

# トロピカル RSK 対応と離散戸田方程式

野海 正俊 (神戸大学・自然科学)

## 1 序

全正值な (減算を含まない) 有理変換において演算  $ab$ ,  $a/b$ ,  $a+b$  をそれぞれ  $a+b$ ,  $a-b$ ,  $\max(a, b)$  に置き換えると,  $(\pm, \max)$  型の区分的線形変換が得られる. この「超離散化」の手続きは, 可積分系の世界では, 離散可積分系から超離散可積分系を構成する標準的な方法として良く知られている.

一方, 組合せ論におけるアルゴリズムの多くは, 整数値をとる幾つかの離散変数の間の  $(\pm, \max)$  型の区分的線形変換として表わされる. その区分的線形変換に対応する「良い」全正值有理変換を構成することができれば, 後者についての代数的 (あるいは幾何的) な議論を, 超離散化の手続きによって組合せ論の世界にフィードバックすることができる. 全正值有理変換を組合せ論に応用するこのようなやり方を「トロピカル・アプローチ」という.

この論説では, 山田泰彦氏との共同研究 [8] に従って, Ronbinson-Schensted のアルゴリズムの全正值有理変換の世界での対応物を考察し, 離散戸田方程式との関連を明らかにしたい. 全正值有理変換を経由することによって, 離散可積分系の手法を組合せ論に応用することが可能になる. その典型例として, バンピングで得られるタブローに対する明示公式の「可積分系の手法による」証明を与える.

この論説は, 論文 [8] の議論の基本的なアイデアを説明したものである. [8] では, 同様の考え方で, Schützenberger 対応, RSK 対応とその逆, タブローへの対称群の作用といった, タブローの組合せ論の基本的な問題を考察している. 興味をもたれた読者は, 引き続いて論文の方を見ていただければと思う.

Kirillov 氏は [4] において, 対称群のタブローへの作用のトロピカル化 (全正值有理変換の世界での対応物) を考察している. 筆者らも  $q$ -Painlevé 方程式についての共同研究 [2, 3] で,  $A$  型アフィン Weyl 群のトロピカルな実現を得たが, その 2 つは実質的に同一のものであった. 違う文脈でなぜ同じ表現が現れるのか, その内在的な理由を理解したいというのが, 山田泰彦氏との共同研究 [8] の動機であった. そう言う訳で, [8] に現れるアフィン Weyl 群のトロピカルな実現は元々  $q$ -Painlevé 系と関係している. その辺りの事情については [7] も合わせて参照してほしい.

## 2 バンピングと RSK 対応

ヤング図形に数字を書込んだもので、数字は上から下に増大、左から右には広義の増大(等号を許す)となっているものを、以下では簡単に **タブロー**と呼ぶ<sup>1</sup>。ヤング図形を分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  (非負整数の広義の減少列で、十分大きな  $i$  に対しては  $\lambda_i = 0$ ) と同一視して、 $\lambda$  をそのタブローのシェイプという。また  $\lambda$  のパーツ (0 でない  $\lambda_i$ ) の個数を  $l(\lambda)$  と書く。

ワード (数字の列) からタブローを作る一つの方法として、**バンピング** (bumping) とよばれる Robinson-Schensted のアルゴリズムがある<sup>2</sup>。

$$w = 42213132 \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} 1123 \\ P = 223 \\ 4 \end{array} \quad (1)$$

この例では、 $P$  はシェイプ  $\lambda = (4, 3, 1)$  のタブローである。ワード  $w$  からタブローを作るには、空のタブローから出発して、 $w$  に並んだ数字を左から順にタブローに挿入 (insertion) して、タブローを成長させていく。

$$\begin{array}{cccccccc} 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ \_ \rightarrow \underline{4} & \rightarrow \underline{2} & \rightarrow \underline{22} & \rightarrow \underline{12} & \rightarrow \underline{123} & \rightarrow \underline{113} & \rightarrow \underline{1133} & \rightarrow 1123 \\ & \_ & 4 & \underline{4} & 2 & \underline{2} & 22 & \underline{22} & 223 \\ & & & \_ & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{array} \quad (2)$$

ワードから持ってきた数字  $k$  は、次の規則でタブローの第 1 行に挿入する。その行に  $k$  より大きい数字がなければ右端に追加して終了。  $k$  より大きいものがあれば、その中で一番左側にあるもの  $l$  を追出して (bump out), そこに  $k$  を置く。追出された数字  $l$  は、同じルールで第 2 行に挿入する。この操作を、数字が他の数字を追出さずに挿入されるまで繰り返す。上の図では、数字を挿入することによって変化が生じる場所を下線  $\_$  で示した。ワード  $w$  から、このようにして得られるタブローを  $P(w)$  で表す。

RSK (Robinson-Schensted-Knuth) 対応については、幾つか同値な定式化があるが、ここでは、行列を使ったバージョンを考える。  $A = (a_j^i)_{i,j}$  を  $m \times n$  行列で、各成分  $a_j^i$  は 0 以上の整数であるとする。次のような記法で、 $A$  を行ベクトルの並び、または列ベクトルの並びと見なす。

$$A = (a_j^i)_{i,j} = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix} = [a_1 \ \dots \ a_n] \quad (3)$$

<sup>1</sup>半標準盤 (semi-standard tableau) のこと。Macdonald 流では column strict tableau とも言う。

<sup>2</sup>ここで考えるのは、行に関するバンピングである。

ここで、 $A$  の第  $i$  行の行ベクトルを  $\mathbf{a}^i = (a_1^i, \dots, a_n^i)$ , 第  $j$  列の列ベクトルを  $\mathbf{a}_j = (a_j^1, \dots, a_j^m)$  と記した. 例として次の行列を考えよう.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

