数理解析研究所講究録 1304 巻 2003 年 88-113

SOME REMARKS ON S.SHELAH'S FORMULA

北陸職業能力開発大学校　溝口　実 (MINORU MIZOGUCHI)

Department of Liberal Arts , Hokuriku Polytechnic College

1. はじめに

記号の使い方などは日本語に関しては [2],[3],[4] と [7] に従い，それ以上の記号に付いては [1] に従う．ここでは，この論文を読むにあたって，必用最小限の定義とそれを分かりやすくする例だけを述べる．

a は正則基数の無限集合とする．よく使うのは区間で，例えば $a_1=\{\aleph_n : 1<n<\omega\}$ とか $a_2=\{\aleph_\alpha : \alpha<\omega_1$ で α は後続順序数$\}$ という物である．

$\Pi a=\{f :$ すべての $i\in a$ に対し $f(i)<i\}$ と置く．例えば，$\Pi a_1=\Pi_{1<n<\omega}\aleph_n$ となる．

a 上の超フィルターを D と置く．$f,g\in\Pi a$ に対し，順序を次のように定義する．$f<_D g$ iff $\{i\in a : f(i)<g(i)\}\in D$ とし，$f=_D g$ iff $\{i\in a : f(i)=g(i)\}\in D$ とする．すると，$\Pi a/D$ は代表元に対し $<_D$ で全順序となり，最小元は全ての $i\in a$ に対して $f(i)=0$ となる代表元 f を持つ物である．従って，$\Pi a/D$ に対し共終数が存在し，それを $cf(\Pi a/D)$ で表す．これを，a の潜在的共終数という．

次に，潜在的共終数の集合を $pcf(a)=\{cf(\Pi a/D) : D$ は a 上の超フィルター$\}$ と置く．

以下 $|a|<\min(a)$ を満たすものとする．

Definition 1. $pcf_\mu(a)=\bigcup\{pcf(b) : b\in[a]^{\leq\mu}\}$

明らかに，$|a|\leq\mu$ ならば $pcf_\mu(a)=pcf(a)$ である．

Definition 2. λ が *κ-strong* とは，全ての $\rho<\lambda$ に対し，$\rho^\kappa<\lambda$ となる事である．

2. 講演内容

はじめに，重要な定理と系，補題を述べる．

Theorem 6.2.4 in [1]. a は最大元を持たない区間とし，$\min(a)$ は *μ-strong* とする．この時，$\sup(pcf_\mu(a))=(\sup(a))^\mu$ となる．

この証明は，[1] で 2 ページにわたる物である．

Corollary 7.2.7 in [1]. a が区間ならば，$|pcf(a)|\leq|a|^{+3}$

この系は，S.Shelah が 1980 年代後半に示した兎に角凄いというしかない結果である．

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Lemma 8.1.1 in [1]. δ を極限数とし，μ を無限基数とする．$a = [\aleph_\alpha, \aleph_\delta)$ と置き $\aleph_\alpha$ は μ-*strong* とする．この時，$\aleph_\delta^\mu < \aleph_{\alpha+|pcf_\mu(a)|^+}$ となる．

この補題は，Theorem 6.2.4 から簡単にでる．

proof. Theorem 6.2.4 より，$\sup(pcf_\mu(a)) = \aleph_\delta^\mu$ がいえる．明らかに，b を $\min(b) = \aleph_\alpha$ となる正則基数の区間とすると，$\sup(b) < \aleph_{\alpha+|b|^+}$ となる．$\min(a) = \min pcf_\mu(a)$ であるから，$b := pcf_\mu(a)$ とおけば補題がいえる．

Theorem. δ を極限数とし $\aleph_\alpha := (2^{cf(\delta)})^+$ と置く．
この時 $|[(2^{cf(\delta)})^+, \aleph_\delta)| \le 2^{cf(\delta)}$ と仮定すると，
$\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \max\{\aleph_{\alpha+|[(2^{cf(\delta)})^+,\aleph_\delta)|^{+4}}, (2^{cf(\delta)})^+\}$ がいえる．

proof. [1] にある Teorem 8.1.4. と同様の議論で証明する．
$2^{cf(\delta)} < \aleph_\delta$ ならば $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \aleph_{\alpha+|[(2^{cf(\delta)})^+,\aleph_\delta)|^{+4}}$ を証明すれば十分である．
$a := [\aleph_\alpha, \aleph_\delta)_{reg}$ と置く．$|a| < \min(a)$ の条件を満たす．ここで $\kappa := cf(\delta)$ と置く．Lemma 8.1.1 により $\aleph_\delta^\kappa < \aleph_{\alpha+|pcf_\kappa(a)|^+}$ となる．
$\kappa < |a|$ であれば $pcf_\kappa(a) \subseteq pcf_{|a|}(a)$ であり，$|a| \le \kappa$ であれば $pcf_\kappa(a) = pcf_{|a|}(a)$ となる．よって $\aleph_\delta^\kappa < \aleph_{\alpha+|pcf_{|a|}(a)|^+}$ が成り立つ．Corollary 7.2.7 により $|pcf(a)| \le |a|^{+3} = |[\aleph_\alpha, \aleph_\delta)|^{+3}$ がいえる．
故に $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \aleph_{\alpha+|[(2^{cf(\delta)})^+,\aleph_\delta)|^{+4}}$ が成立する．

Corollary. δ 極限数とし $|\delta| \le 2^{cf(\delta)}$ と仮定する，
このとき$\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (2^{cf(\delta)})^+\}$ が成立する．

Example.

(1) $\delta := \omega_n + \omega$ と置き $2^\omega = \aleph_{\omega_n}$ と仮定する，このとき定理により $\aleph_{\omega_n+\omega}^\omega < \aleph_{\omega_4}$ $(n \in \{1,2,3\})$ が成り立つ．
(2) $\delta := \omega_4 + \omega$ と置き $2^\omega = \aleph_{\omega_4}$ と仮定する，このとき定理により (1) と同様に $\aleph_{\omega_4+\omega}^\omega < \aleph_{\omega_4+\omega_4}$ が成り立つ．
(3) $2^\omega < \aleph_\delta, cf(\delta) = \omega$ で $|\delta| = \omega_1$ となる δ に対し，系より $\aleph_\delta^\omega < \aleph_{\omega_5}$ がいえる．

Remark. δ を極限数とし，下記の不等式に付いて考える:
$* \in \{|\delta|, cf(\delta)\}$ とし，$\aleph_\delta^* < \max\{\aleph_{|*|^{+4}}, (2^*)^+\}$.

