

Darboux chains と パンルヴェ方程式について

東京大学大学院数理科学研究科 ウィロックス・ラルフ
 (Ralph Willox*)
 Graduate School of Mathematical Sciences,
 University of Tokyo.

1 はじめに

「V.E.Adler, Physica D37 (1994) 335」 [1] に、Darboux 変換の反復による Painlevé 方程式の記述がある。本論文では、Adler による方法を系統的に再構成し、Painlevé 方程式と Darboux chain との密接な関係を説明する。そして、Darboux chain という概念を用いた記述を利用し、Painlevé 方程式 $P_{III, \dots, VI}$ の双線形化を行い、Lax 対を求める。これは Jarmo Hietarinta 氏 (Turku 大学、フィンランド) との共同研究による結果である [2]。

本論文の後半では、KP ヒエラルキーの Darboux 変換を導入することによって、 τ 関数の Darboux chain を構成し、Adler による Darboux chain の起源を明らかにする。そして、 P_{IV} や P_V の場合を含む dressing chain [3] を Darboux τ chain として表現し、KP ヒエラルキーから P_{IV} や P_V までの簡約を記述する。特に、KP の対称性を構成しているリー群 $GL(\infty)$ を使い、Painlevé 方程式の重要な対称性であるアフィン Weyl 群 [4] がなぜ Painlevé 方程式の理論に現れるかを明らかにする。

2 chain 方程式

Darboux 変換とは、微分作用素の (常微分偏微分を問わず) 共変的な変換 (covariant transformation) である。具体的にいえば、例えば、次のような energy-dependent (つまり、非加法的なスペクトル依存性を持つポテンシャル $u(\lambda, x)$ による) Schrödinger 方程式の場合、

$$L(u, \lambda)\psi(\lambda, x) = 0, \quad L(u, \lambda) := \partial_x^2 + u(\lambda, x) \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \quad (1)$$

Schrödinger 方程式の固有関数に作用する変換

$$\psi(\lambda, x) \longrightarrow \hat{\psi}(\lambda, x) = G(\lambda, x)\psi(\lambda, x) \quad (2)$$

$$G(\lambda, x) := A(\lambda, x) (\partial_x - F(\lambda, x)) \quad (3)$$

*Postdoctoral Fellow at the Fund for Scientific Research (FWO), Flanders (Belgium);
 Dienst Theoretische Natuurkunde, Free University of Brussels (V.U.B.), Belgium.

の影響は、方程式に表れるポテンシャルに完全に吸収できる。すなわち、変換された固有函数 $\widehat{\psi}(\lambda, x)$ は新しいポテンシャル $\widehat{u}(\lambda, x)$ による Schrödinger 方程式の固有函数になり、

$$\exists \widehat{L} := L(\widehat{u}, \lambda) : \quad \widehat{L} \widehat{\psi}(\lambda, x) = 0$$

そのポテンシャルは元のポテンシャル $u(\lambda, x)$ と Darboux 変換 (2),(3) を構成する函数 $F(\lambda, x)$ と $A(\lambda, x)$ から計算できる。(以後、 x による微分 $\frac{d}{dx}$ を ' で示す。)

$$\widehat{u}(\lambda, x) = u(\lambda, x) + [2F(\lambda, x)A(\lambda, x) - A(\lambda, x)']'/A(\lambda, x) \quad (4)$$

ただし、 $F(\lambda, x)$ と $A(\lambda, x)$ に対する条件

$$F(\lambda, x)' + F(\lambda, x)^2 + u(\lambda, x) = \mu(\lambda)A(\lambda, x)^{-2} \quad (5)$$

及び、 $G(\lambda, x)$ の核に関する条件

$$\exists \nu \in \mathbb{C}; \exists \varphi, L(u, \nu)\varphi = 0 : \quad G\varphi \equiv 0$$

が必要である。後者の条件は、

$$\exists \nu \in \mathbb{C}; \exists \varphi, L(u, \nu)\varphi = 0 : \quad F(\nu, x) \equiv (\log \varphi)_x \quad (6)$$

という形にも書けることに注意する。これらの条件を満たす $G(\lambda, x)$ による変換を Darboux 変換と呼ぶ。よく知られているように、Darboux 変換という概念は、可積分系の理論において大きな役割を果たす概念である。例えば、 $u(\lambda, x) := U(x) + \lambda$ の場合には、Schrödinger 方程式 (1) は KdV 方程式に付随するスペクトル問題となり（つまり、ポテンシャル $U(x)$ は KdV 方程式の解である）、この Schrödinger 方程式に関する Darboux 変換は KdV の Lax 対全体の共変的な変換である。その結果、関係式 (4) による変換 $U(x) \rightarrow \widehat{U}(x)$ を用い、既に知られている解 $U(x)$ から KdV 方程式の新しい解 $\widehat{U}(x)$ が作られる。このように、Darboux 変換を繰り返すと次第に複雑な解が得られる。

上に述べたようにして得られるポテンシャル、或はそのポテンシャルを生成する Darboux 変換たちの間には特別な関係がある。上記の Schrödinger 方程式 (1) の場合には、Darboux 変換 (2),(3) の繰り返して

$$\psi_1 \rightarrow \psi_2 \rightarrow \cdots \rightarrow \psi_j \rightarrow \psi_{j+1} \rightarrow \cdots$$

ポテンシャル間に結合のある Schrödinger 方程式系が得られる。

$$L_j(u, \lambda)\psi_j(\lambda, x) = 0, \quad L_j(u_j, \lambda) := \partial_x^2 + u_j(\lambda, x) \quad (7)$$

$$u_{j+1}(\lambda, x) = u_j(\lambda, x) + [2F_j(\lambda, x)A_j(\lambda, x) - A_j(\lambda, x)']'/A_j(\lambda, x) \quad (8)$$

そして、この方程式系から $u_j(\lambda, x)$ を消去すると、Darboux 変換による「chain 方程式」と呼ばれる非線形常微分方程式系が得られる。

$$\begin{aligned} F_{j+1}(\lambda, x)' + (F_j(\lambda, x) - (\log A_j(\lambda, x))')' + \\ F_{j+1}(\lambda, x)^2 - (F_j(\lambda, x) - (\log A_j(\lambda, x))')^2 + \\ \mu_j(\lambda)A_j(\lambda, x)^{-2} - \mu_{j+1}(\lambda)A_{j+1}(\lambda, x)^{-2} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

さらに、(Darboux) chain 方程式に付随する Lax 対も Darboux 変換から導き出せる。

$$M_j \psi_j(\lambda, x) = 0, \quad L_j^d \psi_j(\lambda, x) = 0 \quad (10)$$

$$M_j := \partial_x - A_j^{-1} S - F_j, \quad S : \psi_j(\lambda, x) \rightarrow \psi_{j+1}(\lambda, x)$$

$$L_j^d := A_j^{-1} S A_j^{-1} S + A_j^{-1} S F_j + F_j A_j^{-1} S - (\log A_j)' A_j^{-1} S + \mu_j A_j^{-2}$$

