 3$ の時, 即ち $H_{ij} =< z^3 >$ の時に出てくる。この時、

$$G_{ij} =< z^3 > \cdot A\ ,\ G = G_{ij} + zG_{ij} + z^2G_{ij} となる。$$

$0 \leq \forall k, l \leq 1, \psi_k(z^{3l}) := (-1)^{kl}$ とおく。$\theta_{kij} := (\psi_k \otimes \phi_{ij})^G$ とすると、

$$\theta_{kij}(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (-1)^k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \theta_{kij}(x) = \begin{pmatrix} \beta^{id-(m+1)j} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{id-mj} & 0 \\ 0 & 0 & \beta^j \end{pmatrix}$$

補題 5.1 より、$z^3 \in H_{ij} \iff 2i \equiv 0 \pmod p$, $2j \equiv 0 \pmod{dp}$ であり、$\theta_{kij}(x)$ はスカラー行列ではないことと $(xz)^3 = 1$ より、$\theta_{kij}(x)$ の可能性は

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ for } k = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ for } k = 1.$$

しかないことがわかる。上の表現はそれぞれ、$N_1(1, \chi_1) \otimes \rho$ $(\deg \rho = 1)$ の表現と同値である。$N_1(1, \chi_1)$ については [17] の記号を使った。$N_1(1, \chi_1)$ の Kernel は合同部分群なので、これも反例にはならない。なお、[8] にこれらの表現からはまた MFA はでてこないことが確かめられている。
最後に次数 6 の既約表現を考えてみる。

6 次数 6 の既約表現

補題 5.1 の合同式をどれも満たさないような $(i, j) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/dp\mathbb{Z})$ を取ってくる。その時 $H_{ij} = 1$ である。よって、little group method より ϕ_{ij}^G は既約表現になる。

$$\phi_{ij}^G(z) = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \end{pmatrix}$$

まずこの行列を $P := \frac{1}{\sqrt{6}}(\alpha^{cd})$ (ここでα^{cd}は (c, d) 成分を表す) を用いて対角化する。

$$P^{-1}\phi_{ij}^G(z)P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \alpha^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha^{-5} \end{pmatrix}$$

よって $\phi_{ij}^G(z)$ は非退化である。

$$P^{-1}\phi_{ij}^G(x)P = P^{-1}\phi_{ij}^G(z^3S^4(0,1))P = (P^{-1}\phi_{ij}^G(z)P)^3P^{-1}\phi_{ij}^G(S^4(0,1))P$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} (\sum_{l=0}^{5} \alpha^{(-c+d)l}\phi_{ij}^G(S^{4+l}(0,1)),$$

ここで $\sum_{l=0}^{5}\alpha^{(-c+d)l}\phi_{ij}^G(S^{4+l}(0,1))$ は (c,d) 成分を表し、S の index は mod 6 で計算される。k_i 、 x_i を次のように定義する。

$$S^0(0,1) = (0,1) \quad k_0 := j,$$

$$S^1(0,1) = (-1, m+1) \quad k_1 := -id + (m+1)j,$$

$$S^2(0,1) = (0,1) \quad k_2 := -id + mj,$$

$$S^3(0,1) = (0,-1) \quad k_3 := -j,$$

$$S^4(0,1) = -S^1(0,1) \quad k_4 := -k_1,$$

$$S^5(0,1) = S^2(0,1) \quad k_5 := -k_2,$$

$x_i := \sum_{l=0}^{5}\alpha^{il}\beta^{k_{l+4}}$ （ここで k の index は mod 6 で計算されている)。この時、x_i を用いて $P^{-1}\phi_{ij}^G(x)P$ は次のように簡単になる。

$$P^{-1}\phi_{ij}^G(x)P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -x_5 & -x_0 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 \\ x_4 & x_5 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_0 & -x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_0 & x_1 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & -x_0 \end{pmatrix}.$$

補題 2.2 によって、ρ が $\rho'(z) = \rho(z)$ であるような、同値なユニタリー表現に移ると

すると、あるユニタリー行列 $D = \begin{pmatrix} d_0 & & & \\ & d_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_5 \end{pmatrix}$ が存在し、$\rho' = D^{-1}\rho D$ と