7 つの場合が考えられる:

(1) $\aleph_\delta^{|\delta|} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (2^{|\delta|})^+\}$;
(2) $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (2^{cf(\delta)})^+\}$;
(3) $\aleph_\delta^{|\delta|} < \max\{\aleph_{cf(\delta)^{+4}}, (2^{cf(\delta)})^+\}$;
(4) $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \max\{\aleph_{cf(\delta)^{+4}}, (2^{cf(\delta)})^+\}$;
(5) $\aleph_\delta^{|\delta|} < \max\{\aleph_{cf(\delta)^{+4}}, (2^{|\delta|})^+\}$;
(6) $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \max\{\aleph_{cf(\delta)^{+4}}, (2^{|\delta|})^+\}$;
(7) $\aleph_\delta^{|\delta|} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (2^{cf(\delta)})^+\}$.

(1). [1] の Theorem 8.1.4 または [2] の定理D

(2). $\delta \le 2^{cf(\delta)}$ を仮定すると, 上記の Corollary.

(3) and (4). この時は反例が存在する. $\delta = \aleph_{(2^\omega)^{+4}} + \omega$ と置くと, それが求める物である.

(5) and (6). この場合は独立している.

(5) と (6) を満たさないモデルについて. $\delta = \omega_5 + \omega$ ととる. $2^{|\delta|} = \aleph_{\omega_5+1} < \aleph_\delta$ と 2^{ω_5} を動かす. するとこのモデルでは (5) と (6) は成立しない.

$\aleph_\delta < 2^{|\delta|}$ とおけば, (5) と (6) は成立する.

(7). $cf(\delta) < |\delta|$ のときを考えればよい. この時, (7) は独立している.

(7) を満たすモデルについて. 明らか.

満たさないモデルについて: 下記を満たすモデルを作る.

$2^{cf(\delta)} < \aleph_\delta$ で $\aleph_{|\delta|^{+4}} < 2^{|\delta|}$.

このモデルでは, $\aleph_{|\delta|^{+4}} < \aleph_\delta^{|\delta|}$ が成立する.(|δ| が特異基数のとき, $cf(\delta) < \kappa < |\delta|$ となる正則基数κ をとる. $|\delta|$ の変わりに κ で同じ議論をすればよい.)

Problem. $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (2^{cf(\delta)})^+\}$ は成立するか?

筑波大の塩谷 真弘 さんから, この研究集会で指摘して頂いたことであるが, 問題の答えは"成立しない"である.

反例. $\aleph_\delta = \delta$ で δ は強極限特異基数とする. すると, $2^{\aleph_\delta} = \aleph_\delta^{cf(\delta)}$ となり, 問題の反例になっている.

次の定理も 塩谷 真弘 さんから, この研究集会で指摘して頂いたことである.

Theorem(S.Shelah). $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \max\{\aleph_{|\delta|^{+4}}, (|\delta|^{cf(\delta)})^+\}$ は成立する.

[6] によると [5] から分かる事のはずであるが, 筆者の [6] に関する英語の読み違いと, 内容が高度である事より, この研究集会まで問題が成り立つものだと思っていた. この論文の定理と同様に示せるがあえて証明する (注意 : ここでの証明は [5] のような高度な定理, 補題は使わず [1] の内容の知識だけで示す)

proof. $|\delta|^{cf(\delta)} < \aleph_\delta$ ならば $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \aleph_{|\delta|^{+4}}$ をいえばよい.

$\aleph_\alpha := (|\delta|^{cf(\delta)})^+$ と置き, $a = [(|\delta|^{cf(\delta)})^+, \aleph_\delta)_{reg}$ と置く. $(|\delta|^{cf(\delta)})^+$ は$\kappa := cf(\delta)$-strong なので, 補題 8.1.1 より$\aleph_\delta^\kappa < \aleph_{\alpha+|pcf_\kappa(a)|^+}$ となる.

$|pcf_\kappa(a)| \le |pcf(a)|$ と系 7.2.7 より, $\aleph_\delta^\kappa < \aleph_{\alpha+|\delta|^{+4}}$ となる. $\alpha < \delta$ より$\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \aleph_{|\delta|^{+4}}$ となる.

注意. *S.Shelah* の定理から系は導ける. なぜなら, $|\delta| \le 2^{cf(\delta)}$ ならば $|\delta|^{cf(\delta)} = 2^{cf(\delta)}$ であるから.

最後に, $\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \aleph_{(|\delta|^{cf(\delta)})^+}$ という不等式は S.Shelah の偉大な定理であるが, どちらの S.Shelah の定理にも $(|\delta|^{cf(\delta)})^+$ という基数が出てくる事が興味深い.

これ以降の節は，潜在的共終性理論を知らない人の為の物で，必要の無い人がこの論文を読まれる人の殆どであろうが，あえて書く．

3. 潜在的共終性理論の導入

まず残りの章のための基本となる記法及び定義を述べる．

a は $\min(a) > |a|$ なる正則基数の無限集合とする．a が正則基数の区間であるとは，$\xi < \eta$となるξ, ηが存在して $a = \{\alpha : \xi \leq \alpha < \eta, \alpha$ は正則基数 $\}$ となる事である．Πa は集合 $\{f : a \to \sup(a) \mid \forall i \in a(f(i) < i)\}$ である．a 上のイデアル I について縮積 $\Pi a/I$ は同値関係 $\{i \in a : f(i) \neq g(i)\} \in I$ による同値類全体である．$f, g \in \Pi a$ に対して $f \leq_I g$ とは $\{i \in a : g(i) < f(i)\} \in I$ であること，$f <_I g$ とは $\{i \in a : g(i) \leq f(i)\} \in I$ であること．フィルターに対する縮積はその双対イデアルによる縮積として定義する．フィルターが超フィルターのとき，超積とよぶ．