行ベクトル  $\mathbf{a}^1 = (0, 2, 1, 1)$  の成分  $0, 2, 1, 1$  がそれぞれ数字  $1, 2, 3, 4$  の個数を表しているものと考えて, 広義増大のワード  $w_1 = 1^0 2^2 3^1 4^1 = 2234$  を作る.  $\mathbf{a}^2 = (1, 0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{a}^3 = (2, 2, 0, 1)$  も同様にワード  $w_2 = 1344$ ,  $w_3 = 11224$  に読替え, これらを連結して長いワード

$$w = w_1 w_2 w_3 = 2234|1344|11224 \quad (5)$$

を作る. (縦線  $|$  を入れて, 行の境目が分かるようにした). このワード  $w$  にバンピングのアルゴリズムを適用して得られるタブローを, 行列  $A$  の  $P$  タブローと呼ぶ.

$$P = P(w) = \begin{array}{cccc} & & & 1112244 \\ & & & 22334 \\ & & & 4 \end{array} \quad (6)$$

今度は,  $A$  の列ベクトル  $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 2)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{a}_4 = (1, 2, 1)$  をそれぞれワード  $w'_1, w'_2, w'_3, w'_4$  に読替えて連結する.

$$w' = w'_1 w'_2 w'_3 w'_4 = 233|1133|12|1223 \quad (7)$$

$w'$  からバンピングで得られるタブロー

$$Q = P(w') = \begin{array}{cccc} & & & 1111223 \\ & & & 22333 \\ & & & 3 \end{array} \quad (8)$$

を,  $A$  の  $Q$  タブローと呼ぶ<sup>3</sup>.  $P$  も  $Q$  も同じシェイプ  $\lambda = (7, 5, 1)$  のタブローになっていることに注意してほしい.

一般の  $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{N})$  に対して上のような操作を行なうと, 同じシェイプをもつ 2 個のタブロー  $P, Q$  が得られる ( $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ). このようにして定義される対応  $A \mapsto (P, Q)$  を RSK 対応と言う. この RSK 対応は, 全単射

$$\text{RSK}: \text{Mat}(m, n; \mathbb{N}) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda} \text{Tab}_n(\lambda) \times \text{Tab}_m(\lambda) \quad (9)$$

を誘導することが知られている. ここで  $\text{Tab}_n(\lambda)$  は, 数字  $1, \dots, n$  を使って作った, シェイプ  $\lambda$  のタブロー全体の集合を表し, 右辺の集合の和は,  $l(\lambda) \leq \min(m, n)$  なる分割  $\lambda$  の全体にわたる.

<sup>3</sup>  $Q$  タブローについては,  $w$  から  $P = P(w)$  を作る時のヤング図形の成長過程を見ながら作る方法もあるが, 結果は同じである.



「重み」を  $\gamma$  上の頂点に付された  $a$  の値の総和

$$\text{wt}(\gamma) = \sum_{(r,s) \in \gamma} a_s^r \quad (12)$$

と定める. この記号の下で, 上に図式的に示した  $\tau_j^i$  の正確な定義は

$$\tau_j^i = \max_{(\gamma_1, \dots, \gamma_i)} \text{wt}(\gamma_1) + \dots + \text{wt}(\gamma_i) \quad (13)$$

である. ここで  $\max$  は, 始点が  $(1, 1), \dots, (1, i)$ , 終点が  $(m, j-i+1), \dots, (m, j)$  で, 互いに交わらない  $i$  個の道  $\gamma_k : (1, k) \rightarrow (m, j-i+k)$  の組  $(\gamma_1, \dots, \gamma_i)$  全体を走査したときの, 重み  $\text{wt}(\gamma_1) + \dots + \text{wt}(\gamma_i)$  の最大値を表す.

**定理 3.1** 非負整数を成分とする行列  $A = (a_j^i)_{i,j}$  に対して,  $\tau = (\tau_j^i)_{i \leq j}$  を上のように定義する. このとき,  $A$  の  $P$  タブローの  $i$  行目に現れる  $j$  の個数  $p_j^i$  はつぎの公式で与えられる.

$$p_i^i = \tau_i^i - \tau_i^{i-1}, \quad p_j^i = \tau_j^i - \tau_j^{i-1} - \tau_{j-1}^i + \tau_{j-1}^{i-1} \quad (i < j). \quad (14)$$

つまり  $p_j^i$  は  $\tau$  関数  $\tau_j^i$  の離散 Laplacian で計算されるという訳である. この公式は Berenstein-Kirillov による<sup>4</sup>.

上に掲げた例の場合,  $\tau = (\tau_j^i)_{i \leq j}$  は次のように計算される.

$$\tau = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 \\ & 5 & 9 & 12 \\ & & 9 & 13 \end{bmatrix} \quad (15)$$

例えば  $\tau_3^2$  を求めるには,  $A$  で  $(1, 1), (1, 2)$  から入って  $(3, 2), (3, 3)$  から出ていく, 互いに交わらない道の組を考える.

$$A = \begin{bmatrix} \downarrow 0 & \downarrow 2 & 1 & 1 \\ \downarrow 1 & \downarrow 0 & \downarrow 1 & 2 \\ \downarrow 2 & \downarrow 2 & \downarrow 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

このような道の組は 3 通りあって, 重みはそれぞれ

$$\begin{aligned} (0+1+2+2) + (2+0+1+0) &= 8 \\ (0+1+2+2) + (2+1+1+0) &= 9 \\ (0+1+0+2) + (2+1+1+0) &= 7 \end{aligned} \quad (17)$$

従って

$$\tau_3^2 = \max \{8, 9, 7\} = 9. \quad (18)$$

<sup>4</sup>文献 [4] にそう書いてあるが, 現時点では議論の詳細は公表されていない.