上記の「Darboux chain」方程式 (9) は Lax 対 (10) の両立条件

$$A_j (M_j L_j^d - L_j^d M_j) + 2A_j' L_j^d = 0$$

の結果であり、Darboux chain はその意味で 1+1 次元可積分格子であると思っても良い。

3 パンルヴェ方程式に関する Darboux chain

次のような (energy-dependent) ポテンシャルに対する Schrödinger 方程式を考えよう [2]。

$$u_j(\lambda, x) = -\lambda^2 + \lambda v_j(x) + w_j(x) \quad (11)$$

この場合、Darboux 変換を与える $F_j(\lambda, x)$ の λ 依存は高々一次であり、

$$F_j(\lambda, x) = f_j(x) + \lambda h_j(x) \quad (12)$$

その結果得られる Darboux chain は 3つのタイプに分類できる。

3.1 $h_j \equiv 0$: 「A-型の列」

函数 F_j のパラメーター化 (12) に現れる $h_j(x)$ が 0 となる場合のポテンシャルは

$$u_j(\lambda, x) \equiv -\lambda^2 + w_j(x)$$

であり、このポテンシャルに対応する Darboux 変換は次のような函数 F_j と A_j から得られる。

$$F_j = f_j(x), \quad A_j \equiv 1$$

方程式 (5) において、パラメーター μ_j を $\mu_j \equiv \lambda^2 - \nu_j^2$, ($\nu_j \in \mathbb{C}$) とし、 $\lambda^2 \rightarrow \lambda$, $\nu_j^2 \rightarrow \nu_j$ という変換を行う。そうすると、Schrödinger 方程式 (1) は普通の Schrödinger 方程式になり、

$$(\partial_x^2 + w_j(x) - \lambda)\psi_j = 0 \quad (13)$$

Darboux chain (9) は

$$f_j' + f_{j+1}' = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \alpha_j, \quad \alpha_j = \nu_{j+1} - \nu_j \quad (14)$$

という形になる。方程式 (14) は *dressing chain* と呼ばれる [3]。関係式 (6) により、この *dressing chain* の解 f_j は、Schrödinger 方程式 (13) の固有函数で表現できる。

$$(\partial_x^2 + w_j - \nu_j)\varphi_j = 0, \quad f_j = (\log \varphi_j)_x$$

さらに、線形方程式系 (10) により、 *dressing chain* の Lax 対は次の形になる [5]。

$$[\partial_x - \mathcal{S} - f_j] \psi_j = 0 \quad (15)$$

$$[\mathcal{S}^2 + f_j \mathcal{S} + \mathcal{S} f_j + \nu_j - \lambda] \psi_j = 0 \quad (16)$$

以下では、この *dressing chain* の周期的な簡約は野海-山田による アフィン Weyl 群の対称性を持つ A-型の [6] 可積分な力学系を与えることを明らかにする。

3.2 $h_j \equiv 1$: 「 P_{III} -型の列」

函数 F_j のパラメーター化 (12) で $h_j = 1$ とすると、付随する Darboux 変換は

$$F_j = \lambda + f_j, \\ A_j^{-2} \equiv f_j + \frac{1}{2}v_j \quad (\mu_j = 2(\lambda - \nu_j), \nu_j \in \mathbb{C})$$

から得られる。函数 f_j を Schrödinger 方程式の固有函数で表現できる。

$$(\partial_x^2 - \nu_j^2 + \nu_j v_j + w_j)\varphi_j = 0, \quad f_j \equiv -\nu_j + (\log \varphi_j)_x$$

さらに、 d_j, r_j という従属変数を導入すると

$$d_j := f_j + \frac{1}{2}v_j, \quad r_j := f_j - \frac{1}{2}v_j + 2\nu_j$$

次のような chain 方程式が得られる ($\beta_j = \nu_j - \nu_{j+1}$)。

$$d_j' = d_j(d_j - r_j - d_{j+1} + r_{j+1} + 2\beta_j) \quad (17)$$

$$r_j' = d_{j-1}r_{j-1} - d_j r_j \quad (18)$$

以下に説明するように、この chain の (周期 2 の) 周期的な簡約は P_{III} の背後にある可積分系であり、方程式系 (17),(18) を「 P_{III} -型」chain と呼ぶ。

3.3 一般の h_j

特殊化を行わない、一般の h_j の場合には、

$$A_j^{-2} \equiv h_j^2 - 1, \quad F_j = f_j + \lambda h_j$$

$$(\partial_x^2 - \nu_j^2 + \nu_j v_j + w_j)\varphi_j = 0, \quad f_j \equiv -\nu_j h_j + (\log \varphi_j)_x \quad (\nu_j \in \mathbb{C})$$

上記と同様に chain 方程式を作り、(周期 2 の) 周期的な簡約を行うことで P_{VI} が得られる。しかし、 P_{VI} に関する Darboux chain については別の機会に議論する。

4 Darboux chain の周期的な簡約

式 (11) で定義されるポテンシャル $u(\lambda, x)$ に次のような周期条件 [7] ($N \in \mathbb{Z}, \varepsilon \in \mathbb{C}$)

$$u_{j+N}(\lambda, x) \equiv u_j(\lambda + \varepsilon, x) \quad (19)$$

或は、そのポテンシャルを持つ Schrödinger 方程式 (1) の固有函数に周期条件を課すと、

$$\varphi_{j+N}(\nu_{j+N}) \equiv \varphi_j(\nu_j), \quad \nu_{j+N} \equiv \nu_j - \varepsilon \quad (20)$$

Darboux chain の周期的な簡約が得られる。第 3 節による分類に従ってこの簡約を考察しよう。

4.1 A-型の簡約

方程式 (19) や (20) で $N = 1, 2$ の場合は自明であるが、 $N = 3$ の場合 ($\varphi_{j+3} = \varphi_j$, $\nu_{j+3} = \nu_j$) には (14) 式から

$$\begin{cases} f_1' + f_2' = f_1^2 - f_2^2 + \alpha_1 \\ f_2' + f_3' = f_2^2 - f_3^2 + \alpha_2 \\ f_3' + f_1' = f_3^2 - f_1^2 + \alpha_3 \end{cases}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\varepsilon \quad (21)$$