定義 3.1. λ は基数とする．Πa の元の列 $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ が集合 a 上のイデアル I に関して狭義単調増加とは$\alpha < \beta$ について $f_\alpha <_I f_\beta$ であること．共終とは $\forall h \in \Pi a \, \exists \alpha < \lambda (h \leqslant_I f_\alpha)$ となる事である．λ が，a の I による縮積の真共終性 ($\lambda = tcf(\Pi a/I)$ と表す．) とは，λ が正則であり I に関して狭義単調増加な共終列 $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in \Pi a^\lambda$ が存在する事である．

$I = \{\emptyset\}$ の場合 $tcf(\omega \times \omega_1/I)$ は明らかに存在しない．

$b \subsetneqq a$ が Πa の共終性 $< \lambda$ を強制する ($b \Vdash cof < \lambda$) とは，$b \in D$となる全ての a 上の超フィルター Dに対して，$cf(\Pi a/D) < \lambda$ となることである．更に，$J_{<\lambda}(a) = \{b \subsetneqq a : b \Vdash cof < \lambda\}$ とおく．すると，$J_{<\lambda}(a)$ は a 上のイデアルと成る．

定理 3.2. $\Pi a/J_{<\lambda}(a)$ は λ-有向的である．すなわち，すべての $B \subsetneqq \Pi a/J_{<\lambda}(a)$ に対して，$|B| < \lambda$ ならば B は $\Pi a/J_{<\lambda}(a)$ で有界となる．

証明. $|B|$ に関する帰納法　(a) $|B| \leqslant |a|^+$ のとき
$\alpha \in a$に対し，$f(\alpha) = \sup\{g(\alpha) : g \in B\}$ と定義すると，f は B の上界となる．
(b)$|a|^+ < |B| = \mu < \lambda$ のとき
$B = \{g_\alpha : \alpha < \mu\}$ が $\leqslant_{J_{<\lambda}(a)}$ 増加列としても一般性を失わない．μが特異基数のときは明か．μが正則基数のとき．背理法で示すため，B は$\Pi a/J_{<\lambda}(a)$ で上界を持たないと仮定する．帰納的に増加列 $\langle h_\beta ; \beta < |a|^+ \rangle$ を次のように作る．$h_0 = g_0$, βが極限数のときは，$\alpha \in a$ に対し $h_\beta(\alpha) = \sup\{h_\gamma(\alpha) : \gamma < \beta\}$ と定義する．h_β が定義出来たとして $h_{\beta+1}$ を定義する．h_βはBの上界でないので，$b^\beta_\alpha = \{\gamma \in a\colon g_\alpha(\gamma) > h_\beta(\gamma)\}$ とおき，$i_\beta = \min\{\alpha < \mu : b^\beta_\alpha \notin J_{<\lambda}(a)\}$ とする．$b^\beta_{i_\beta} \notin J_{<\lambda}$ より，$b^\beta_{i_\beta} \in D$ で $cf(\Pi a/D) \geqslant \lambda$ となる．従って $\leqslant_D$ に関して B の上界 f が存在する．ここで，$\alpha \in a$ に対し $h_{\beta+1}(\alpha) = \max\{h_\beta(\alpha), f(\alpha)\}$ と定義する．以上が $\langle h_\beta ; \beta < |a|^+ \rangle$ の構成である．ところで $\mu > \forall \alpha > i_\beta (b^{\beta+1}_\alpha \subsetneqq b^\beta_\alpha)$ が成り立つ．$\beta < \beta' \to b^{\beta'}_\alpha \subsetneqq b^\beta_\alpha$ と，$\alpha \geqslant i_\beta$ に対し $b^{\beta+1}_\alpha \notin D$ かつ $b^\beta_\alpha \in D$ であるからである．$|a|^+ < \mu$ が正則基数であるから，$\forall \beta < |a|^+$ ($i_\beta < \delta$) となる $\delta < \mu$ が存在する．従って $\langle b^\beta_\delta : \beta < |a|^+ \rangle\}$ が $\subsetneqq$ について狭義単調増加となり矛盾する．□

系 3.3. $cf(\Pi a/D) < \lambda$ ならば，$b \Vdash cof < \lambda$となる $b \in D$が存在する．

証明. $cf(\Pi a/D) = \mu < \lambda$ とし $\langle g_\alpha/D : \alpha < \mu \rangle$ が $\Pi a/D$ の狭義単調増加な共終列とであると仮定する．定理 3.2 より，$\forall \alpha < \mu (g_\alpha \leqslant_{J_{<\lambda}(a)} g)$ となる g が存在する．従って，$\forall \alpha < \mu (g_\alpha \leqslant_D g)$ となり矛盾する．□

命題 3.4. D を a 上の超フィルターとする．このとき，$cf(\Pi a/D) < \lambda$ と $D \cap J_{<\lambda(a)} \neq \emptyset$ は同値である．

$J_{<\lambda}(a)$ の定義と命題 3.4 より，次の二つのことが直ちに言える．

(1) $\mu < \lambda$ ならば $J_{<\mu}(a) \subsetneqq J_{<\lambda}(a)$

(2) λ が極限数ならば，$J_{<\lambda}(a) = \bigcup\{J_{<\lambda}(a) : \mu < \lambda\}$

補題 3.5. a 上のイデアル I が存在して $\lambda = tcf(\Pi a/I)$ であることと $J_{<\lambda}(a) \neq J_{<\lambda^+}(a)$ は同値である．

証明. Iのの双対フィルターの拡張である超フィルター D をとる．すべての $\Pi a/I$ の共終列は $\Pi a/D$ の共終列となるので $cf(\Pi a/D) = tcf(\Pi a/I) = \lambda$ となる．命題 3.4 より $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$ と $D \cap J_{<\lambda^+}(a) \neq \emptyset$ がいえる．故に $J_{<\lambda}(a) \neq J_{\lambda^+}(a)$ となる．逆は明か．□

a の潜在的共終性の集合 $pcf(a)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} pcf(a) &= \{\lambda | \exists I\ tcf(\Pi a/I) = \lambda\} \\ &= \{\lambda | \exists D\ cf(\Pi a/D) = \lambda\} \end{aligned}$$

明らかに $|pcf(a)| \leqslant 2^{|a|}$ が成立する．

pcf(a) に関する注意.