である.  $\tau = (\tau_j^i)_{i \leq j}$  で行の添字について階差をとると

$$(\tau_j^i - \tau_j^{i-1})_{i \leq j} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 \\ & 2 & 4 & 5 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

さらに列の添字についての階差をとると

$$(\tau_j^i - \tau_j^{i-1} - \tau_{j-1}^i + \tau_{j-1}^{i-1})_{i \leq j} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 2 \\ & 2 & 2 & 1 \\ & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

これが  $p = (p_j^i)_{i \leq j}$  に一致するという訳である.

バンピングでワードからタブローを作る操作に, 何故このような構造が現れるのか. それを, (逆)超離散化を通して離散戸田方程式と関連づけて理解しよう — というのが, 以下の議論の目的である.

## 4 超離散化の仕組み

減算を含まない有理函数が与えられたとき, 3種類の演算の置換えの操作

$$ab \rightarrow a + b, \quad a/b \rightarrow a - b, \quad a + b \rightarrow \max(a, b) \quad (21)$$

によって, 区分的に線形な函数が得られる. この超離散化の手続きは, 「全正値の」離散可積分系から, 超離散可積分系を系統的に構成する方法として良く知られている [9].

超離散化の規則 (21) を理解する一つのやり方は,  $a = e^{A/\varepsilon}$ ,  $b = e^{B/\varepsilon}$  とおいて

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} e^{B/\varepsilon}) &= A + B, & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon}/e^{B/\varepsilon}) &= A - B, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) &= \max(A, B) \end{aligned} \quad (22)$$

といった極限操作を経由するものである. しかし, このやり方では, 減算を含まない有理函数すべてに対して超離散化が矛盾なく定義されるのかどうか (有理函数の表示や規則の適用のやり方によらないのかどうか), 必ずしも明白ではない. 「矛盾なく定義される」ことの意味を明確にするために, ここでは, 超離散化を完全に形式的な操作と考えて代数的に定式化する. それによって, 超離散化が函手的な (functorial, 写像の合成と両立すること) 操作であることも明白となる. なお, もとの変数  $x$  に対して, 超離散化で用いる変数を  $X$  のように区別する方が良いこともあるが, 煩雑になるので, ここでは ( $X$  はまた  $x$  に戻して) 対応する変数を同じ記号で表す.

$f(x)$  を変数  $x = (x_1, \dots, x_m)$  についての実数係数の有理函数で, 0 ではないとする.  $f(x)$  が 2 つの正係数多項式の比で表されるとき,  $f(x)$  は全正

値であると言わすことにしよう<sup>5</sup>. このとき,  $\mathbb{N}^m$  の空でない有限部分集合  $A, B$  と, 正の実数の族  $(a_\alpha)_{\alpha \in A}, (b_\beta)_{\beta \in B}$  があって,  $f(x)$  は

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}; \quad a(x) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha, \quad b(x) = \sum_{\beta \in B} b_\beta x^\beta, \quad (23)$$

の形に表される. ここで,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  に対して  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$  という多重指数の記号を用いた. 規則 (21) を適用すると,  $x^\alpha$  は 1 次形式  $\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m$  に対応するので,  $a(x)$  の超離散化は  $\max\{\langle \alpha, x \rangle \mid \alpha \in A\}$ . 従って  $f(x)$  の超離散化は

$$\max\{\langle \alpha, x \rangle \mid \alpha \in A\} - \max\{\langle \beta, x \rangle \mid \beta \in B\} \quad (24)$$

でなくてはいけない. そこで, 全正值の有理関数  $f = f(x)$  の各々に対して,

$$M(f) = \max\{\langle \alpha, x \rangle \mid \alpha \in A\} - \max\{\langle \beta, x \rangle \mid \beta \in B\} \quad (25)$$

とおいて,  $\mathbb{R}^m$  上の区分的 1 次形式  $M(f)$  を対応させる. この  $M(f)$  は  $f$  だけで定まり, (23) のような表示によらないことは容易に確認できる. この定義の下で, 正の定数  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  に対しては  $M(c) = 0$  であって, 任意の全正值有理関数  $f, g$  に対して

$$\begin{aligned} M(fg) &= M(f) + M(g), & M(f/g) &= M(f) - M(g), \\ M(f+g) &= \max(M(f), M(g)) \end{aligned} \quad (26)$$

が成立することが示せる. これは全正值の有理関数を「変数」( $a$  や  $b$ ) と思って適用する限りに置いては, 自由自在に規則 (21) を用いても, 超離散化は矛盾なく確定すること意味している.

有理写像  $F: \mathbb{R}^l \cdots \rightarrow \mathbb{R}^m$  が

$$F: \quad y_j = f_j(x) = f_j(x_1, \dots, x_l) \quad (j = 1, \dots, m) \quad (27)$$

のように表されて, 各  $f_j$  が全正值有理関数のとき,  $F$  を全正值の有理写像という. これに対して区分的線形写像  $M(F): \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^m$  を

$$M(F): \quad y_j = M(f_j)(x) = M(f_j)(x_1, \dots, x_l) \quad (j = 1, \dots, m) \quad (28)$$

で定義する. この対応によって, 恒等写像は恒等写像に写される. また, もう一つ全正值の有理写像  $G: \mathbb{R}^m \cdots \rightarrow \mathbb{R}^n$  が与えられ, 合成  $G \circ F: \mathbb{R}^l \cdots \rightarrow \mathbb{R}^n$  が意味をもてば, それもまた全正值であり, 超離散化は  $M(G \circ F) = M(G) \circ M(F)$  で与えられる (有理写像の合成も, 所詮  $\times, /, +$  の組合せに過ぎない). つまり, 全正值有理写像の超離散化は写像の合成と両立する訳である. 圏論的に考えたければ, 全正值有理写像  $F: \mathbb{R}^l \cdots \rightarrow \mathbb{R}^m$  で体の中への同型  $F^*: \mathbb{R}(y) \rightarrow \mathbb{R}(x)$  を誘導するようなもののみを射とすれば, いつでも合成が

<sup>5</sup>subtraction free と言われることが多いが, 「減算なし」ではあまりに趣がない. 「全正值」は totally positive のつもりである.