という周期的な dressing chain が得られる ($f_{j+3} = f_j$)。この dressing chain は第一積分を一つ持ち、

$$f_1 + f_2 + f_3 = -\frac{1}{2}\varepsilon x \quad (22)$$

方程式 (21) は 2 階の微分方程式に相当することが分かる。実は、(21) は簡単な従属変換 $g_1 = f_1 + f_2, g_2 = f_2 + f_3, g_3 = f_3 + f_1$ で、Adler [1] や 野海-山田 [8, 9] による P_{IV} の対称形式と同一となる。

$$\begin{cases} g_1' = g_1(g_3 - g_2) + \alpha_1 \\ g_2' = g_2(g_1 - g_3) + \alpha_2 \\ g_3' = g_3(g_2 - g_1) + \alpha_3 \end{cases}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\varepsilon \quad (23)$$

$$P_{IV} : \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{2y} \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2 - a)y + \frac{b}{y}$$

$$y = g_1, \quad a = \frac{\alpha_2 - \alpha_3}{\varepsilon}, \quad b = -2 \left(\frac{\alpha_1}{\varepsilon} \right)^2$$

P_{IV} の対称形式に対応する Schrödinger 方程式系 (7,8) ($j = 1, 2, 3$) の

$$(\partial_x^2 + w_j)\varphi_j = \nu_j\varphi_j, \quad w_{j+1} = w_j + 2(\log \varphi_j)_{2x}$$

双線形形式から

$$\varphi_j = \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}}, \quad \tau_3 = \tau_0 e^{-\varepsilon x^2/4} \Rightarrow w_4 = w_1 - \varepsilon$$

P_{IV} の双線形形式も得られる：

$$\begin{cases} (D_x^2 - \nu_1)\tau_1 \cdot \tau_0 = 0 \\ (D_x^2 - \nu_2)\tau_2 \cdot \tau_1 = 0 \\ (D_x^2 + \varepsilon x D_x + \frac{\varepsilon^2 x^2}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \nu_3)\tau_2 \cdot \tau_0 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$g_1 = (\log \frac{\tau_2}{\tau_0})_x, \quad g_2 = (\log \frac{\tau_0}{\tau_1})_x - \frac{\varepsilon x}{2}, \quad g_3 = (\log \frac{\tau_1}{\tau_2})_x - \frac{\varepsilon x}{2}$$

さらに、Schrödinger 方程式のポテンシャルに対する簡約条件 (19) が

$$u_{j+3}(\lambda, x) = u_j(\lambda + \varepsilon, x)$$

Schrödinger 方程式の固有函数の周期性を導き、

$$\exists \psi_j: \quad \psi_{j+3}(\lambda, x) = \psi_j(\lambda + \varepsilon, x)$$

dressing chain に付随する Lax 対 (15),(16) は次のような微差分方程式の形に簡約される ($\Psi(\lambda) = (\psi_1(\lambda, x), \psi_2(\lambda, x), \psi_3(\lambda, x))^t$)。

$$\begin{aligned} \Psi_x(\lambda) &= \mathcal{B}_1 \Psi(\lambda) + \mathcal{B}_2 \Psi(\lambda + \varepsilon) \\ (\mathcal{A}_1 - \lambda \mathbb{I}_{3 \times 3}) \Psi(\lambda) + \mathcal{A}_2 \Psi(\lambda + \varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} f_1 & 1 & 0 \\ 0 & f_2 & 1 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 & g_1 & 1 \\ 0 & \nu_2 & g_2 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ g_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

上記の Lax 対を $\Psi(\lambda)$ の (形式的な) フーリエ変換†

$$\tilde{\Phi}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{ik\lambda} \Psi(\lambda)$$

で表すと、野海-山田による P_{IV} の Lax 対が得られる [9]：

$$\begin{cases} \Phi_x = \mathcal{M}\Phi \\ -\varepsilon\xi\Phi_\xi = \mathcal{L}\Phi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \mathcal{B}_1 + \xi\mathcal{B}_2, & \mathcal{L} &:= \mathcal{A}_1 + \xi\mathcal{A}_2, \\ \xi &:= e^{-ik}, & \Phi(\xi) &:= \tilde{\Phi}(k) \Big|_{k=\frac{i}{\varepsilon} \log \xi} \end{aligned}$$

†この変換は [10] に載っている Mellin 変換と同じである。

同じ dressing chain (14) を $N = 4$ で閉じると P_V の対称形式が得られる [1]。

$$\begin{cases} f'_1 + f'_2 = f_1^2 - f_2^2 + \alpha_1 \\ f'_2 + f'_3 = f_2^2 - f_3^2 + \alpha_2 \\ f'_3 + f'_4 = f_3^2 - f_4^2 + \alpha_3 \\ f'_4 + f'_1 = f_4^2 - f_1^2 + \alpha_4 \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i = -\varepsilon$$

この場合、第一積分は二つあり、

$$\begin{aligned} f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= -\frac{1}{2}\varepsilon x \\ f_4^2 + f_2^2 - f_3^2 - f_1^2 &= \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4) \end{aligned}$$

この簡約も 2 階の微分方程式に相当することが分かる。その微分方程式は P_V である。

$$y(z) = \frac{f_1 + f_2 - \frac{\varepsilon x}{2}}{f_1 + f_2} \Big|_{x^2=z}$$

$$\begin{aligned} P_V : \quad \frac{d^2 y}{dz^2} &= \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{(y-1)^2}{z^2} \left(Ay + \frac{B}{y} \right) + C \frac{y}{z} + D \frac{y(y+1)}{y-1} \\ A &= \frac{\alpha_1^2}{2\varepsilon^2}, \quad B = -\frac{\alpha_3^2}{2\varepsilon^2}, \quad C = \frac{\alpha_2 - \alpha_4}{4}, \quad D = -\frac{\varepsilon^2}{32} \end{aligned}$$

それに、 P_{IV} と同じように、双線形形式や

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(\log \frac{\tau_1}{\tau_0} \right)_x, \quad f_2 = \left(\log \frac{\tau_2}{\tau_1} \right)_x, \quad f_3 = \left(\log \frac{\tau_3}{\tau_2} \right)_x, \quad f_4 = \left(\log \frac{\tau_0}{\tau_3} \right)_x - \frac{\varepsilon x}{2} \\ \begin{cases} (D_x^2 - \nu_1) \tau_1 \cdot \tau_0 = 0 \\ (D_x^2 - \nu_2) \tau_2 \cdot \tau_1 = 0 \\ (D_x^2 - \nu_3) \tau_3 \cdot \tau_2 = 0 \\ \left[D_x^2 + \varepsilon x D_x + \left(\frac{\varepsilon^2 x^2}{4} - \frac{\varepsilon}{2} - \nu_4 \right) \right] \tau_3 \cdot \tau_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lax 対が得られる：

$$\Phi_x = \mathcal{M}\Phi, \quad -\varepsilon\xi\Phi_\xi = \mathcal{L}\Phi$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \begin{pmatrix} f_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & f_4 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} \nu_1 & f_1 + f_2 & 1 & 0 \\ 0 & \nu_2 & f_2 + f_3 & 1 \\ 0 & 0 & \nu_3 & f_3 + f_4 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_4 \end{pmatrix} + \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_1 + f_4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$N \geq 5$ の場合に dressing chain から得られる可積分系 [11] は、野海-山田による $A_{N-1}^{(1)}$ -型アフィン Weyl 群に付随する力学系 [6, 12] に相当するが、第 5.4 節でこれらのアローチの関係の議論する。