(1) $pcf(a)$ は最大元をもつ．[$\because$ λ=min$\{\gamma|J_{<\gamma}(a)$=$P(a)\}$ とおく．λ は極限基数でないので $\lambda = \kappa^+$ と表わせる．λ の最小性より，κ は正則基数となり $J_{<\kappa}(a) \neq J_{<\kappa^+}$ となるので補題 3.5 より$\kappa \in pcf(a)$ となる．]

(2) $pcf(a)$ は正則基数の区間である必要はない．例えば，$a = \{\aleph_{2n} : 0 < n < \omega\}$ は $\aleph_{2m+1}$ を実現しない．

命題 3.6. $\langle A <\rangle$ は全順序とし，A は最大元を持たないとする．更に，λ は正則で，A の元からなる列 $\langle a_\delta : \delta < \lambda\rangle$ が $\forall b \in A\, \exists \delta_1 < \lambda\, \delta_1 \leqslant \forall \delta < \lambda\ ; b \leqslant a_\delta$ を満たすとする．このとき，$\langle a_\delta : \delta < \lambda\rangle$ の長さがλである狭義単調増加共終部分列が存在する．

補題 3.7. $\min(a) > |pcf(a)|$ とする．このとき　$pcf(pcf(a)) = pcf(a)$ が成り立つ．

証明. $b = pcf(a)$ とおく．$pcf(a) \subsetneqq pcf(b)$ は主超フィルターを考えることにより成立する．$pcf(b) \subsetneqq pcf(a)$ を示す．$\lambda \in pcf(b)$ 対して b 上の超フィルターが存在して $\Pi b/D$ 上の狭義増加共終列 $\langle g_\delta/D : \delta < \lambda\rangle$ がとれる．更に，$\beta \in b$ に対し a 上の超フィルター D_β が存在して$\Pi a/D_\beta$ 上の狭義増加共終列 $\langle f^\beta_\delta/D_\beta : \delta < \beta\rangle$ がとれる．a 上の超フィルター D^* を次のように定義する．$A \subsetneqq a$ に対して $A \in D^* \leftrightarrow \{\beta \in b | A \in D_\beta\} \in D$. 今，$\delta < \lambda$ と $\alpha \in a$ に対し $h_\delta(\alpha) = \sup\{f^\beta_{g_\delta(\beta)}(\alpha) | \beta \in b\}$ とする．命題 3.6 より，$\forall h \in \Pi a\, \exists \delta_1 < \lambda\, \delta_1 \leqslant \forall \delta < \lambda : h \leqslant_{D^*} h_\delta$ を示せばよい．$h \in \Pi a$ をとる．$\beta \in b$ に対して $h \leqslant_{D_\beta} f^\beta_{\delta_\beta}$ となるδ_β をとり，さらに $\langle \delta_\beta : \beta \in b\rangle \leqslant_D g_{\delta_1}$ となる $\delta_1 < \lambda$ をとる．この δ_1 が求めるものとなる．何故なら，$\delta \geqslant \delta_1$ に対して $\exists B \in D\, \forall \beta \in B (\delta_\beta \leqslant g_\delta(\beta))$ となるので，$A = \{\alpha \in a | h(\alpha) \leqslant h_\delta(\alpha)\}$ とおく．すると $\beta \in B$に対し，$\forall \alpha \in A_\beta : h(\alpha) \leqslant f^\beta_{\delta_\beta}(\alpha) \leqslant f^\beta_{g_\delta(\beta)}(\alpha) \leqslant h_\delta(\alpha)$ となる $A_\beta \in D_\beta$ が存在する．従って $A \supsetneqq A_\beta \in D_\beta$ となり $A \in D^*$ となる．□

4. 潜在的共終性の連続性

定義 4.1. κ は無限基数とし $\kappa^+ < \lambda$ は正則基数とする．D を κ 上の 超フィルターとし，$\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ を $\mathbb{ON}^\kappa/D$ 上の狭義単調増加列とする．このとき，h/D が $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ を切断するとは，$\exists\alpha < \exists\beta < \lambda(f_\alpha/D < h/D < f_\beta/D)$ であることとする．

$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{ON}^\kappa/D$ に対し，$\mathcal{A}$ が $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ を共終切断するとは，任意の $\alpha < \lambda$ に対して h/D が $\langle f_\gamma/D : \gamma < \lambda\rangle$ を切断しかつ $f_\alpha/D < h/D$ であること $h/D \in \mathcal{A}$ が存在することとする．

（これは任意の $\alpha < \lambda$ に対して$\alpha < \beta < \lambda$ で $f_\alpha/D < h/D < f_\beta/D$ となる $h/D \in \mathcal{A}$ と β が存在することと同値である.）

補題 4.2. $\kappa, \lambda, D, \langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ は定義 4.1 のものとする．このとき，$\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ が $\mathbb{ON}^\kappa/D$ で最小上界をもつか，$\forall\delta < \kappa(|S_\delta| \leqslant \kappa)$ で$\Pi_{\delta<\kappa}S_\delta$ が $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ を共終切断する $\langle S_\delta \subseteq \mathbb{ON} : \delta < \kappa\rangle$ が存在する．

証明. κ^+までの帰納法で $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ の上界の減少列 $\langle h_\beta : \beta < \kappa\rangle$ をつくる．
h_0は $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ の上界をとる．h_βが最小上界のときは証明は終わりだからそうでないとする．
$h_{\beta+1}/D < h_\beta/D$ となる $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ を取ればよい．
βが極限数のとき．$\delta < \kappa$に対して $S_\delta = \{h_\gamma(\delta) | \gamma < \beta\}$ とおき，$\alpha < \lambda$ に対して $g_\alpha(\delta) = \min\{x \in S_\delta | x > f_\alpha(\delta)\}$ とおく．すると $\forall\gamma < \beta(g_\alpha/D \leqslant h_\gamma/D)$ となる．
(場合 1) $\langle g_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ に狭義単調減少な部分列が存在するとき．