意味を持つ。超離散化  $F \mapsto M(F)$  はそのような全正值有理写像を射とする圏から、区分的線形写像を射とする圏への函手を定める。

この函手性からの帰結として、幾つかの全正值有理写像が合成についてある関係式を満たせば、それらの超離散化として得られる区分的線形写像も同じ関係式を満たすことが分かる。たとえば、組み紐関係式  $F \circ G \circ F = G \circ F \circ G$  を満たす全正值有理変換  $F, G$  が与えられれば、それらの超離散化もまた関係式  $M(F) \circ M(G) \circ M(F) = M(G) \circ M(F) \circ M(G)$  を満たす。とくに、ある群が全正值有理変換の群として実現されれば、自動的に、同じ群の区分的線形変換の群としての実現が得られる訳である。(とくに、アフィン Weyl 群の全正值有理変換群としての実現に由来する全正值離散系は、対称性も含めて自動的に超離散化される。)

組合せ論に現れるアルゴリズムの多くは、 $\pm, \max$  を用いて、整数値をとる幾つかの変数の間の区分的線形変換として表現される。このような場合、それを超離散化もつような(良い)全正值有理変換を構成する問題は、しばしば実際的な意味を持つ。全正值有理変換の代数的・幾何学的考察によって得られる結果は、全正值有理変換の範囲を逸脱しない限り、いつでも自動的に  $\pm, \max$  の世界にフィードバックできるからである。全正值有理変換を組合せ論に応用するこのようなやり方は、しばしばトロピカルなアプローチと形容される。

注釈：ただ悩ましいことに、「全正值有理変換」の世界と、 $(\pm, \max)$  系の「区分的線形変換」の世界のどちらを「熱帯」と思うかについては、意見が一致していない。[1] などでは、 $(\pm, \max)$  系がトロピカルで、超離散化は tropicalization と呼ばれている。[4] では、全正值有理変換がトロピカルで、逆超離散化の方が tropification である！日本では  $(\pm, \max)$  系は低温極限のクリスタル基底の側だから「寒帯」を連想する人が多いようで、全正值有理変換に関するものを「熱帯」と考える Kirillov 流の方が優勢である。

## 5 挿入操作のトロピカル化

挿入操作をトロピカル化(全正值有理変換へ移行させること)すると、離散戸田方程式が(特殊な境界条件付きで)現れることを説明したい。そのためにまず、行単位のバンピング操作のトロピカル化を考察する。

第2節では、タブローにワードを挿入する一般のバンピングの操作を考えましたが、この操作は、行単位に分割すれば、次のような非減少ワードの「交換」の積み重ねと見なすことができる<sup>6</sup>。

$$\begin{array}{ccc}
 & v = 1245 & \\
 w = \underline{22345} & \xrightarrow{\quad \downarrow \quad} & w' = 122445 \\
 & v' = 235 & 
 \end{array} \quad (29)$$

<sup>6</sup>一種の「組合せ的  $R$  行列」である。

この図式は、非減少ワード  $w$  に非減少ワード  $v$  を挿入すると、その結果  $w$  が  $w'$  に変更され、その過程で  $v'$  の数字が順に  $w$  から押出されてくることを表す。非減少のワード  $w$  を  $w = 1^{x_1} 2^{x_2} \cdots n^{x_n}$  と書いて  $w$  に数ベクトル  $x = (x_1, \dots, x_n)$  を対応させる。同様に  $v, w', v'$  に対応する数ベクトルを  $a, y, b$  とすれば、同じ操作が

$$\begin{array}{ccc} & a = (1, 1, 0, 1, 1) & \\ x = (0, 2, 1, 1, 1) & \begin{array}{c} \dashrightarrow \\ \downarrow \\ \dashrightarrow \end{array} & y = (1, 2, 0, 2, 1) \\ & b = (0, 1, 1, 0, 1) & \end{array} \quad (30)$$

と表される。

**問題:** 数ベクトル  $x = (x_1, \dots, x_n), a = (a_1, \dots, a_n)$  から  $y = (y_1, \dots, y_n), b = (b_1, \dots, b_n)$  を決定する明示公式を作れ。

第3節の問題に比べるとこちらは遥かに扱いやすい問題である。

まず、数字  $1, 2, \dots, n$  の個数は保存されることに注意しよう。

$$a_j + x_j = y_j + b_j \quad (j = 1, \dots, n). \quad (31)$$

だから、 $y_j$  が決まれば  $b_j$  は自動的に決まる。少し考えれば納得できると思うが、 $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$  よりも

$$\xi_j = x_1 + x_2 + \cdots + x_j, \quad \eta_j = y_1 + y_2 + \cdots + y_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (32)$$

の方が扱いやすい。バンピングの仕組みを注意深く見直すと、 $\eta_j$  は次の漸化式で決定されることが分かる。

$$\eta_1 = \xi_1 + a_1, \quad \eta_2 = \max(\eta_1, \xi_2) + a_2, \quad \dots, \quad \eta_n = \max(\eta_{n-1}, \xi_n) + a_n. \quad (33)$$