4.2 P_{III} -型の簡約

第 3.2 節に述べたように、 P_{III} -型の Darboux chain (17),(18) を $N = 2$ で閉じると、

$$d_{j+2} = d_j, \quad r_{j+2} = r_j, \quad \beta_{j+2} = \beta_j \quad (25)$$

P_{III} の対称形式が得られる。

$$\begin{aligned} d_1' &= d_1(d_1 - d_2 + r_2 - r_1 + 2\beta_1) \\ d_2' &= d_2(d_2 - d_1 + r_1 - r_2 + 2\beta_2) \\ r_1' &= d_2r_2 - d_1r_1 \\ r_2' &= d_1r_1 - d_2r_2 \end{aligned}$$

この結合系の第一積分を使い、

$$d_1d_2 = \kappa_1 e^{2(\beta_1 + \beta_2)x}, \quad r_1 + r_2 = 2\kappa_2 \quad (\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{C})$$

新しい変数を導入すると

$$z = \exp \varepsilon x, \quad y(z) = \frac{1}{\kappa_{11}} (d_1 e^{-\varepsilon x})|_{x=\frac{1}{\varepsilon} \log z} \quad (\varepsilon \equiv \beta_1 + \beta_2)$$

P_{III} が導き出せる。

$$P_{III} : \quad \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{1}{y} \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 - \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + \frac{Ay^2 + B}{z} + Cy^3 + \frac{D}{y}$$

$$A = 2 \frac{\kappa_{11}(\beta_1 - \kappa_2)}{\varepsilon^2}, \quad B = -2 \frac{\kappa_{12}(\beta_2 - \kappa_2)}{\varepsilon^2}, \quad C = \left(\frac{\kappa_{11}}{\varepsilon} \right)^2, \quad D = - \left(\frac{\kappa_{12}}{\varepsilon} \right)^2.$$

尚、この対称形式を基にする Darboux スキームから P_{III} の双線形化もでき、

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{\kappa_1} \frac{\tau_2 \tau_1^+}{\tau_1 \tau_2^+} e^{\varepsilon x}, & d_2 &= \sqrt{\kappa_1} \frac{\tau_1 \tau_2^+}{\tau_2 \tau_1^+} e^{\varepsilon x} \\ r_1 &= 2\nu_1 - \gamma_1 + d_1 - \frac{D_x \tau_1^+ \cdot \tau_1}{\tau_1 \tau_1^+}, & r_2 &= 2\nu_2 - \gamma_2 + d_2 - \frac{D_x \tau_2^+ \cdot \tau_2}{\tau_2 \tau_2^+} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_x - \nu_1 + \frac{\eta_1}{2}) \tau_2^+ \cdot \tau_1 = \sqrt{\kappa_1} e^{\varepsilon x} \tau_1^+ \tau_2 \\ D_x (D_x - \nu_1 + \frac{\eta_1}{2}) \tau_2^+ \cdot \tau_1 = \sqrt{\kappa_1} e^{\varepsilon x} (D_x + \gamma_1 - \varepsilon - 2\nu_1) \tau_1^+ \cdot \tau_2 \\ (D_x - \nu_2 + \frac{\eta_2 - \varepsilon}{2}) \tau_1^+ \cdot \tau_2 = \sqrt{\kappa_1} e^{\varepsilon x} \tau_2^+ \tau_1 \\ D_x (D_x - \nu_2 + \frac{\eta_2 - \varepsilon}{2}) \tau_1^+ \cdot \tau_2 = \sqrt{\kappa_1} e^{\varepsilon x} (D_x + \gamma_1 - 2\varepsilon - 2\nu_2) \tau_2^+ \cdot \tau_1 \end{array} \right.$$

P_{III} の解 $y(z)$ も

$$y(z) = \frac{\varepsilon}{\kappa_{11}} \left[\log z \frac{\alpha - \nu_1 + \frac{\eta_1}{2}}{\varepsilon} \frac{\tau_2^+}{\tau_1} \right]_z$$

その双線形形式に現れる τ -函数で表せる。

さらに、 P_{IV} の場合と同様にして、 P_{III} の Lax 対も得られる。すなわち、簡約条件 (25) のため Schrödinger 方程式の周期的な固有函数も存在し、

$$\exists \psi_j: \quad \psi_{j+2}(\lambda, x) = \psi_j(\lambda + \varepsilon, x)$$

一般的な Lax 対 (10) から得た (微分差分の) Lax 対の、

$$\begin{aligned} (\psi_1)_x &= A_1^{-1} \psi_2 + (\lambda + f_1) \psi_1 \\ (\psi_2)_x &= A_2^{-1} \psi_1 + (\lambda + f_2) \psi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1^s + A_2(2\lambda + f_1 + f_2 - (\log A_1)') \psi_2 + 2(\lambda - \nu_1) \frac{A_2}{A_1} \psi_1 &= 0 \\ \psi_2^s + A_1(2\lambda + \varepsilon + f_1 + f_2 - (\log A_2)') \psi_1^s + 2(\lambda - \nu_2) \frac{A_1}{A_2} \psi_2 &= 0 \end{aligned}$$

フーリエ変換で、 2×2 の行列を用いた Lax 対を作ることができる (ここで $\Phi \equiv (\Phi_1, \Phi_2)^t$, $1 \ 6$; $z := (A_1 A_2)^{-1}$; $A_j^{-2} \equiv d_j$)。

$$\begin{aligned} 2(z - \xi) \Phi_x &= \begin{pmatrix} z(d_1 + r_1) - \xi d_1 & A_2^{-1}(d_1 - r_2) - \xi A_1^{-1} \\ \xi A_1^{-1}(d_2 - r_1) - \xi^2 A_2^{-1} & z(d_2 + r_2) - \xi d_2 \end{pmatrix} \cdot \Phi \\ 2(\xi - z) \varepsilon \xi \Phi_\xi &= \begin{pmatrix} 2\nu_1(z - \xi) + r_1 \xi & \xi A_1^{-1} - A_2^{-1}(d_1 + r_2) \\ \xi^2 A_2^{-1} - \xi A_1^{-1}(d_2 + r_1) & 2\nu_2(z - \xi) + r_2 \xi \end{pmatrix} \cdot \Phi \end{aligned}$$