$\forall\delta < \kappa(|S_\delta| \leqslant \kappa)$ であり，更に $\Pi_{\alpha<\kappa}S_\alpha/D$ が $\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ が共終切断するので証明は終る．
(場合 2) $\gamma \leqslant \forall\gamma' < \lambda(g_\gamma/D = g_{\gamma'}/D)$ となる $\gamma < \lambda$ が存在するとき．

$h_\beta/D = g_\gamma/D$ とおく．すると $\forall\alpha < \lambda(h_\beta/D > f_\alpha/D)$ となる．次に帰納的に作る操作が，ある $\beta < \kappa^+$ で止まる事を示す．$\langle f_\alpha/D : \alpha < \lambda\rangle$ に対する上界の狭義単調減少列 $\langle h_\beta : \beta < \kappa^+\rangle$ が作れたと仮定する．$\delta < \kappa$ に対し$\bar{S}_\delta = \{h_\beta(\delta) | \beta < \kappa^+\}$ とおき$\alpha < \lambda$ に対して$\bar{g}_\alpha(\delta) = \min\{x \in \bar{S}_\delta | x > f_\alpha(\delta)\}$ とおく．すると $\forall\beta < \kappa^+; \bar{g}_\alpha/D \leqslant h_\beta/D$ となる．ところで，$\alpha < \lambda$に対して，$\forall\delta < \kappa\exists\beta' < \beta(\alpha)(\bar{g}_\alpha(\delta) = h_{\beta'}(\delta))$ となる極限数$\beta(\alpha)$ が存在する．更に $\kappa < \lambda$ が正則であるから $\forall\alpha \in A; \beta = \beta(\alpha)$ となる$\beta < \kappa^+$ と λ の非有界部分集合が存在する．$\alpha \in A$ とすると $\forall\delta < \kappa\exists\beta' < \beta(\bar{g}_\alpha(\delta) = h_{\beta'}(\delta))$ が成立するので$\bar{g}_\alpha = g_\alpha$となる．$h_\beta$ が帰納的に作れるので (2) の場合，則ち $\langle g_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ はあるところから一定になる．故に，$\gamma \leqslant \forall\alpha < \lambda(g_\alpha/D = h_\beta/D)$ となる γ が存在するので，$\alpha \in A \cap [\gamma, \lambda)$ をとると $h_\beta/D = g_\alpha/D = \bar{g}_\alpha/D \leqslant h_{\beta+1}/D < h_\beta/D$ となり矛盾する．□

定義 4.3. D を a 上の超フィルターとする．このとき，$\lim_D a = \mu$ とは $\forall\beta < \mu((\beta, \mu] \cap a \in D)$ であること．

定理 4.4. $cf(\Pi a/D) = \lambda$ で $\mu = \lim_D a$ とする．このとき$\mu < \lambda' < \lambda$ となる すべての正則基数 λ' に対して，$|a'| \leqslant |a|$, $\lim_{D'} a' = \mu$, $cf(\Pi a'/D') = \lambda'$ となる正則基数の集合 a' と a' 上の 超フィルター D' が存在する．

証明. まず，次の (1)-(4) の条件を満たす単純平方列 $\langle \mathcal{C}_\alpha : \alpha < \lambda'\rangle$ がとれる．
(1) $\mathcal{C}_\alpha \subseteq P(\alpha)$;　(2) $|\mathcal{C}_\alpha| \leqslant \lambda'$;　(3) α の非有界閉集合で $otp(E) = cf(\alpha)$ である $E \in \mathcal{C}_\alpha$ が存在する;　(4) $\forall\beta < \alpha\forall E \in \mathcal{C}_\alpha(E \cap \beta \in \mathcal{C}_\beta)$.

$\langle f_\alpha/D:\alpha<\lambda'\rangle$ を帰納法で作る．$\beta<\lambda'<\lambda=cf(\Pi a/D)$ より $\forall\gamma<\beta(f_\gamma/D<h_\beta/D)$ となる $h_\beta/D\in\Pi a/D$が存在する．$E\in\mathcal{C}_\beta$ と $\alpha\in a$ に対して $g_E^\beta=\max(h_\beta(\alpha),\sup\{f_\gamma(\alpha);\gamma\in E,\alpha>otp(E)\})$ と定義すると，$\lambda'<\lambda$ より $\forall E\in\mathcal{C}_\beta(g_E^\beta/D<f_\beta/D)$ となる $f_\beta\in\Pi a$ が存在する．この f_β が求めるもの．

主張 4.5. $\forall\alpha\in a(|S_\alpha|\leqslant\mu')$ で$\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha$ が $\langle f_\alpha:\alpha<\lambda\rangle$ を共終切断する $\mu'<\mu$ と $\langle S_\alpha\subsetneqq\alpha:\alpha\in a\rangle$ は存在しない．

証明. そうでないとする．まず，$|a|\leqslant\min(a)<\mu$ より$\mu'>|a|$ と仮定してよい．$\forall\gamma,\gamma'\in B(\gamma<\gamma\to\exists K\in\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha(f_\gamma/D<K/D<f'_\gamma/D))$ が成立する．今，$cf(\beta)=(\mu')^+<\mu$ となる B の特異極限点 β をとり，β の非有界閉集合で $otp(E)=cf(\beta)$ となる $E\in\mathcal{C}_\beta$ をとる．ここで，β の非有界閉集合を $E\cap B=\{\gamma_i:i<cf(\beta)\}$ と狭義増加列として表わす．B の性質より，全ての $i<cf(\beta)$ に対して，$f_{\gamma_i}/D<K_i<f\gamma_{i+1}/D$ となる $k_i\in\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha$ が存在する．更に，$g_{E\cap\gamma_i}^{\gamma_i}$ の定義より，全ての $i<cf(\beta)$ に対して，$f_{\gamma_i}/D>g_{E\cap\gamma_i}^{\gamma_i}$ かつ $\forall\alpha>otp(E\cap\gamma_i)\forall j<i(g_{E\cap\gamma_i}^{\gamma_i}(\alpha)\geqslant f_{\gamma_j}(\alpha))$ となる．従って，$i<cf(\beta)$ に対して，$f_{\gamma_i}(\alpha)<K_i(\alpha_i)<f_{\gamma_{i+1}}(\alpha_i)$ かつ $f_{\gamma_i}(\alpha_i)>g_{E\cap\gamma_i}^{\gamma_i}(\alpha_i)$ となる $\alpha_i>otp(E)$ が存在する．$|a|<\mu'<cf(\beta)$ より，$|I|=cf(\beta)$ かつ $\forall i\in I(\alpha_i=\alpha)$ となる $\alpha\in a$ と極限順序数の集合 $I\subsetneqq cf(\beta)$ が存在する．すると，$i,j\in I$ に対し $i<j$ ならば，$k_i(\alpha)<f_{\gamma_{i+1}}(\alpha)\leqslant g_{E\cap\gamma_j}^{\gamma_j}(\alpha)<f_{\gamma_j}<K_j(\alpha)$ が言える．従って，$\langle K_i(\alpha):i\in I\rangle$ は狭義単調増加である．$K_i(\alpha)\in S_\alpha$ であるから $|S_\alpha|\geqslant|I|=cf(\beta)=(\mu')^+$ となる．これは $|S_\alpha|\leqslant\mu'$ に反する．□