(この漸化式の導出は読者に委ねる。) この漸化式から直接、 $\eta_j$  や  $y_j$  を表す (±, max) 式を作ることも可能だが、折角なので、前節で述べた超離散化の逆をやってみよう。

$x_j, a_j, y_j, b_j$  に対応するトロピカル変数 (全正值有理変換をつくる変数) を同じ記号で表すことにすると、 $a_j x_j = y_j b_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) と考えるのが自然である。また、 $\xi_j, \eta_j$  も乗法的に

$$\xi_j = x_1 x_2 \cdots x_j, \quad \eta_j = y_1 y_2 \cdots y_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (34)$$

で定める。問題は上記の漸化式のトロピカル版をどう取るかだが、今は安直に

$$\eta_1 = \xi_1 a_1, \quad \eta_2 = (\eta_1 + \xi_2) a_2, \quad \dots, \quad \eta_n = (\eta_{n-1} + \xi_n) a_n. \quad (35)$$

としてみよう。この漸化式はすぐに解けて、

$$\eta_1 = \xi_1 a_1, \quad \eta_2 = \xi_1 a_1 a_2 + \xi_2 a_2, \quad \eta_3 = \xi_1 a_1 a_2 a_3 + \xi_2 a_2 a_3 + \xi_3 a_3, \quad \dots$$

$$\begin{aligned}\eta_j &= \xi_1 a_1 \cdots a_j + \xi_2 a_2 \cdots a_j + \cdots + \xi_j a_j \\ &= x_1 a_1 \cdots a_j + x_1 x_2 a_2 \cdots a_j + \cdots + x_1 \cdots x_j a_j\end{aligned}\quad (37)$$

を得る. この  $\eta_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) を用いて,  $y_j, b_j$  が次のように決定される.

$$\begin{aligned}y_1 &= \eta_1, & y_j &= \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}} & (j = 2, \dots, n) \\ b_1 &= 1, & b_j &= \frac{x_j a_j}{y_j} = a_j \frac{\xi_j \eta_{j-1}}{\xi_{j-1} \eta_j} & (j = 2, \dots, n).\end{aligned}\quad (38)$$

ここまで解いて超離散化すれば, 元々の漸化式 (33) 解の公式が得られる. 即ち  $y_j$  は

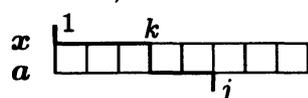
$$y_1 = \eta_1, \quad y_j = \eta_j - \eta_{j-1} \quad (j = 2, \dots, n) \quad (39)$$

と表せる. ここで,  $\eta_j$  は

$$\begin{aligned}\eta_j &= \max_{1 \leq k \leq j} (\xi_k + a_k + \cdots + a_j) \\ &= \max_{1 \leq k \leq j} (x_1 + \cdots + x_k + a_k + \cdots + a_j).\end{aligned}\quad (40)$$

$b_j$  の方は, もちろん  $b_1 = 0, b_j = a_j + x_j - y_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ) で決まる.

$\eta_j$  を決める公式 (37), (40) も, 次の図で, 上段の (1, 1) から下段の (2,  $j$ ) に至る道にわたる和, または最大値となっている. (道の重みは, 前者では変数の積, 後者では変数の和である.)



$$(41)$$

組合せの設定にして, (30) の例で確認してみよう. 表

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ x : & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ a : & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \end{array}\quad (42)$$

で, 上段の  $x_1$  の場所から入って  $a_j$  の場所から出る道に対して, 道の上の数字の総和を重みとする. そのような道を全て走査して重みの最大値をとったものが  $\eta_j$  である. このようにして,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = (1, 3, 3, 5, 6) \quad (43)$$

と決まる. で, その階差数列を取れば,  $y = (1, 2, 0, 2, 1)$  となる.

## 6 離散戸田方程式との関係

前節で述べた行単位のバンピング操作のトロピカル化は, 離散戸田方程式 [5]

$$I_i^{t+1} V_i^{t+1} = I_{i+1}^t V_i^t, \quad I_i^{t+1} + V_{i-1}^{t+1} = V_i^t + I_i^t \quad (i, t \in \mathbb{Z}) \quad (44)$$

と関係している. 時刻  $t$  から  $t+1$  への時間発展  $(I_i^t, V_i^t)_i \rightarrow (I_i^{t+1}, V_i^{t+1})_i$  を変数

$$A_i = I_{i+1}^t, \quad X_i = V_i^t, \quad B_i = I_i^{t+1}, \quad Y_i = V_i^{t+1} \quad (45)$$

を用いて書き表わすと, 変換  $(A, X) \rightarrow (B, Y)$  の満たすべき方程式は

$$Y_i B_i = A_i X_i, \quad Y_i + B_{i+1} = A_i + X_{i+1} \quad (i \in \mathbb{Z}) \quad (46)$$

である. 以下の便宜のために, 4 種類の変数をいずれも逆数に取替えて,

$$a_j x_j = y_j b_j, \quad \frac{1}{a_j} + \frac{1}{x_{j+1}} = \frac{1}{y_j} + \frac{1}{b_{j+1}} \quad (j \in \mathbb{Z}) \quad (47)$$

と書換えておく.

前節で議論した行型挿入操作のトロピカル化は, 添字集合を区間  $\{1, 2, \dots, n\}$  にとり, やや非自明な境界条件を課した, 次の代数方程式系で特徴付けられる.

$$\begin{aligned} a_1 x_1 = y_1, & \quad a_j x_j = y_j b_j & (j = 2, \dots, n), \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{b_2}, & \quad \frac{1}{a_j} + \frac{1}{x_{j+1}} = \frac{1}{y_j} + \frac{1}{b_{j+1}} & (j = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (48)$$

これを,  $(a_1, \dots, a_n), (x_1, \dots, x_n)$  を独立変数として,  $(y_1, \dots, y_n), (b_2, \dots, b_n)$  を未知函数とする代数方程式系と見なす<sup>7</sup>.