5 KP ヒエラルキーとの関係

パンルヴェ方程式は可積分系と密接な関係を持つ [13]。この節では、上記の A-型の周期的な dressing chain と KP ヒエラルキーとの関係を説明する。そのためには、KP ヒエラルキーに付随する τ -函数の Darboux chain を定義し、KP τ -函数の「similarity reduction」と呼ばれる特殊な簡約を導入することにより、KP ヒエラルキーから周期 N の周期的な dressing chain (14) に対応する Darboux τ -chain を構成する。さらに、 P_{IV} の実例を挙げ、KP ヒエラルキーの対称性を構成しているリー群 $GL(\infty)$ とパンルヴェ方程式の重要な対称性であるアフィン Weyl 群 [4, 12] との関係を明らかにする。

5.1 τ -函数上の Darboux と binary Darboux 変換

よく知られているように、KP ヒエラルキーの τ 函数は $\mathfrak{gl}(\infty)$ という無限次元リー環から構成できる [14, 15]。具体的にいえば、KP ヒエラルキーに付随する τ -函数空間は、 $\mathfrak{gl}(\infty)$ の Fock 表現における vacuum ベクトル $|vac\rangle$ の orbit である。

$$\tau(x) = \langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle, \quad g \in \{e^X | X \in \mathfrak{gl}(\infty)\} = GL(\infty)$$

ここで、Hamiltonian $H(\mathbf{x})$ は $\mathfrak{gl}(\infty)$ の表現に使われる fermion 代数の生成元 ψ_i, ψ_j^* ($i, j \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$)

$$[\psi_i^{(*)}, \psi_j^{(*)}]_+ = 0, \quad [\psi_i, \psi_j^*]_+ = \delta_{i+j, 0}$$

で記述される： $H(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sum_{j \in \mathbb{Z} + 1/2} \psi_{-j} \psi_{j+n}^*$ 。この Hamiltonian に現れる無限の時間発展パラメーター $\{x_n\}$ を $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ と書く。

上記の fermion の線形結合を導入すると

$$\psi(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z} + 1/2} \psi_j \lambda^{-j - \frac{1}{2}}, \quad \psi^*(\mu) = \sum_{j \in \mathbb{Z} + 1/2} \psi_j^* \mu^{-j - \frac{1}{2}}$$

KP τ -函数の Darboux 変換 $\tau \rightarrow \tilde{\tau}$ を次の式で表すことができる [16]。

$$\begin{array}{ccc} GL(\infty) \ni g & \longrightarrow & S^{-1} \phi g \quad (\leftrightarrow GL(\infty)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tau & \longrightarrow & \tau \times \Phi \equiv \tilde{\tau} \end{array}$$

$GL(\infty)$ 上の写像 $g \rightarrow S^{-1} \phi g$ は任意の密度関数 $h(\lambda)$ により、

$$\phi := \oint_{C_\lambda(\infty)} \frac{d\lambda}{2\pi i} h(\lambda) \psi(\lambda) \quad (26)$$

作用素 S^{-1} は Fock 空間上で一意に定義される線形作用素である。

$$S^{-1} \psi_j = \psi_{j+1} S^{-1}, \quad S^{-1} \psi_j^* = \psi_{j-1}^* S^{-1}; \quad \langle \ell | S^{-1} = \langle \ell + 1 |, \quad S^{-1} | \ell \rangle = | \ell - 1 \rangle$$

尚、 τ -函数のレベルでは、Darboux 変換 $\tau \rightarrow \tilde{\tau} = \tau \Phi$ は τ と Φ という函数の積で記述できる。函数 Φ は KP の Zakharov-Shabat (ZS) 系の解となり、

$$\Phi(\mathbf{x}) := \oint_{C_\lambda(\infty)} \frac{d\lambda}{2\pi i} h(\lambda) \frac{\tau(\mathbf{x} - \varepsilon[\lambda])}{\tau(\mathbf{x})} e^{\xi_\lambda(\mathbf{x})} \quad (27)$$

KP *eigenfunction* と呼ばれる。 τ と Φ の積を KP ヒエラルキーに付随する vertex operator $X(\lambda)$ [14] の作用 $X(\lambda) \cdot \tau$ の拡張と思っても良い。同様に、adjoint Darboux と呼ばれる変換は次のようなものである。

$$g \longrightarrow S \phi^* g \in GL(\infty) \quad \Longrightarrow \quad \tau \longrightarrow \tau \times \Phi^*$$

$$\phi^* = \oint_{C_\mu} \frac{d\mu}{2\pi i} h^*(\mu) \psi^*(\mu) \quad (28)$$

函数 Φ^* は KP の (形式的な) *adjoint* Zakharov-Shabat (ZS) 系の解であり、

$$\Phi^*(\mathbf{x}) := \oint_{C_\mu(\infty)} \frac{d\mu}{2\pi i} h^*(\mu) \frac{\tau(\mathbf{x} + \varepsilon[\lambda])}{\tau(\mathbf{x})} e^{-\xi_\lambda(\mathbf{x})} \quad (29)$$

KP の *adjoint eigenfunction* と呼ばれる。

さらに、KP の対称性と直接に深い関係を持つ変換は *binary Darboux 変換* と呼ばれている。この変換は以前導入した fermion 作用素 (26),(28) や (adjoint) eigenfunction (27),(29) を用いて定義できる [16]。

$$\begin{array}{ccc} GL(\infty) \ni g & \longrightarrow & (1 + \phi\phi^*)g \in GL(\infty) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & \tau & \longrightarrow \tau \times \Omega \equiv \hat{\tau} ; \quad \Omega := \partial^{-1}\Phi\Phi^* \end{array}$$

ここに使われている記号 $\Omega = \partial^{-1}\Phi\Phi^*$ は、 Ω が下記の完全微分により定義され、

$$d\Omega = \Phi\Phi^* dx_1 + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\Phi, \Phi^*) dx_n, \quad (A_n)_{x_m} \equiv (A_m)_{x_n}$$

$\Omega_{x_1} \equiv \Phi\Phi^*$ となることに基づいて導入した記号である。 $\Omega(\Phi, \Phi^*)$ を Φ と Φ^* による *eigenfunction potential* と呼ぶ。 τ と Ω の積は KP の solitonic vertex operator $X(\lambda, \mu)$ [14] の作用 $(1 + X(\lambda, \mu)) \cdot \tau$ の拡張に対応するものと思っても良い。