定理 4.4 の証明に戻る．主張 4.5 より，$g\in\mathbb{ON}^a$ が存在して g/D は $\langle f_\beta/D:\beta<\lambda'\rangle$ となる．ところで，$cf(\Pi a/D)=\lambda>\lambda'$ であるから $g\in\Pi a$ としてよい．今，$A=\{\alpha\in a:g(\alpha)$ は極限数 $\}$ とおく．$\alpha\in A$ に対し，$otp(S_\alpha)=cf(g(\alpha))$ となる $g(\alpha)$ の非有界部分集合 S_α が存在するので，それから狭義単調増加列 $\langle S_\alpha(i):i<cf(\alpha)\rangle$ をとる．ここで，$\lim_D cf(g(\alpha))=\mu\leftrightarrow\mu=\min\{\mu'|\{\alpha\in a:cf(g(\alpha))>\mu'\}\notin D\}$ と定義する．$A\in D$ より $\lim_D cf(g(\alpha))=\mu$ が成立する．$\beta<\lambda'$ に対して，$\alpha\in A\cap\{\alpha\in a:f_\beta(\alpha)<g(\alpha)\}$ であれば$\overline{f_\beta}(\alpha)=S_\gamma(\min\{i<cf(g(\alpha)):f_\beta(\alpha)\leqslant S_\alpha(i)\})$ とおく．明らかに，$\forall\beta<\lambda'(f_\beta/D\leqslant\overline{f_\beta}/D<g/D)$ となるので $\{\overline{f_\beta}/D:\beta<\lambda'\}$ は$\Pi_{\alpha\in a}/D$ で共終的である．よって $cf(\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha/D)\leqslant\lambda'$ となる．更に，$cf(\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha/D)\geqslant\lambda'$ である．[$\because$ $\delta_0=|\mathcal{E}|<\lambda'$ となる $\mathcal{E}\subsetneqq\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha/D$ をとり $\mathcal{E}=\{h_\delta/D:\delta<\delta_0\}$ とおく．すると，$\forall\delta<\delta_0\ \exists\beta<\beta_0(h_\delta/D<\overline{f_\beta}/D)$ となる $\beta_0<\lambda'$ が存在する．ところで，$\overline{f_\beta}/D<g/D$ と g/D が $\langle f_\beta/D:\beta<\lambda\rangle$ より，$\beta<\exists\xi(\beta)<\lambda'(\overline{f_\beta}/D<f_{\xi(\beta)}/D<g/D)$ となる．$\lambda'<\beta_0$ は正則なので，$\beta_1=\sup_{\beta<\beta_0}\xi(\beta)<\lambda'$ となる．よって，$\overline{f_{\beta_1}}/D$ が $\mathcal{E}$ の上界となる．] 以上より，$cf(\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha/D)=\lambda'$である．　$a'=\{cf(g(\alpha)):\alpha\in a\}$ とおき，超フィルター $D\subsetneqq P(a')$ を $a\in D'\leftrightarrow\{\alpha\in a:cf(g(\alpha))\in A\}\in D$ と定義する．$(0,\mu]\cap a\in D$ と $\lim_D cf(g(\alpha))=\mu$ より，$\lim_{D'}a'=\mu$ が成立し，明らかに $|a'|\leqslant|a|$ となる．ここで，$\overline{f'_\beta}(cf(g(\alpha)))=\sup\{i<cf(g(\alpha)):\exists\gamma\in a(cf(g(\alpha))=cf(g(\gamma)),\overline{f_\beta}(\gamma)=S_\gamma(i)\}$ とおくと，$\overline{f'_\beta}\in a'$ となる．今，$f'\in\Pi a'$ に対し，$f\in\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha$ で $f(\alpha)=S_\alpha(f'(cf(g(\alpha))))$ を対応させる．$\{\overline{f_\beta}/D:\beta<\lambda'\}$ は $\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha/D$ より，$f/D<\overline{f_\beta}/D$ となる $\beta<\lambda'$ が存在して $f'/D<\overline{f'_\beta}/D$ となる．従って，$\{\overline{f'_\beta}/D:\beta<\lambda'\}$ は $\Pi a'/D'$ で共終的である．則ち，$cf(\Pi a'/D')\leqslant\lambda'$ である．更

に，$cf(\Pi a'/D') \geqslant \lambda'$ が成立する．[$\because$ $|\mathcal{E}| < \lambda'$ となる $\mathcal{E} \subsetneqq \Pi a'/D'$ をとる．$h' \in \mathcal{E}'$ に対して，$h(\alpha) = S_\alpha(h'(cf(g(\alpha))))$ とおく．$\{h/D \in \Pi_{\alpha\in a}S_\alpha/D : h' \in \mathcal{E}'\}$ は $\Pi_{\alpha\in a}S_\alpha/D$ で有界だから，$\forall h' \in \mathcal{E}'(h/D < \overline{f_\beta}/D)$ となる$\beta < \lambda'$ が存在する．従って，$h'/D' < \overline{f'_\beta}/D'$となる．] 故に，$cf(\Pi a'/D') = \lambda'$ となる．□