**命題 6.1** 上記の代数方程式系 (48) は, 唯一の有理函数解をもち, その解は次で与えられる.

$$y_j = \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}}, \quad b_j = \frac{a_j x_j}{y_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (49)$$

ここで,

$$\eta_j = x_1 a_1 \cdots a_j + x_1 x_2 a_2 \cdots a_j + \cdots + x_1 \cdots x_j a_j \quad (j = 0, 1, \dots, n). \quad (50)$$

重要なことは, 上記の代数方程式系 (48) が次のような行列の関係式として表現されることである.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & 1 & & & & \\ & \bar{a}_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \bar{a}_{n-1} & 1 & \\ & & & & \bar{a}_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & 1 & & & & \\ & \bar{x}_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \bar{x}_{n-1} & 1 & \\ & & & & \bar{x}_n & \end{bmatrix} \\ = & \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & 1 & & & & \\ & \bar{y}_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \bar{y}_{n-1} & 1 & \\ & & & & \bar{y}_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & \\ & \bar{b}_2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \bar{b}_{n-1} & 1 & \\ & & & & \bar{b}_n & \end{bmatrix} \quad (51) \end{aligned}$$

<sup>7</sup>気持ちは, (47) を半無限にして「 $b_1 = \infty$  という境界条件を付加した」ものだが, ちよつと微妙である.

ここで、場所の節約のため逆数を  $\bar{x} = x^{-1}$  と書いた。(離散時間発展の  $\bar{f}(t) = f(t+1)$  ではないので、注意してほしい。) これは、離散戸田方程式の文脈での  $LR$  型の Darboux 変換に対応するものである。

議論を見やすくするために記号を導入しよう。 $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$  というベクトルが与えられたとき、

$$E(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & & & \\ & x_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x_{n-1} & 1 \\ & & & & x_n \end{bmatrix}, \quad E_k(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & x_k & 1 \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & x_n \end{bmatrix} \quad (52)$$

と定める。 $E_k(\boldsymbol{x})$  は小さいサイズの  $E(\boldsymbol{x}')$ , ( $\boldsymbol{x}' = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ ) を  $(k, k)$  以下の右下のブロックにはめ込んだ「切り落とし」である ( $k=1$  では  $E_1(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{x})$ ). 行列単位を  $E_{ij}$  で表し、

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}, \quad \Lambda_k = \sum_{i=k}^{n-1} E_{i,i+1} \quad (k=1, \dots, n) \quad (53)$$

とおけば、

$$E(\boldsymbol{x}) = \text{diag}(\boldsymbol{x}) + \Lambda, \quad E_k(\boldsymbol{x}) = \text{diag}(\boldsymbol{x}_{\geq k}) + \Lambda_k \quad (k=1, \dots, n) \quad (54)$$

である。ここで  $\boldsymbol{x}_{\geq k} = (1, \dots, 1, x_k, \dots, x_n)$  と略記した。この記号を用いると、行列方程式 (51) は

$$E(\bar{\boldsymbol{a}}) E(\bar{\boldsymbol{x}}) = E_1(\bar{\boldsymbol{y}}) E_2(\bar{\boldsymbol{b}}) \quad (55)$$

と表される。 $\bar{\boldsymbol{x}}$  等は前と同様  $\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^{-1}$  の意味である。上記の命題は、変数を成分とするベクトル  $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$  と  $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$  が与えられたとき、(55) を満たす  $\boldsymbol{y} = (y_1, \dots, y_n)$  と  $\boldsymbol{b} = (1, b_2, \dots, b_n)$  が一意に定まり、それらは  $x_j, a_j$  の有理関数となることを意味している。行列方程式 (55) で決まる有理変換  $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \rightarrow (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b})$  は実際全正值の有理変換であり、それが丁度、行型の挿入操作のトロピカル化となっている訳である。つまり、関係式 (55) そのものが、「トロピカルな挿入操作」の表現であると考えて良い。

$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{b}$  に対する方程式 (55) が解をもつことが予め分かっていたら、解の明示公式を作るのは容易である。そのためには、 $E(\boldsymbol{x}), E_k(\boldsymbol{x})$  を逆行列に移して考える方が考えやすい。 $D = \text{diag}((-1)^{i-1})_{i=1}^n$  とおいて、

$$H(\boldsymbol{x}) = DE(\bar{\boldsymbol{x}})^{-1}D^{-1}, \quad H_k(\boldsymbol{x}) = DE_k(\bar{\boldsymbol{x}})^{-1}D^{-1}. \quad (56)$$

と定義すると、

$$H(\boldsymbol{x})_j^i = \begin{cases} x_i x_{i+1} \cdots x_j & (i \leq j) \\ 0 & (i > j) \end{cases} \quad (57)$$

$$H_k(\boldsymbol{x})_j^i = \begin{cases} x_i x_{i+1} \cdots x_j & (k \leq i \leq j) \\ \delta_{ij} & (\text{それ以外するとき}) \end{cases} \quad (58)$$

なる行列が得られる。(D で共役変換したのは符号を消すためである。) そこで、(55) を逆行列に移した関係式を考えよう。

$$H(x)H(a) = H_2(b)H_1(y). \quad (59)$$

両辺の  $(1, j)$  成分をとると

$$\begin{aligned} (H(x)H(a))_j^1 &= \sum_{k=1}^j x_1 \cdots x_k a_k \cdots a_j \\ (H(b)H(y))_j^1 &= y_1 \cdots y_j = \eta_j \end{aligned} \quad (60)$$