5.2 Darboux τ chains

元の $(GL(\infty))$ の要素 g による τ 函数とその τ 函数を k 回 Darboux 変換したものの τ_k ($\leftrightarrow S^{-k}\phi_k\phi_{k-1}\cdots\phi_1 g \in GL(\infty)$) との関係に注目する。 τ と τ_k は k -modified KP と呼ばれるヒエラルキーの双線形恒等式 [15] を満たすことが示せる。

$$\oint_{C_\lambda(\infty)} \frac{d\lambda}{2\pi i} \lambda^k \tau_k(x - \varepsilon[\lambda]) \tau(x' + \varepsilon[\lambda]) e^{\varepsilon\lambda(x-x')} = 0 \quad (30)$$

特に、 $\tau_0 \equiv \tau, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$ という Darboux (τ) chain の各対 $(\tau_{\ell+1}, \tau_\ell)$ が 1-modified KP ヒエラルキーの双線形方程式を満たすことは Darboux τ chain の大事な性質である。1-modified KP ヒエラルキーの最低次の双線形方程式は次のような形になる [15]。

$$(D_{x_2} - D_{x_1}^2)\tau_{\ell+1} \cdot \tau_\ell = 0, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

双線形方程式 (31) は連立方程式として可積分であることに注意する。この可積分系に付随する Lax 対は

$$(\psi_j)_{x_1} = \psi_{j+1} + \left(\log \frac{\tau_j}{\tau_{j-1}}\right)_x \psi_j, \quad (\psi_j)_{x_2} = (\psi_j)_{2x_1} + 2(\log \tau_{j-1})_{2x_1} \psi_j$$

KP ヒエラルキーの Darboux 変換と密接な関係を持つ。

また、上記の双線形恒等式 (30) は、 $\mathfrak{gl}(\infty) \rightarrow A_{k-1}^{(1)}$ という簡約 [17, 15] に対応する恒等式と同一なので $\tau_k \equiv \tau_0$ という周期条件を満たす τ chain が存在することが分かる。そのために、各 τ_ℓ ($\ell = 0, 1, \dots, k-1$) が $\mathfrak{gl}(\infty) \rightarrow A_{k-1}^{(1)}$ の簡約に付随することは、周期条件を満たすための十分条件であることが分かる。

5.3 similarity reduction

KP ヒエラルキーに含まれる方程式 (とその簡約) は scale-invariant なので, *self-similar* な τ 関数が存在する:

$$\exists \tau(\mathbf{x}) : \quad \tau(\eta x_1, \eta^2 x_2, \eta^3 x_3, \dots) = \mathcal{K}(\eta) \tau(\mathbf{x}) \quad \forall \eta \in \mathbb{C}$$

或は, $x_1 \tau_{x_1} + 2x_2 \tau_{x_2} + 3x_3 \tau_{x_3} + \dots = \mathcal{K}'|_{\eta=1} \tau$ という条件を満たす τ -関数が存在する。例えば, 1-modified KP chain (31) に周期的な条件

$$\tau_n = \tau_0$$

を課し, self-similar τ -関数を求めると, conformal weight c_j を

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \ell x_{\ell} (\tau_j)_{x_{\ell}} = c_j \tau_j \quad c_j \in \mathbb{C}$$

と定義して, 次のような双線形形式が得られる。($\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

$$(D_x^2 - \frac{\varepsilon x}{n} D_x) \tau_{\ell+1} \cdot \tau_{\ell} = \kappa_{\ell} \tau_{\ell} \tau_{\ell+1} \quad (32)$$

$$\kappa_{\ell} := \frac{\varepsilon}{n} (c_{\ell} - c_{\ell+1})$$

ここで, 独立変数の特殊化 $x_1 = x, x_2 = -\frac{n}{2\varepsilon}, x_{\ell \geq 3} = 0$ を行ったことに注意する。この双線形方程式に次のような変換を行うと,

$$\varphi_{\ell} := \frac{\tau_{\ell}}{\tau_{\ell-1}} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{4n}}, \quad \nu_{\ell} := \kappa_{\ell-1} - \frac{\varepsilon}{n} (\ell-1)$$

$$w_{\ell} := 2(\log \tau_{\ell-1} e^{-\frac{\varepsilon^2 x^4}{96n^2} - (\ell - \frac{3}{2}) \frac{\varepsilon x^2}{4n}})_{2x}$$

方程式系 (32) は既に得た A-型の周期的な dressing chain (14) の双線形形式であることが分かる。($f_j = (\log \varphi_j)_x, j = 1, \dots, n$)

$$(\varphi_j)_{2x} + w_j \varphi_j = \nu_j \varphi_j, \quad w_{j+1} = w_j + 2(\log \varphi_j)_{2x}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_1, \quad \prod_{\ell=1}^n \varphi_{\ell} = e^{-\frac{\varepsilon x^2}{4}}, \quad \nu_{n+1} = \nu_1 - \varepsilon, \quad w_{n+1} = w_1 - \varepsilon$$

例えば, $n = 3$ で得られる双線形形式から

$$\begin{cases} (D_x^2 - \frac{\varepsilon x}{3} D_x) \tau_1 \cdot \tau_0 = \kappa_0 \tau_0 \tau_1 \\ (D_x^2 - \frac{\varepsilon x}{3} D_x) \tau_2 \cdot \tau_1 = \kappa_1 \tau_1 \tau_2 \\ (D_x^2 - \frac{\varepsilon x}{3} D_x) \tau_0 \cdot \tau_2 = \kappa_2 \tau_2 \tau_0 \end{cases}, \quad \kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_2 = 0 \quad (33)$$

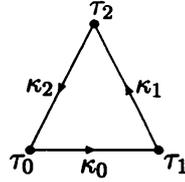
$$g_i = (\log \frac{\tau_{i+1}}{\tau_{i-1}} e^{-\frac{\varepsilon x^2}{6}})_x, \quad \alpha_i = \nu_{i+1} - \nu_i \equiv \kappa_i - \kappa_{i-1} - \frac{\varepsilon}{3}$$

P_{IV} の双線形形式 (24) を対称化した双線形形式が得られる [9]。

従って, 「周期 n の周期的な dressing chain」は「 $A_{n-1}^{(1)}$ -型ヒエラルキーの self-similar な簡約」による可積分系であることが分かる。この等価性を用い, P_{IV} の場合を実例としてとりあげ, 周期的な dressing chain の主な対称性を考察する。

5.4 P_{IV} の $GL(\infty)$ による対称性

P_{IV} の $GL(\infty)$ に基づく対称性を考察するために P_{IV} に対応する Darboux τ chain (33) を次の図式で記述する。