系 **4.6.** a は β から μ までの正則基数の区間とする．このとき，$\lambda \in pcf(a)$ とすると，$\mu < \forall\lambda' < \lambda$ なる任意の正則基数 λ' は $pcf(a)$ の元となる．

証明. $\lambda \in pcf(a)$ より，a 上の超フィルター D が存在し $cf(\Pi a/D) = \lambda$ となる.$\mu' = \lim_D a$ とおく．明らかに，$\mu' \leq \mu$. 定理 4.4 より $g \in \Pi a$ が存在して，$a' = \{cf(g(\alpha)) : \alpha \in a\}$ と置くと，a' 上の超フィルター D' が存在し，$cf(\Pi a'/D') = \lambda'$ で $\lim_{D'} a' = \mu'$ となる. 今，$b = a' \cap a$ と置く．明らかに，$b \in D'$ である．ここで，$X \in U$を $X \cap b \in D'_b$で定義する. U は a 上の超フィルターとなる. 故に，$cf(\Pi a/U) = cf(\Pi b/D'_b) = cf(\Pi a'/D') = \lambda'$

系 **4.7.** a を区間とすると，$pcf_\mu(a)$ も区間となる．

証明. 明らかに，$a \subseteq pcf_\mu(a)$ である．今，$\sup(a) < \lambda' < \lambda \in pcf_\mu(a)$ で λ' を正則基数とする. よって，$A \in [a]^{\leq\mu}$ と A 上の超フィルター D が存在して，$cf(\Pi A/D) = \lambda$ となる．定理 4.4 より A' と A' 上の超フィルター D' が存在し，$|A'| \leq |A|, \lim_D A = \lim_{D'} A'$ で $cf(\Pi A'/D') = \lambda'$ となる．$\kappa = \lim_D A = \lim_{D'} A' \leq \sup(a)$ と置く．明らかに，$D' \ni (\min(a), \kappa] \cap A' \subseteq a\cap = B \in [a]^{\leq\mu}$ となる. 故に，$cf(\Pi B/D'_B) = cf(\Pi A'/D') = \lambda'$ となり，$\lambda' \in pcf_\mu(a)$ がいえる.

5. 縮積 $\Pi a/I$ の真共終性

定理 **5.1.** I は a 上のイデアルで，λ は正則基数とする．$\Pi a/I$ の列 $\langle f_\alpha/I : \alpha < \lambda\rangle$ が単調増加で $\Pi a/I$ で非有界とする．このとき，(1), (2), (3) を満たす $P(a)$ の列 $\langle b_\gamma : \lambda\rangle$ が存在する．

(1) $b_0 \notin I$;
(2) $\forall\gamma_1, \gamma_2 < \lambda; \gamma_1 < \gamma_2 \to b_{\gamma_1} \subseteqq_I b_{\gamma_2}$;
(3) すべての $\gamma < \lambda$ に対して，$\langle (f_\rho|b_\gamma)/I : \rho < \lambda\rangle$ は$\Pi b_\gamma/I$ で共終的であり，$I \cup \{b_\gamma : \gamma < \lambda\}$ によって生成されるイデアルについて $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda\rangle$ に対する上界 $g \in \Pi a$ が存在する.

証明. $\min(a) > |a|^+$ と $\langle f_\beta : \beta < \lambda\rangle$ が I について Πa で有界でないことより，$\lambda > |a|^+$ となる．背理法で証明するため 任意の $\langle b_\gamma : \gamma < \lambda\rangle \in {}^\lambda P(a)$ について (1), (2), (3) のどれかが否定されることを仮定する. ところで, $\alpha < |a|^+$ までの帰納法により$\alpha < \beta < |a|^+$ ならば$\forall\delta \in a(g_\alpha(\delta) \leqslant g_\beta(\delta))$ となる $\langle g_\alpha : \alpha < |a|^+\rangle \in {}^{|a|^+}\Pi a$ の存在が示せる. —(A)

今，$b^\alpha_\gamma = \{\delta \in a | g_\alpha(\delta) < f_\gamma(\delta)\}$ とおく．すると，次の (a)–(c) が成立する.

(a) すべての $\alpha < \lambda$ に対して，g_α は I^*_α について $\langle f_\gamma : \gamma < \lambda\rangle$ の上界である．但し，I^*_α は $I \cup \{b^\alpha_\gamma | \gamma < \lambda\}$ によって生成されるイデアル.

(b) $\alpha < |a|^+$ に対して $\forall\gamma_1, \gamma_2 < \lambda(\gamma_1 < \gamma_2 \to b^\alpha_{\gamma_1} \subseteqq_I b^\alpha_{\gamma_2})$ かつ $\exists\xi(\alpha) < \lambda\, \xi(\alpha) \leqslant \forall\gamma < \lambda(b^\alpha_\gamma \notin I)$ が成立する.

(c) $\gamma < \lambda$ に対して $\langle b^\alpha_\gamma ; \alpha < |a|^+\rangle$ は $\subseteqq$-単調減少である.

ここで $\alpha < |a|^+$ に対して,

$$b_\gamma = \begin{cases} b^\alpha_\gamma & \gamma \geqslant \xi(\alpha) \\ b^\alpha_\xi(\alpha) & \gamma < \xi(\alpha) \end{cases}$$

とおくと，定理 の (1),(2) と (3) の最後の式—(B) が成立する．よって $\exists\gamma' < \lambda, \gamma' \leqslant \forall\gamma < \lambda\forall\alpha < |a|^+(b^{\alpha+1}_\gamma \subsetneqq b^\alpha_\gamma)$—(C) となることを示せば $\alpha < |a|^+$ に対して $x_\alpha \in b^\alpha_{\gamma'} - b^{\alpha+1}_{\gamma'}$ をとることにより $\{x_\alpha : \alpha < |a|^+\} \subseteqq a$ は異なる元からなる集合となり矛盾する．以下 (A) の構成と (C) の証明.

