数理解析研究所講究録 1300 巻 2003 年 52-64

Quasicentral approximate units relative to the Macaev norm

京都大学大学院理学研究科　岡安 類 (Rui OKAYASU)
Department of Mathematics,
Kyoto University.

1 Voiculescu による摂動理論

このノートでは常に H を可分無限次元ヒルベルト空間, $\mathbb{B}(H)$ をその上の有界線形作用素全体, $\mathbb{K}(H)$ をコンパクト作用素全体, $\mathbb{F}(H)$ を有限階作用素全体, $\mathbb{F}_n(H)$ はランク n 作用素全体とする. また $\mathbb{B}(H)$ の作用素ノルムを $\|\cdot\|$ で表す. まず対称ノルムイデアルについて簡単に復習する. 詳しくは例えば [GK] を参照せよ.

定義 1 イデアル $\{0\} \neq \mathfrak{S} \subseteq \mathbb{B}(H)$ 上のノルム $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}}$ が次の性質を持つとき**対称ノルム** (symmetric norm) と呼ぶ:

(1) $\|XTY\|_{\mathfrak{S}} \leq \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \|T\|_{\mathfrak{S}}$, $(X, Y \in \mathbb{B}(H), T \in \mathfrak{S})$
(2) $\|T\|_{\mathfrak{S}} = \|T\|$. $(T \in \mathbb{F}_1(H))$

このとき $(\mathfrak{S}, \|\cdot\|_{\mathfrak{S}})$ がバナッハ空間ならば, $\mathfrak{S}$ を**対称ノルムイデアル** (symmetrically normed ideal) と呼ぶ.

定義 2 $T \in \mathbb{K}(H)$ に対して, T の絶対値 $|T| = (T^*T)^{1/2}$ の固有値を重複も込めて大きいものから並べた正の実数列を $s(T) = (s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ と書き, **特異値** (singular-numbers) と呼ぶ.

注意 3 対称ノルムの定義の性質 (1) より特にユニタリー不変である. 即ち, 任意のユニタリー作用素 U, V と $T \in \mathfrak{S}$ に対して,

$$\|UTV\|_{\mathfrak{S}} = \|T\|_{\mathfrak{S}}.$$

これにより対称ノルムは作用素の特異値上の関数であることがわかる.

数列空間

$$\hat{c} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}, \text{有限個を除いて } a_n = 0\}$$

を考える.

定義 4 次を満す関数 $\Phi : \hat{c} \to \mathbb{R}$ を**対称ノルム関数** (symmetric norming function) と呼ぶ:

(1) Φ : norm on $\hat{c}$,
(2) $\Phi((1,0,0,\ldots)) = 1$,
(3) $\Phi((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \Phi((|a_{\pi(n)}|)_{n\in\mathbb{N}})$ for any bijection $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

定義 5 対称ノルム関数 Φ と $T \in \mathbb{K}(H)$ に対して,

$$||T||_\Phi = \Phi(s(T)) = \lim_{n\to\infty} \Phi((s_1(T), \ldots, s_n(T), 0, 0, \ldots))$$

は無限大も込めればいつでも極限が存在する.

定理 6 有限階作用素全体 $\mathfrak{S} = \mathbb{F}(H)$ の上の対称ノルム $||\cdot||_{\mathfrak{S}}$ と対称ノルム関数 Φ の間には

$$||T||_{\mathfrak{S}} = \Phi(s(T)) \text{ for } T \in \mathbb{F}(H)$$

となる 1 対 1 対応が存在する.

定理 7 対称ノルム関数 Φ に対して,

$$\mathfrak{S}_\Phi = \{T \in \mathbb{K}(H) \mid ||T||_\Phi < \infty\}$$

と定義すれば, $(\mathfrak{S}_\Phi, ||\cdot||_\Phi)$ は対称ノルムイデアルである.

注意 8 対称ノルム関数 Φ に対して,

$$\mathfrak{S}_\Phi^{(0)} = \overline{\mathbb{F}(H)}^{||\cdot||_\Phi}$$

と定義すれば, $(\mathfrak{S}_\Phi^{(0)}, ||\cdot||_\Phi)$ も対称ノルムイデアルになる. しかし一般には $\mathfrak{S}_\Phi$ と一致するとは限らない.