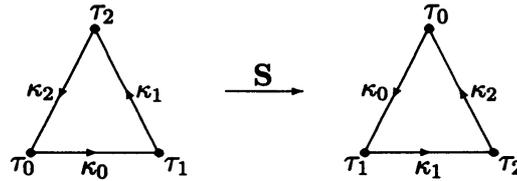


この図式を構成している矢印は、 P_{IV} の双線形形式 (33) の定数 κ_ℓ に対応する方程式、又は、KP eigenfunction Φ_ℓ ($\ell = 0, 1, 2$; $\tau_3 \equiv \tau_0, \kappa_3 \equiv \kappa_0$)

$$\Phi_\ell := \frac{\tau_{\ell+1}}{\tau_\ell}, \quad (\Phi_\ell)_{2x} - \frac{\varepsilon}{3}(\Phi_\ell)_x + 2(\log \tau_\ell)_{2x} \Phi_\ell = \kappa_\ell \Phi_\ell \quad (34)$$

による Darboux 変換 $\tau_\ell \rightarrow \tau_{\ell+1} \equiv \tau_\ell \times \Phi_\ell$ を表している。

まず、 P_{IV} に付随する chain は $(\tau_0 \rightarrow \tau_1, \tau_1 \rightarrow \tau_2, \tau_2 \rightarrow \tau_0), (\kappa_0 \rightarrow \kappa_1, \kappa_1 \rightarrow \kappa_2, \kappa_2 \rightarrow \kappa_0)$ という (自明の) 対称性を持ち、この対称性を S で表示する。



$$S(\tau_i) = \tau_{i+1}, \quad S(\kappa_i) = \kappa_{i+1}; \quad S^3 \equiv 1$$

対称性 S は、 $GL(\infty)$ と関連づけると、KP の Darboux 変換であり、 P_{IV} の対称形式 (23) に、以下のように作用する。

$$S(g_i) = g_{i+1}, \quad S(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$$

線形方程式 (34) に相当する adjoint eigenfunction Φ_ℓ^* を導入すると、

$$\Phi_\ell^* := \frac{\tau_{\ell-1}}{\tau_\ell} \equiv \Phi_{\ell-1}^{-1}, \quad (\Phi_\ell^*)_{2x} + \frac{\varepsilon}{3}(\Phi_\ell^*)_x + 2(\log \tau_\ell)_{2x} \Phi_\ell^* = \kappa_{\ell-1} \Phi_\ell^*$$

KP の binary Darboux 変換に基づく対称性を作ることができる。

このとき、Sine-Gordon 方程式に対する Darboux 変換において成立する有名な Bianchi permutability 定理と類似の定理が成立することが構成の要となる。その定理とは、「線形方程式 (34) を満たす eigenfunction $\Phi_{\ell-1}$ と Φ_ℓ による Darboux 変換の合成 $\tau_{\ell-1} \rightarrow \tau_{\ell+1}$ と同じ作用を持つ (2つの) Darboux 変換の合成は一意に定まる」こと

$$\begin{array}{ccccc}
& & \hat{\tau}_\ell & & \\
& \nearrow^{(\hat{\Phi}_\ell^*)^{-1} \equiv \hat{\Phi}_{\ell-1}} & & \searrow^{\hat{\Phi}_\ell} & \\
\tau_{\ell-1} & & & & \tau_{\ell+1} \\
& \searrow_{(\Phi_\ell^*)^{-1} \equiv \Phi_{\ell-1}} & & \nearrow_{\Phi_\ell} & \\
& & \tau_\ell & &
\end{array}$$

定理に表れる新しい Darboux 変換を構成する eigenfunction $\hat{\Phi}_{\ell-1}$ と $\hat{\Phi}_\ell$ は元の eigenfunction $\Phi_{\ell-1}$ と Φ_ℓ から計算できる。

$$\hat{\Phi}_\ell = \frac{\Phi_\ell}{\Omega(\Phi_\ell, \Phi_\ell^*)}, \quad \hat{\Phi}_{\ell-1} \equiv (\hat{\Phi}_\ell^*)^{-1} = \Phi_{\ell-1} \times \Omega(\Phi_\ell, \Phi_\ell^*)$$

さらに、この新しく得られた Darboux 変換の中間にある τ -函数 $\hat{\tau}_\ell$ は self-similar τ -函数であり、

$$\hat{\tau}_\ell = \tau_\ell \times \Omega(\Phi_\ell, \Phi_\ell^*) \equiv \tau_\ell \times \partial^{-1} \frac{\tau_{\ell-1} \tau_{\ell+1}}{\tau_\ell^2} \quad (35)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j x_j (\hat{\tau}_\ell)_{x_j} = \hat{c}_\ell \hat{\tau}_\ell, \quad \hat{c}_\ell = c_{\ell-1} + c_{\ell+1} - c_\ell + 1 \quad (36)$$

新しい eigenfunction $\hat{\Phi}_{\ell-1}$ と $\hat{\Phi}_\ell$ はそれぞれ固有値 $\hat{\kappa}_{\ell-1} = \kappa_\ell - \frac{\varepsilon}{N}$ と $\hat{\kappa}_\ell = \kappa_{\ell-1} + \frac{\varepsilon}{N}$ に対する線形方程式 (34) を満たすことも容易に示せる。これを、例えば $\hat{\Phi}_\ell$ の場合に見ると、eigenfunction potential $\Omega(\Phi_\ell, \Phi_\ell^*)$ の具体的な表現が得られる。

$$\alpha_\ell \Omega(\Phi_\ell, \Phi_\ell^*) \equiv (\Phi_\ell)_x \Phi_\ell^* - \Phi_\ell (\Phi_\ell^*)_x - \frac{\varepsilon x}{3} \Phi_\ell \Phi_\ell^*$$

この関係式に現れる定数 α_ℓ は

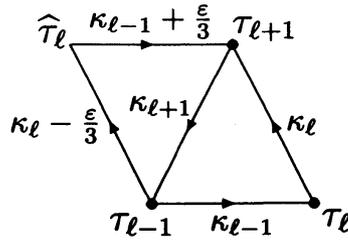
$$\alpha_\ell := \frac{\varepsilon}{3} (2c_\ell - c_{\ell+1} - c_{\ell-1} - 1)$$

binary Darboux 変換 $\tau \rightarrow \hat{\tau}$ (35) によって $\alpha_\ell \rightarrow \hat{\alpha}_\ell$ と変換されるが、この変換は、公式 (36) により、リー環 $A_2^{(1)}$ に付随するアフィン Weyl 群の root system 上の作用と同じ写像である。

$$\hat{\alpha}_\ell = -\alpha_\ell, \quad \hat{\alpha}_{\ell \pm 1} = \alpha_{\ell \pm 1} + \alpha_\ell$$