よって、

$$y_j = \frac{\eta_j}{\eta_{j-1}}, \quad \eta_j = \sum_{k=1}^j x_1 \cdots x_k a_k \cdots a_j \quad (61)$$

なる明示公式を得る。

このような構造を利用すれば、第3節で述べた Berenstein-Kirillov の公式の証明ができる。なお、 $E(x), H(x)$  で  $E$  と  $H$  を用いたのは、基本対称式  $e_i$  と完全同次対称式  $h_i$  からの連想である。

## 7 トロピカル・タブロー

第2節の設定に戻って、行列  $A \in \text{Mat}(m, n; \mathbb{N})$  から  $P$  タブローを作る操作を考えよう。このバンピングの手続きは、行単位の挿入操作の積み重ねとして再構成できる。その仕組みは次のような図式で表現できる。 $P(2234|1344|11224)$  の例であれば、

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1344 & & 11224 & & \\ & & \downarrow \rightarrow & & \downarrow \rightarrow & & \\ 2234 & \downarrow \rightarrow & 12334 & \downarrow \rightarrow & 1112244 & & \\ & & 24 & & 2334 & & \\ & & \downarrow \rightarrow & & \downarrow \rightarrow & & \\ & & 24 & & 22334 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & \downarrow \rightarrow & & \\ & & & & 4 & & \end{array} \quad (62)$$

右端に出力された非減少ワードを上下に重ねれば、それが  $P$  タブローである。数ベクトル  $a^1, a^2, a^3$  を使ってシンボリックに表せば

$$\begin{array}{ccccccc} & & a^2 & & a^3 & & \\ & & \downarrow \rightarrow & & \downarrow \rightarrow & & \\ a^1 & \downarrow \rightarrow & b^1 & \downarrow \rightarrow & p^1 & & \\ & & b^2 & & c & & \\ & & \downarrow \rightarrow & & \downarrow \rightarrow & & \\ & & b^2 & & p^2 & & \\ & & & & p^3 & & \\ & & & & \downarrow \rightarrow & & \\ & & & & p^3 & & \end{array} \quad (63)$$

この図式に従って「交換」を繰返せば、 $a^1, a^2, a^3$  から  $p^1, p^2, p^3$  が求められる。

$a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i), p^i = (p_1, \dots, p_n)$  の成分をトロピカルな変数として、同じ図式に沿って前節のような行列の交換をやってみよう。  $H$  行列の方でやると

$$\begin{aligned} \underline{H(a^1)H(a^2)H(a^3)} &= \underline{H_2(b^2)H_1(b^1)H(a^3)} \\ &= \underline{H_2(b^2)H_2(c)H_1(p^1)} \\ &= H_3(p^3)H_2(p^2)H_1(p^1) \end{aligned} \quad (64)$$

「交換」する場所を下線で表した。左辺においた変数  $a_j^i$  から、「交換」の度毎にだんだん複雑な全正值有理関数が生成されていく様子を思い描いてほしい。

行列  $A$  から  $P$  タブローを作ることと、ベクトル  $a^1, \dots, a^m$  から  $p^1, p^2, \dots$  を作るのと同じことである、それをトロピカルにやると、結局は行列の関係式

$$H(a^1)H(a^2)\cdots H(a^m) = H_l(p^l)H_{l-1}(p^{l-1})\cdots H_1(p^1). \quad (65)$$

を考えることに帰着される。ここで  $l = \min(m, n)$ 。 (65) の右辺の行列が「トロピカル・タブロー」と呼ぶべきものである。 $a^i = (a_1^i, \dots, a_n^i), p^i = (1, \dots, 1, p_1^i, \dots, p_n^i)$  と書いて、 $a_j^i$  を変数と見なすと、この関係式を満たす  $p_j^i$  は一意的に決まり、 $a$  変数の全正值有理関数となる。その  $p_j^i$  を超離散化すれば、タブロー  $P$  の  $i$  行目に現れる数字  $j$  の個数に対する明示公式が得られるという手筈である。

説明の都合上、以下では  $m \leq n$  ( $l = m$ ) としておく。まず、式 (65) の左辺

$$L = H(a^1)H(a^2)\cdots H(a^m) \quad (66)$$

に注目しよう。その  $(i, j)$  成分は

$$L_j^i = \sum_{\gamma: (1,i) \rightarrow (m,j)} \quad \begin{array}{c} (1,i) \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ (m,j) \end{array} \quad (67)$$

つまり、行列  $A$  を長方形の格子に見立てて、 $(1, i)$  から  $(m, j)$  に至る道を考えて、 $L_j^i$  はそのような道  $\gamma$  全てについての乗法的な重み  $\text{wt}(\gamma) = \prod_{(r,s) \in \gamma} a_s^r$  の総和である。このような状況では、 $L$  の小行列式は、互いに交わらない道の組についての重みの総和を表す。行の添字  $i_1 < \dots < i_r$  と列の添字  $j_1 < \dots < j_r$  に対応する  $L$  の小行列式は、

$$\det(L)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_r)} \quad \begin{array}{c} i_1 \ i_2 \ \dots \ i_r \\ \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline \end{array} \\ j_1 \ \dots \ j_r \end{array} \quad (68)$$

組合せ論の Gessel-Viennot の定理を御存知の方は、それからの帰結と考えて貰えば良い。今のような設定では、「行列の積の小行列式は、もとの行列の小行列式の積の和で表される」という事実から自然に、道による図式的表示が得られる。詳しく説明する余裕がないので、この辺りの事情については論文 [8], [6] を参照して欲しい。