例 9 実数 $1 \leq p \leq \infty$ に対して,

$$\Phi_p(a) = ||a||_p = \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| & \text{if } p = \infty, \\ (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p} & \text{if } p < \infty, \end{cases}$$

は対称ノルム関数であり, それぞれ $\mathfrak{S}_{\Phi_\infty} = \mathbb{K}(H), \mathfrak{S}_{\Phi_p} = \mathcal{C}_p(H)$ となる. 特に $(\mathbb{K}(H), ||\cdot||)$, $(\mathcal{C}_p(H), ||\cdot||_p)$ は対称ノルムイデアルである.

例 10 実数 $1 < p \leq \infty$ に対して対称ノルム関数 Φ_p^- を次で定義する：

$$\Phi_p^-(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* n^{-1+1/p}.$$

対応する対称ノルムイデアルを $(\mathcal{C}_p^-(H), ||\cdot||_p^-) = (\mathfrak{S}_{\Phi_p^-}, ||\cdot||_{\Phi_p^-})$ と書く. 特に $p = \infty$ のとき $\mathcal{C}_\infty^-(H)$ は **Macaev イデアル**と呼ばれている.

例 11 実数 $1 \leq p < \infty$ に対して対称ノルム関数 Φ_p^+ を次のように定義する：

$$\Phi_p^+(a) = \sup_{K\in\mathbb{N}} \frac{\sum_{n=1}^{K} a_n^*}{\sum_{n=1}^{K} n^{-1/p}}.$$

対応する対称ノルムイデアルを $(\mathcal{C}_p^+(H), ||\cdot||_p^+) = (\mathfrak{S}_{\Phi_p^+}, ||\cdot||_{\Phi_p^+})$ と書く. またこれは

$$\mathfrak{S}_{\Phi_p^+} \neq \mathfrak{S}_{\Phi_p^+}^{(0)}$$

となる例である.

注意 12 対称ノルムイデアル $\mathcal{C}_p(H), \mathcal{C}_p^-(H), \mathcal{C}_p^+(H)$ 達の間には次のような関係がある：$1 \leq p < q < r \leq \infty$ に対して,

$$\mathcal{C}_p(H) \subsetneqq \mathcal{C}_q^-(H) \subsetneqq \mathcal{C}_q(H) \subsetneqq \mathcal{C}_q^+(H) \subsetneqq \mathcal{C}_r(H)$$

が成立する. また $1/p + 1/q = 1$ $(p > 1)$ ならば,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_p(H)^* &\simeq \mathcal{C}_q(H), \\ \mathcal{C}_p^-(H)^* &\simeq \mathcal{C}_q^+(H), \end{aligned}$$

である. もっと一般に任意の対称ノルム関数 Φ に対して, 対称ノルム関数 Φ^* が存在して,

$$(\mathfrak{S}_\Phi^{(0)})^* \simeq \mathfrak{S}_{\Phi^*}$$

が成立する.

これより Voiculescu による一連の結果である.

定義 13 有限個の作用素の組 $\tau = (T_1, \ldots, T_N) \in \mathbb{B}(H)^N$ と対称ノルム関数 Φ に対して,

$$k_\Phi(\tau) = \liminf_{A \in \mathbb{F}(H)_+^1} \max_{1 \le i \le N} ||AT_i - T_iA||_\Phi$$

とおく. 但し,

$$\mathbb{F}(H)_+^1 = \{A \in \mathbb{F}(H) \mid 0 \le A \le I\}$$

には自然な順序が入っているものとする. 特に $k_p(\tau) = k_{\Phi_p}(\tau)$, $k_p^-(\tau) = k_{\Phi_p^-}(\tau)$ と書くことにする.

注意 14 対称ノルム関数 Φ に関して τ に対する**擬中心近似列** (quasicentral approximate unit) が存在するとは,

$$\begin{aligned}&\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = I,\\ &\lim_{n\to\infty} ||A_nT_i - T_iA_n||_{\mathfrak{S}} = 0 \quad \text{for any } 1 \le i \le N,\end{aligned}$$

となる列 $\{A_n\} \subseteq \mathbb{F}(H)_+^1$ が取れることである. これは

$$k_\Phi(\tau) = 0$$

であることと同値である.

定義 15 部分集合 $X \subseteq \mathbb{B}(H)$ が**対角** (diagonal) とは, 正規直交基底 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ と $\lambda_n(T) \in \mathbb{C}$, $(n \in \mathbb{N}, T \in X)$ が,

$$T\xi_n = \lambda_n(T)\xi_n$$

となるように取れる時をいう.