従って、binary Darboux 変換 (35) やそれらに誘導された写像を B_ℓ ($\ell = 0, 1, 2$) で示すと、 B_ℓ はアフィン Weyl 群の生成元であると思っても良い。

$$\begin{aligned}
B_\ell(\tau_\ell) &= \tau_\ell \partial^{-1} \frac{\tau_{\ell+1} \tau_{\ell-1}}{\tau_\ell^2}, & B_\ell(\tau_{k \neq \ell}) &= \tau_k & (\tau_3 \equiv \tau_0) \\
B_\ell(c_\ell) &= c_{\ell+1} + c_{\ell-1} - c_\ell + 1, & B_\ell(c_{k \neq \ell}) &= c_k & (c_3 \equiv c_0)
\end{aligned}$$



変換 B_ℓ は P_{IV} の対称形式 (23) において、以下の Bäcklund 変換を誘導する。

$$\begin{cases} B_i(g_{i\pm 1}) = g_{i\pm 1} \pm \frac{\alpha_i}{g_i} \\ B_i(g_i) = g_i \end{cases}, \quad \begin{cases} B_i(\alpha_{i\pm 1}) = \alpha_{i\pm 1} + \alpha_i \\ B_i(\alpha_i) = -\alpha_i \end{cases}$$

尚、既に得られた対称性 S と B_ℓ は拡張されたアフィン Weyl 群 $\widehat{W}(A_{N-1}^{(1)})$ [9, 12] を構成していることも分かる。

$$B_i^2 \equiv 1, \quad (B_{i+1}B_i)^3 = 1, \quad SB_{i+1} = B_iS, \quad S^3 = 1$$

6 終わりに

この論文では、Darboux chain という概念を用い、Painlevé 方程式を chain の周期的な簡約と表すことによって、Painlevé 方程式の双線形形式や Lax 対を系統的に構成した。また、Darboux chain の特別な場合である dressing chain を KP ヒエラルキーと関連づけることもできた。さらに、こうした chain と KP ヒエラルキーとの関係が分かれば、KP の対称性から Painlevé 方程式までの簡約が記述できることを示した。特に、dressing chain に含まれる P_{IV} の場合には、 $GL(\infty)$ と Painlevé 方程式に対するアフィン Weyl 群との関係が明らかになった。この解析を $A_{n-1}^{(1)}$ の一般的な A -型アフィンリー環へ拡張することも可能であり、この一般化を別の機会に詳述する。ところで、Painlevé 方程式はアフィン Weyl 群と無関係な対称性を持つことも知られている [1, 18]。例えば、 P_{IV} の双線形形式 (33) は、

$$\tilde{\tau}_1(x) = \tau_0(-ix), \quad \tilde{\tau}_0(x) = \tau_1(-ix), \quad \tilde{\tau}_2(x) = \tau_2(-ix)$$

$$\tilde{\kappa}_0 = -\kappa_0, \quad \tilde{\kappa}_1(x) = -\kappa_2, \quad \tilde{\kappa}_2 = -\kappa_1$$

という対称性を持つ。従って、 P_{IV} の対称形式 (23) は次の対称性を示す [1]。($\ell = 1, 2, 3$, $g_{\ell+3} \equiv g_\ell, \alpha_{\ell+3} \equiv \alpha_\ell$)

$$T_\ell(g_{\ell\pm 1}(x)) = ig_{\ell\mp 1}(-ix), \quad T_\ell(g_\ell(x)) = ig_\ell(-ix)$$

$$T_\ell(\alpha_{\ell\pm 1}) = \alpha_{\ell\mp 1}, \quad T_\ell(\alpha_\ell) = \alpha_\ell$$

$$(T_\ell)^4 = 1, \quad ST_{\ell+1} = T_\ell S = S^2 T_\ell, \quad T_\ell B_\ell = B_\ell T_\ell$$

今度、KP ヒエラルキーの代数的な構造を用いてこうした対称性も考察したい。

参考文献

- [1] V.E. Adler, “Nonlinear chains and Painlevé equations”, *Physica D* **73** (1994) 335–351.
- [2] R. Willox and J. Hietarinta, “Painlevé equations from Darboux chains Part 1: $P_{III} - P_V$ ”, *preprint* (2002)
- [3] A. Shabat, “The infinite-dimensional dressing dynamical system”, *Inverse Problems* **8** (1992) 303–308.
- [4] K. Okamoto, *The Painleve equations and the Dynkin diagrams* in “Painleve Transcendents”, Edited by D. Levi and P. Winternitz, Plenum (1992) pp 299–313.
- [5] A. Shabat, *Dressing chains and lattices* in “Proceedings of the Workshop on Non-linearity, Integrability and all that: Twenty years after NEEDS '79”, edited by M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, B. Prinari and G. Soliani, WorldScientific, Singapore (2000) pp 331–342.
- [6] M. Noumi and Y. Yamada, “Higher order Painlevé equations of type $A_2^{(1)}$ ”, *Funkcialaj Ekvacioj* **41** (1998) 483–503.
- [7] V.E. Adler, A.B. Shabat and R.I. Yamilov, “Symmetry approach to the integrability problem”, *Theoretical and Mathematical Physics* **125** (2000) 1603–1661.
- [8] M.Noumi and Y.Yamada, “Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials”, *Nagoya Math. J.* **153** (1999) 53–86.
- [9] 野海正俊「パンルヴェ方程式 - 対称性からの入門 -」(朝倉書店、東京、2000年)
- [10] 高崎金久「dressing chain のスペクトル曲線と Hamilton 構造」京都大学数理解析研究所 講究録 **1280** (2002) 98–116
- [11] A.P. Veselov and A.B. Shabat, “Dressing Chains and the Spectral Theory of the Schrödinger Operator”, *Functional Analysis and its Applications* **27** (1993) 81–96.
- [12] M.Noumi and Y.Yamada, “Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painleve equations”, *Comm. Math. Phys.* **199** (1998) 281–295.
- [13] 山田泰彦「Painlevé 方程式から見た soliton 理論入門」Rokko Lectures in Mathematics vol.7 pp 1–16 (神戸大学理学部数学教室、2000年)
- [14] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo and T. Miwa, *Proceedings of RIMS symposium on non-linear integrable systems - Classical theory and quantum theory* M. Jimbo and T. Miwa (Eds.) (World Scientific, Singapore, 1983) p 39–119.

- [15] M. Jimbo and T. Miwa, "Solitons and Infinite Dimensional Lie Algebras", Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983) 943–1001.
- [16] R. Willox, T. Tokihiro, I. Loris and J. Satsuma, Inverse Problems **14** (1998) 745–762.
- [17] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa, "Transformation Groups for Soliton Equations –Euclidean Lie Algebras and Reduction of the KP Hierarchy–", Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18** (1982) 1077–1110.
- [18] N.S. Witte, "New transformations for Painlevé's third transcendent", *preprint* (2002) arXiv:math.CA/0210019