今度は、(65) の右辺

$$R = H_m(p^m)H_{m-1}(p^{m-1}) \cdots H_1(p^1) \quad (69)$$

に注目して、対応する小行列式  $\tau_j^i(R)$  ( $i \leq j$ ) を計算しよう。  $H_1(p^1), H_2(p^2), \dots$  という「切り落とした」  $H$  行列の列では、実質的なサイズがだんだん小さくなっているのだから、右辺の  $R$  の方の  $(i, j)$  成分は、次のような台形  $p = (p_j^i)_{i \leq j}$  の上の道を重み付きで数えることになる。

$$R_j^i = \sum_{\gamma: (i,i) \rightarrow (1,j)} \text{Diagram} \quad (70)$$

小行列式に移行すると、

$$\det(R)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_r)} \text{Diagram} \quad (71)$$

$\det(L)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r} = \det(R)_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_r}$  だから、上の議論は同じ量について  $a$  変数と  $p$  変数のそれぞれで図形的な表示を与えたことになっている。そこで、特別な小行列式に注目する。  $i \leq j$  のとき、  $L$  の小行列式のうち、行の添字  $1, 2, \dots, i$  と列の添字  $j-i+1, j-i+2, \dots, j$  に対応するものを特に、  $\tau_j^i = \tau_j^i(L) = \tau_j^i(R)$  で表す。  $\tau_j^i(L)$  は、

$$\tau_j^i(L) = \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_i)} \text{Diagram} \quad (72)$$

ところが、  $\tau(R)_j^i$  の方は数え上げるべき道の組がただ一つしかない！

$$\tau_j^i(R) = \text{Diagram} = \prod_{a \leq b; a \leq i, b \leq j} p_b^a \quad (73)$$

$\tau_j^i = \tau_j^i(R)$  のこの表示から

$$p_i^i = \frac{\tau_j^i}{\tau_i^{i-1}}, \quad p_j^i = \frac{\tau_j^i \tau_{j-1}^{i-1}}{\tau_j^{i-1} \tau_{j-1}^i} \quad (i < j) \quad (74)$$

を得る.  $\tau_j^i = \tau_j^i(L)$  を  $a$  変数で表す式は既に(72) で与えたので, トロピカル・タブローの変数  $p_j^i$  を元の  $a$  変数で表す明示公式が得られたことになる. これがトロピカル版のタブロー公式で, 超離散化すれば, 第3節で述べた Berenstein-Kirillov の公式となることも明白であろう.

トロピカルな世界へ移行すると, 組合せ論の種々のアルゴリズムの背後に, 離散可積分系の構造が隠されていることが分かる. この論説では, バンピングで得られるタブローの明示公式を例にとり, タブローの組合せ論がどのように離散戸田方程式と結びついているかを説明した. タブローの Schützenberger 対合についても,  $(\pm, \max)$  系としての記述が知られており, こちらは Knight-Zelevinsky の公式という. この種の組合せ論的構造を, 全正値行列の変換を通じて理解しようというのが Fomin-Zelevinsky の一連の仕事の一つの動機でもあったようである.

論文 [8] のアイデアの主要な部分はこれで説明したことになると思う. [8] では, ここで述べたタブロー公式を始め, Schützenberger 対合, RSK 対応とその逆対応, タブローへの対称群の作用といった組合せ論的な問題を, 離散可積分系のアイデアと超離散化の手法を応用して論じた. 興味をもたれた読者は, 直接 [8] を参照してほしい.

## 参考文献

- [1] A. Berenstein, S. Fomin and A. Zelevinsky: Parametrization of canonical bases and totally positive matrices, *Adv. in Math.* **122**(1996), 49–149.
- [2] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada: Discrete dynamical systems with  $W(A_{m-1}^{(1)} \times A_{n-1}^{(1)})$  symmetry, *Lett. Math. Phys.* **60**(2002), 211–219.
- [3] K. Kajiwara, M. Noumi and Y. Yamada:  $q$ -Painlevé systems arising from  $q$ -KP hierarchy, to appear in *Lett. Math. Phys.* (nlin.SI/0112045)
- [4] A.N. Kirillov: Introduction to tropical combinatorics, in *Physics and Combinatorics 2000*, Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop (Eds. A.N. Kirillov, and N. Liskova), pp. 82–150, World Scientific, 2001.
- [5] R. Hirota and S. Tsujimoto: Conserved quantities of a class of nonlinear difference-difference equations, *J. Phys. Soc. Japan* **43**(1995), 3125–3127.

- [6] J. Nakagawa, M. Noumi, M. Shirakawa and Y. Yamada: Tableau representation for Macdonald's ninth variation of Schur functions, in *Physics and Combinatorics 2000*, Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop (Eds. A.N. Kirillov and N. Liskova), pp. 180–195, World-Scientific, 2001.
- [7] M. Noumi: Affine Weyl group approach to Painlevé equations, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians(2002, Beijing), Vol.III, pp.497–509, Higher Education Press, 2002.
- [8] M. Noumi and Y. Yamada: Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions, to appear in *Advanced Studies in Pure Mathematics* (math-ph/0203030).
- [9] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma: From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure, *Phys. Rev. Lett.* **76**(1996), 3247–3250.
- [10] D. Takahashi and J. Satsuma: A soliton cellular automaton, *J. Phys. Soc. Japan* **59**(1990), 3541–3519.
- [11] Y. Yamada: A birational representation of Weyl groups, combinatorial  $R$ -matrix and discrete Toda equation, in *Physics and Combinatorics 2000*, Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop (Eds. A.N. Kirillov and N. Liskova), pp. 305–319, World-Scientific, 2001.