定理 16 ([Voi1, Corollary 2.6]) 対称ノルム関数 Φ と互いに交換可能な正規作用素の組 $\tau = (T_1, \ldots, T_N) \in \mathbb{B}(H)^N$ に対して以下は同値:

(1) $k_\Phi(\tau) = 0$.

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 互いに交換可能な正規作用素 $S_1, \ldots, S_N \in \mathbb{B}(H)$ が存在して,

$$\begin{aligned}&T_i - S_i \in \mathfrak{S}_\Phi^{(0)},\\ &\{S_1, \ldots, S_N\} : \text{diagonal},\\ &||T_i - S_i||_\Phi < \varepsilon,\end{aligned}$$

が成り立つ.

注意 17 ([Voi1]) 互いに交換可能な自己共役作用素の組 $\tau = (T_1, \ldots, T_N) \in \mathbb{B}(H)^N$ に対して, $k_N(\tau) = 0$ となることが知られている. また常に $k_N^-(\tau) = 0$ となるとは限らないこともわかっている.

具体的な作用素の組 τ について $k_\infty^-(\tau)$ の値を考えよう. 以下のような性質が知られている.

命題 18 ([Voi3]) ヒルベルト空間 H 上の任意の作用素の組 $\tau = (T_1, \ldots, T_N)$ に対して以下が成立.

(1) $k_p(\tau) = 0$ or ∞.
(2) $\mathcal{C}_\infty^-(H) \subsetneqq \mathfrak{S}_\Phi^{(0)} \Longrightarrow k_\Phi(\tau) = 0$.
(3) $k_\infty^-(\tau) < \infty$.
(4) $\tau_N = (T_1, \ldots, T_N)$ を互いに直行する終射影をもつ等距離作用素の組で $(I - \sum_{i=1}^N T_i T_i^*)H$ が $C^*(T_1, \ldots, T_N)$ に対して巡回的 (cyclic) と仮定する. このとき,

$$k_\infty^-(\tau_N) = \log N.$$

(5) 自由群 $\mathbb{F}_N = \langle x_1, \ldots, x_N \rangle$ とその左正則表現を λ とする. このときユニタリー作用素の組 $\lambda_N = (\lambda_{x_1}, \ldots, \lambda_{x_N})$ に対して,

$$\log N \le k_\infty^-(\lambda_N) \le \log(2N - 1)$$

が成立する.

注意 19 上記の命題の (4) の等距離作用素の組の例として Fock 空間の生成作用素があることに注意.

2 サブシフトと Macaev ノルム

定義 20 (cf. [LM]) 有限集合 $\mathcal{A}$ をアルファベット (alphabet) と呼び, その両側無限列全体の空間 $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ とその上の座標をひとつずらす変換を σ とおく. **サブシフト** (subshift) X とは, $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ のシフト不変な閉集合を言い, その上にシフトを制限したものを σ_X と書くことにする. また長さ n の語全体を $\mathcal{W}_n(X)$ とおき, その個数を $w_n(X)$ で表すことにする.

$$\mathcal{W}_n(X) = \{w = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n \mid w \text{ occurs in } X\}.$$

サブシフト (X, σ_X) に対して, **位相的エントロピー** (topological entropy) を

$$h(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log w_n(X)}{n}$$

で定義する.

定義 21 (cf. [Mat]) サブシフト $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ に対して, ヒルベルト空間 $\mathcal{F}_X$ を

$$\mathcal{F}_X = \mathbb{C}\xi_0 \oplus \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{span}\{\xi_{a_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{a_n} \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{W}_n(X)\},$$

と定義する. 但し, $\{\xi_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ は正規直交基底とする.

次に各 $a \in \mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{F}_X$ 上の作用素 T_a を次のように定義する.

$$\begin{aligned} T_a\xi_0 &= \xi_a, \\ T_a\xi_{a_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{a_n} &= \begin{cases} \xi_a \otimes \xi_{a_1} \otimes \cdots \otimes \xi_{a_n} & \text{if} \quad (a, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{W}(X), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで $\tau_X = (T_a)_{a\in\mathcal{A}}$ とおく. これらは次の性質を持つことが簡単に確かめられる.

$$P_0 + \sum_{a\in\mathcal{A}} T_a T_a^* = I,$$

但し, P_0 は $\mathbb{C}\xi_0$ 上への射影である. また, 長さ n の語全体で張られる空間への射影を P_n で表すことにする. 任意の $w = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{W}_n(X)$ に対して,

$$T_w = T_{a_1} \cdots T_{a_n}$$

と書くことにする.