なる。よって ρ' が MFA に付随しているならば、 $x_i \neq 0$ $(\forall i)$ が成り立たなければならない (もしある x_i が 0 になると、Verlinde's formula に矛盾する)。よって、以下 $x_i \neq 0$ $(\forall i)$ と仮定する。この時、$(PD)^{-1}\phi_{ij}^G(x)PD$ の成分比較によって、次の補題を得る。

補題 6.1. $(PD)^{-1}\phi_{ij}^{G}(x)PD$ が 対称

$$\iff d_1^2 = -\frac{x_5}{x_1}\ ,d_2^2 = \frac{x_4}{x_2},\ d_3^2 = -1\ ,d_4^2 = \frac{x_2}{x_4},\ d_5^2 = -\frac{x_1}{x_5}\ ,x_1x_2 = x_4x_5\ ,x_2^3 = x_4^3$$

この補題によって、$(PD)^{-1}\phi_{ij}^{G}(x)PD$ を対称にするような d_i は ±1 の 2 つの可能性しかないことが分かる。 またこの補題から明らかに次の補題を得る。

補題 6.2. $(PD)^{-1}\phi_{ij}^{G}(x)PD$ が対称にする D が存在する $\iff$ ある i が存在し、$\omega^i x_1 = x_5$ かつ $x_2 = \omega^i x_4$

この補題の式が成り立つとすると $x_i := \sum_{l=0}^{5}\alpha^{il}\beta^{k_{l+4}}$ であるので、$\omega^i x_1 = x_5$ と $x_2 = \omega^i x_4$ の方程式を計算するとこの条件が i, j, d, p, m に関する合同式の条件と同値になることが分かる。

補題 6.3. *(i)* $x_1 = x_5\ ,\ x_2 = x_4 \iff id \equiv (m-1)j \pmod{dp}$.
(ii) $\omega x_1 = x_5\ ,\ x_2 = \omega x_4 \iff 2id \equiv (2m+1)j \pmod{dp}$
(iii) $\omega^2 x_1 = x_5\ ,\ x_2 = \omega^2 x_4 \iff id \equiv (m+2)j \pmod{dp}$

$I := \xi_4$ とする。$x_1 = x_5$、$x_2 = x_4$ の場合のみ、MFA の非存在を示す。他の場合も同様である。$x_1 = x_5$、$x_2 = x_4$ の時、$d_0 = 1\ ,\ d_1 = I\ ,\ d_2 = 1\ ,\ d_3 = I\ ,\ d_4 = 1\ ,\ d_5 = I$ とおくことによって $(PD)^{-1}\phi_{ij}^{G}(x)PD$ を次のように対称行列にすることが出来る。以下、この d_i の取り方でできる表現を ρ とする。

$$(PD)^{-1}\phi_{ij}^{G}(x)PD = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} x_0 & Ix_1 & x_2 & Ix_3 & x_2 & Ix_1 \\ Ix_1 & -x_0 & Ix_1 & -x_2 & Ix_3 & -x_2 \\ x_2 & Ix_1 & x_0 & Ix_1 & x_2 & Ix_3 \\ Ix_3 & -x_2 & Ix_1 & -x_0 & Ix_1 & -x_2 \\ x_2 & Ix_3 & x_2 & Ix_1 & x_0 & Ix_1 \\ Ix_1 & -x_2 & Ix_3 & -x_2 & Ix_1 & -x_0 \end{pmatrix}$$

注意 . (i) ここで補題 6.1 により, $(PD)^{-1}\phi_{ij}^{G}(x)PD$ を対称行列にするような d_i 達は上の取り方の ±1 しかない。だから、ρ と同値な $\rho(z) = \rho'(z)$, $\rho(x)$: 対称 を満たすユニタリー表現 ρ' に Verlinde's formula を適用しても ρ のそれと ±1 しか違わない。以下、ρ の表現行列に index を i 行目に $i-1$ を対応させて Verlinde's formula を適用したものを N_{ij}^{k} と書くことにする。

(ii) MFA の非存在を示すには行列のすべての index の付け方に対して非存在を示す必要があるが、上の行列はまるで巡回行列のように綺麗になっていることから、全ての index の付け方に対して、±1 を除いて N_{ij}^{k} の値が同じ回数だけ現われることが確かめられる。この事から非存在を示すには、上の index の付け方で整数条件が成り立たないことを示せば十分である。

$x_1 = x_5$、$x_2 = x_4$ の時、合同式から、$c := \cos\frac{2\pi j}{dp}$, $s := \sin\frac{2\pi j}{dp}$ とおくと、

$x_0 = 2(2c^2 + 2c - 1)$, $x_1 = -2sI(1 + 2c)$, $x_2 = 2(2c + 1)(c - 1)$, $x_3 = 4sI(1 - c)$.

とかく事が出来る。もしMFAに付随しているとすると、上の注意から $-N_{12}^3 + N_{13}^4 = 2c$ は整数でなければならない。よって $-1 \leq c \leq 1$ より $c = -1$, $\frac{-1}{2}$, 0 , $\frac{1}{2}$, 1。また

$$N_{11}^1 = -s\frac{16c^5 - 24c^4 - 82c^3 + 5c^2 + 36c - 5}{6(1 + 2c)(c - 1)(2c^2 + 2c - 1)(c + 1)}$$ であるので $c \neq \frac{1}{2}$, 1 , 0 , 1 である。

さらに $N_{11}^4 = \frac{c - 1}{2(2c^2 + 2c - 1)}$ であるので, $c \neq \frac{1}{2}$ となる。

これは矛盾である。$\omega x_1 = x_5$, $x_2 = \omega x_4$ や、$\omega^2 x_1 = x_5$, $x_2 = \omega^2 x_4$ の場合も同じ parameter の部分を調べれば、矛盾が出てくる。

□

Acknowledgement 筆者はこの問題を提起して頂き、多くの有益な御助言を頂いた坂内英一先生に感謝いたします。

参考文献

[1] Eiichi Bannai, Association schemes and fusion algebras (an introduction). *J. Algebraic. Combin.* 2 (1993), no. 4, 327 - 344.

[2] Eiichi Bannai, Etsuko Bannai, O. Shimabukuro, M. Tagami, Modular invariants of the modular data of finite groups , Preprint, April 2001.

[3] J. L. Brenner, The linear homogeneous group.III, *Ann. of Math.* (2) 71 (1960), 210 - 223.

[4] A. Coste, T. Gannon, Congruence subgroups and conformal field theory, in preparation, 2000.

[5] A. Coste, T. Gannon, P. Ruelle, Finite group modular data, *Nuclear Phys.* B581 (2000), no. 3, 679-717.

[6] C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of representation theory with applications to finite groups and orders, *Wiley Classics Libraly Edition Publishes* 1994 vol 1.

[7] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, H. Verlinde, The operator algebra of orbifold models, *Comm. Math. Phys.* 123 (1989), no. 3, 485 -526.

[8] W. Eholzer, On the classification of modular fusion algebras, *Comm. Math. Phys.* 172 (1995), no. 3, 623 - 659.

[9] T. Gannon, Modular data : the algebraic combinatorics of conformal field theory Preprint , Feb 2001.

[10] T. H. Koornwinder, B. J. Schroers, J. K. Slinkerland, and F. A. Bais, Fourier transform and the Verlinde formula for the quantum-double of a finite group, *J. Phys. A:Math. Gen.* 32 (1999), 8539-8549.

[11] G. Lusztig, Leading coefficients of character values of Hecke algebras, *The Arcata Conference on Representaions of Finite Groups (Arcata, Calif.,1986), 235 - 262, Proc. Sympos. Pure Math.,47, Part 2,Amer. Math. Soc., Providence, Ri,1987.*

[12] G. Lusztig, Exotic Fourier transform, *Duke Math. J.* 73 (1994), no. 1, 227 - 241, 243 - 248.

[13] M. Newman, A complete description of the normal subgroups of genus one of the modular group,*Amer. J. Math.* 86 (1964), 17 - 24.

[14] M. Newman, A note on modular groups *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 14 (1963), 124 - 125.

[15] M. Newman, Normal subgroups of the modular group which are not congruence subgroups, *Proceedings of American Mathematical Society*, vol. 16 (1965), 831 - 832.

[16] A. Nobs, Die irreduziblen darstellungen der gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ insbesondere $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$. Teil I, *Comment. Math. Helvetici* 51 (1976), 465 - 489.

[17] A. Nobs, J. Wolfart, Die irreduziblen darstellungen der gruppen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_p)$ insbesondere $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_2)$, Teil II, *Comment. Math. Helvetici* 51 (1976), 491 - 526.