注意 22 アルファベット $\mathcal{A} = \{1, \ldots, N\}$ のフルシフト $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ に対する作用素の組 τ_X は命題 18 の (4) の性質を満たす. 更に $\log N$ という値はフルシフト $X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ の位相的エントロピーである. そこで一般のサブシフト X に対して上の方法で構成した作用素の組 τ_X について $k_\infty^-(\tau_X)$ の値が位相的エントロピー $h(X)$ に一致するかどうか考えよう.

次は簡単に示すことができる.

命題 23 ([Oka2, Proposition 3.1]) 任意のサブシフト X に対して,

$$k_\infty^-(\tau_X) \le h(X).$$

次に下からの評価を与えるために次の命題を使う.

命題 24 ([Voi3, Proposition 2.1]) Φを対称ノルム関数, $\tau = (T_1, \ldots, T_N) \in \mathbb{B}(H)^N$ と $X_1, \ldots, X_N \in \mathfrak{S}_{\Phi^*}$ が次を満たすと仮定する.

$$\sum_{a=1}^{N} [X_a, T_a] \in \mathcal{C}_1(H) + \mathbb{B}(H)_+.$$

このとき,

$$\left| \mathrm{Tr} \left(\sum_{a=1}^{N} [X_a, T_a] \right) \right| \leq k_\Phi(\tau) \sum_{i=1}^{N} ||X_i||_{\Phi^*}^{\sim}$$

が成立する. 但し, $||X_i||_{\Phi^*}^{\sim} = \inf_{Y \in \mathbb{F}(H)} ||X_i - Y||_{\Phi^*}$.

定義 25 (cf. [DGS]) 各 $m \in \mathbb{Z}$ と $w = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{W}_n(X)$ に対して,

$${}_m[w] = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X \mid x_m = a_1, \ldots, x_{m+n-1} = a_n\}$$

とする. 但し, $m = 0$ のとき単に $[w]$ と書くことにする. サブシフト X 上の確率測度 μ をシフト不変とする. このとき以下が成立.

(1) $\sum_{a \in \mathcal{A}} \mu([a]) = 1$;
(2) $\mu([a_1, \ldots, a_n]) = \sum_{a_0 \in \mathcal{A}} \mu([a_0, a_1, \ldots, a_n])$;
(3) $\mu([a_1, \ldots, a_n]) = \sum_{a_{n+1} \in \mathcal{A}} \mu([a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}])$.

任意の X の分割 $\beta = (B_1, \ldots, B_n)$ に対して, 関数

$$I_\mu(\beta) = -\sum_{B \in \beta} \log \mu(B) \chi_B,$$

を定義する. 但し χ_B は B 上の特性関数とする. 分割 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ に対して, その細分を $\bigvee_{i=1}^{k} \beta_i$ と書くことにする.

$$\left\{ \bigcap_{i=1}^{k} B_i \,\middle|\, B_i \in \beta_i, 1 \leq i \leq k \right\}.$$

次の値

$$H_\mu(\beta) = -\sum_{B \in \beta} \mu(B) \log \mu(B)$$

は分割βのエントロピー (entropy of the partition β) と呼ばれている. そこで,

$$h_\mu(\beta,\sigma_X)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma_X^{-i}(\beta))$$

とおき, 力学系 (X,σ_X,μ) のエントロピー (measure-theoretic entropy) を

$$h_\mu(\sigma_X)=\sup\{h_\mu(\beta,\sigma_X)\mid H_\mu(\beta)<\infty\}.$$

と定義する. 一般に

$$h_\mu(\sigma_X)\le h(X)$$

が成立する. もしシフト不変な確率測度 μ が $h(X)=h_\mu(\sigma_X)$ を満たすとき, **極大測度** (maximal measure) と呼ぶことにする.

注意 26 任意のサブシフトは必ず極大測度をもつ. (cf. [DGS])

主定理は以下の通りである.

定理 27 ([Oka2, Theorem 3.2]) サブシフト X は次を満たすシフト不変な確率測度 μ をもつと仮定する.

任意の $\varepsilon>0$ に対して, 以下が成立:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(\left\{x\in X:\left|\frac{1}{n}I_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma_X^{-i}\beta\right)(x)-h_\mu(\sigma_X)\right|>\varepsilon\right\}\right)<\infty,$$

但し β は生成分割 $\{[a]\}_{a\in\mathcal{A}}$ とする.

このとき

$$h_\mu(\sigma_X)\le k_\infty^-(\tau_X)$$

が成り立つ. 特に μ を極大測度としてとれるならば,

$$k_\infty^-(\tau)=h(X)$$

が成立する.

注意 28 Shannon-Mcmillan-Breiman の定理より

$$\frac{1}{n}I_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}\sigma_X^{-i}\beta\right)(x)\longrightarrow h_\mu(\sigma_X)\ (n\to\infty)\quad \text{a.e. } x\in X$$

は保証されている. (cf. [DGS])

<u>証明の概略</u>　各 $a \in \mathcal{A}$ に対して,

$$X_a = \sum_{n \geq 0} \sum_{w \in \mathcal{W}_n(X)} \mu([aw]) T_w P_0 T_w^* T_a^*$$

と定義する. このとき, 確率測度 μ がシフト不変であることから

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} [X_a, T_a] = \sum_{a \in \mathcal{A}} X_a T_a - T_a X_a = P_0$$

となることがわかる. 後は命題 24 を使うために $||X_a||_1^{\tilde{+}}$ の評価をすれば良い. そのためにテクニカルな仮定が必要になってくる. 命題 23 より $h = h(X) \neq 0$ だけを考えれば十分. まず, $a \in \mathcal{A}$ と $\varepsilon > 0$ を fix しておき,

$$D_n = \{ w \in \mathcal{W}_n(X) \mid e^{-(n+1)(h+\varepsilon)} \leq \mu([aw]) \leq e^{-(n+1)(h-\varepsilon)} \}$$

$$\varepsilon_n = \sum_{w \in \mathcal{W}_n(X) \setminus D_n} \mu([aw])$$

とおく. いま μ を定理の仮定を満たすシフト不変な確率測度としているので,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$$

である. そこで,

$$\widetilde{X_a} = \sum_{n \geq 0} \sum_{w \in D_n} \mu([aw]) T_w P_0 T_w^* T_a^*$$

とおく. このとき,

$$\begin{aligned} ||X_a||_1^{\tilde{+}} &= \limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{j=1}^n s_j(X_a)}{\sum_{j=1}^n 1/j} \\ &\leq ||\widetilde{X_a}||_1^{\tilde{+}} + \limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k}{\sum_{j=1}^n 1/j} = ||\widetilde{X_a}||_1^{\tilde{+}} \end{aligned}$$

となる. 但し, 各 j に対して $w_j \in \mathcal{W}(X)$ が存在して $s_j(X_a) = \mu([aw_j])$ となることに注意. あとは頑張って $||\widetilde{X_a}||_1^{\tilde{+}}$ を評価すると,

$$||\widetilde{X_a}||_1^{\tilde{+}} \leq \frac{1}{h} \mu([a])$$

がわかる. よって命題 24 より結論を得る. □

マルコフシフトに対しては, 極大測度が定理の仮定を満たすことが簡単にチェックできる. (マルコフシフトの極大測度については例えば [Kit] を

系 29 ([Oka2, Corollary 3.3]) Aを成分が0または1である$N \times N$行列とする．サブシフトΣ_Aをマルコフシフトとする．

$$\Sigma_A = \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in S^{\mathbb{Z}} \mid A(a_i, a_{i+1}) = 1\}.$$

但し$S = \{1, \ldots, N\}$．このとき，対応する作用素の組をτ_Aとすれば，

$$k_\infty^-(\tau_A) = h(\Sigma_A).$$

もっと一般に次のクラスのサブシフトまで等号が成立することがわかった．

定義 30 (cf. [Pet]) サブシフトXが任意の$\varepsilon > 0$に対して，禁止語が有限個である space of finite type $\Sigma \subseteq X$が存在して，

$$h(X) - \varepsilon < h(\Sigma)$$

が成り立つとき，Xを **almost sofic** シフトと呼ぶ．

系 31 ([Oka2, Corollary 3.5]) サブシフトXが almost sofic シフトのとき，

$$k_\infty^-(\tau) = h(X)$$

が成立する．

注意 32 一般のサブシフトXで$k_\infty^-(\tau_X) = h(X)$となるかどうかは，今のところ未解決．

3 有限生成群と Macaev ノルム

定義 33 有限生成群Γとその有限生成系S $(e \notin S, S = S^{-1})$をひとつ固定する．このとき，

$$l_S(g) = \inf\{n \mid s_1, \ldots, s_n \in S \text{ such that } g = s_1 \cdots s_n\} \quad (g \in \Gamma)$$

と定義し，**語距離** (word-metric) と言う．語距離がnである元全体の集合を$\mathcal{W}_n(\Gamma, S)$と書く．このとき，

$$v_S = \lim_{n\to\infty} \frac{\log |\mathcal{W}_n(\Gamma, S)|}{n}$$

をボリューム (volume) と呼ぶ．但し，$|\cdot|$は集合の元の個数を表す．また有限生成群Γの左正則表現をλとしたとき，ユニタリー作用素の組$(\lambda_s)_{s\in S}$をλ_Sと書くことにする．

一般に以下が成立する：

命題 34 ([Oka2, Proposition 4.1])

$$k_\infty^-(\lambda_S) \le v_S$$

特別な有限生成群については [Oka1] で用いた作用素をうまく使うと等号が成立することがわかった.

命題 35 ([Oka2, Proposition 4.2]) 有限群 H とそれを部分群として含む群 $G_1, \dots, G_N$ は有限群または $\mathbb{Z} \times H$ とする. 各 G_i の生成系 S_i をそれぞれ $G_i \setminus \{e\}$, $\{x_i, x_i^{-1}\} \times H$ とする. 但し $\{x_i, x_i^{-1}\}$ は $\mathbb{Z}$ の標準的な生成元とする. このとき群融合積 $\Gamma = *_H G_i$ とその生成系を $S = \bigcup_{1 \le i \le N} S_i$ とすると

$$k_\infty^-(\lambda_S) = v_S$$

が成立する. 特に自由群 $\mathbb{F}_N = \langle x_1, \dots, x_N \rangle$ とその標準的な生成系 $S = \{x_1, \dots, x_N, x_1^{-1}, \dots, x_N^{-1}\}$ に対して,

$$k_\infty^-(\lambda_S) = \log(2N-1)$$

が成立する.

注意 36 Voiculescu は [Voi4] で $k_\infty^-(\lambda_S)$ について次のことを示している：もしサポートを S に持つような確率測度 μ で $h(\Gamma, \mu) \neq 0$ となるようなものが存在すれば, $k_\infty^-(\lambda_S) \neq 0$ が成立する. 但し, $h(\Gamma, \mu)$ はランダムウォークのエントロピーである.

一方, 命題 35 の結果から自然に次が予想される：

$$(\text{予想})\ v_S \neq 0 \Longrightarrow k_\infty^-(\lambda_S) \neq 0$$

もしこれが正しければ Vershik の結果 [Ver]

$$h(\Gamma, \mu) \neq 0 \Longrightarrow v_S \neq 0$$

により上の Voiculescu の結果を導くことができる. 更に命題 34 より

$$\Gamma \text{ has exponensial growth (i.e. } v_S \neq 0) \iff k_\infty^-(\lambda_S) \neq 0$$

参考文献

[DGS] Denker, M.; Grillenberger, C.; Sigmund, K.: *Ergodic theory on compact spaces.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. **527**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[GK] Gohberg, I. C.; Kreĭn, M. G.: *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. **18** American Mathematical Society, Providence, R.I. 1969.

[Kit] Kitchens, B.P.: *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts,* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[LM] Lind, D.; Marcus, B.: *An introduction to symbolic dynamics and coding.* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Mat] Matsumoto, K.: *On C^*-algebras associated with subshifts.* Internat. J. Math. **8** (1997), no. 3, 357–374.

[Oka1] Okayasu, R.: *Cuntz-Krieger-Pimsner algebras associated with amalgamated free product groups.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **38** (2002), no. 1, 147–190.

[Oka2] Okayasu, R.: *Entropy of subshifts and the Macaev norm.* to appear in J. Math. Soc. Japan.

[Pet] Petersen, K.: *Chains, entropy, coding.* Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), no. 3, 415–448

[Ver] Vershik, A.M.: *Dynamic theory of growth in groups: entropy, boundaries, examples.* Russian Math. Surveys **55** (2000), no. 4, 667–733.

[Voi1] Voiculescu, D.: *Some results on norm-ideal perturbations of Hilbert space operators.* J. Operator Theory **2** (1979), no. 1, 3–37.

[Voi2] Voiculescu, D.: *Some results on norm-ideal perturbations of Hilbert space operators. II.* J. Operator Theory **5** (1981), no. 1, 77–100.

[Voi3] Voiculescu, D.: *On the existence of quasicentral approximate units relative to normed ideals. Part I.* J. Funct. Anal. **91** (1990), no. 1, 1–36.

[Voi4] Voiculescu, D.: *Entropy of random walks on groups and the Macaev norm.* Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 3, 971–977.