最初に (A) の構成をする．$g_0 \in \Pi a$ をとる．$\alpha < |a|^+$ が極限数のときの g_α は，$\delta \in a$ に対して $g_\alpha(\delta) = \sup_{\beta<\alpha} g_\beta(\delta)$ とする．g_α が定義されているとき $g_{\alpha+1}$ を定義する．(B) と背理法の仮定より，$\langle (f_\rho|b_{\gamma'})/I : \rho < \lambda\rangle$ が$\Pi b_{\gamma'}/I$ で共終とならない $\gamma' < \lambda$ が存在する．これより，$\forall\rho < \lambda(h|b_{\gamma'} \not\leqslant_I f_\rho|b_{\gamma'})$ となる $h \in \Pi a$ が存在する事が分かる．ところで，$\gamma' \leqslant \forall\gamma < \lambda\forall\rho < \lambda(h|b_\gamma \not\leqslant_I f_\rho|b_\gamma)$ となる．$\gamma(\alpha) = \max(\gamma', \xi(\alpha))$ とおくと，$\gamma(\alpha) \leqslant \forall\gamma < \lambda\forall\rho < \lambda(h|b^\alpha_\gamma \not\leqslant_I f_\rho|b^\alpha_\gamma)$ となる．ここで，$\delta \in a$ に対して $g_{\alpha+1}(\delta) = \max(g_\alpha(\delta), h(\delta))$ と定義する． (C) の証明. $\gamma' = \sup_{\alpha<|a|^+} \gamma(\alpha)$ と定義すると，$|a|^+ < \lambda$ が正則より $\gamma' < \lambda$ となる．今，$\gamma' \leqslant \gamma < \lambda$ とし$\alpha < |a|^+$ とすると，$h(\delta) > f_\gamma(\delta)$ となる$\delta \in b^\alpha_\gamma$ が存在する．$g_{\alpha+1}$ の定義より $g_{\alpha+1} \geqslant h(\delta)$ となる．従って，$g_{\alpha+1} > f_\gamma(\delta)$ すなわち$\delta \notin b^{\alpha+1}_\gamma$ となり矛盾となる． □

系 5.2. I は a 上のイデアルとし，$\Pi a/I$ は λ-有向的とする．D を $D \cap I = \emptyset$ かつ $cf(\Pi a/D) = \lambda$ となる a 上の超フィルターとする．このとき $tcf(\Pi b/I) = \lambda$ となる $b \in D$ が存在する.

証明. $\langle f_\rho/D : \rho < \lambda\rangle \in {}^\lambda(\Pi a/D)$ を狭義単調増加共終列とする．$\Pi a/I$ は λ-有向的であるから，$\forall\rho < \lambda(f_\rho \leqslant_I g_\rho)$ となる狭義単調増加列 $\langle g_\rho/I : \rho < \lambda\rangle \in {}^\lambda(\Pi a/I)$ が存在する．$\langle g_\rho/I : \rho < \lambda\rangle$ は $\Pi a/I$ で非有界である．従って，定理 5.1 より次の (1),(2) を満たす $\langle b_\alpha : \alpha < \lambda\rangle \in {}^\lambda(P(a))$ が存在する.

(1) すべての $\alpha < \lambda$ に対して，$\langle (g_\rho|b_\alpha)/I : \rho < \lambda\rangle$ は$\Pi b_\alpha/I$ で共終である；
(2) ある $h \in \Pi a$ が存在して，h は I^* について $\langle g_\rho : \rho < \lambda\rangle$ の上界である．但し，I^* は$I \cup \{b_\alpha : \alpha < \lambda\}$ で生成されるイデアル.

ところで，$b_\alpha \in D$ となる $\alpha < \lambda$ が存在する．従って，$\langle (g_\rho|b_\alpha)/I : \rho < \lambda\rangle$ は狭義単調増加となり $tcf(\Pi b_\alpha/I) = \lambda$ となる． □

系 5.3. I は a 上のイデアルとする．すべての a 上の超フィルター D に対して，$D \cup I = \emptyset$ ならば $cf(\Pi a/D) = \lambda$ が成立するとする．このとき，$tcf(\Pi a/I) = \lambda$ が成立する.

証明. 明らかに，$J_{<\lambda}(a) \subseteqq I$ となる．$I^* = \{b \subseteqq a : b \in I$ または$tcf(\Pi B/I) = \lambda\}$ とおく．$a \in I^*$ を示せばよい．今，$a \notin I^*$ と仮定する．すると I^* は a 上のイデアルとなる．$J_{<\lambda}(a) \subseteqq I$ より $\Pi a/I$ は λ-有向的である．ここで，$D \cap I^* = \emptyset$ となる a 上の超フィルター D を取る．$I \subseteqq I^*$ より $D \cap I = \emptyset$ となる．従って，系の仮定より $cf(\Pi a/D) = \lambda$ となり，系 5.2 により $tcf(\Pi b/I) = \lambda$ となる $b \in D$ が存在する．これは，$D \cap I^* = \emptyset$ に反する． □

系 **5.4.** $b \in J_{<\lambda^+}(a) - J_{<\lambda}(a)$ ならば $tcf(\Pi b/J_{<\lambda}(a)) = \lambda$ となる.

証明. I は $J_{<\lambda}(a) \cap \{a - b\}$ から生成されるイデアルとすると, I は自明でない. 今, $D \cap I = \emptyset$ となる a 上の超フィルター D をとる. $J_{<\lambda}(a) \cap D = \emptyset$ と命題 3.4 より, $cf(\Pi a/D) \geqslant \lambda$ となる. また $a - b \in I$ より $b \in D$ となり, $b \in J_{<\lambda^+}(a)$ であるから, $cf(\Pi a/D) < \lambda^+$ となる. 従って, $cf(\Pi a/D) = \lambda$ である. 系 5.3 より $tcf(\Pi a/I) = \lambda$ となる. 故に, $a - b \in I$ より $tcf(\Pi b/J_{<\lambda}(a))$ となる. □

例 **5.5.** $a = \{\aleph_n : 1 < n < \omega\}$ とおく. フレッシェ・イデアル とはイデアル $\{b \subsetneqq a : |b| < \omega\}$ のことをいう. 次の 2 つのことが成立する.

(1) $J_{<\aleph_{\omega+1}}(a)$ はフレッシェ・イデアルである;
(2) $tcf(\Pi b/J_{<\aleph_{\omega+1}}(a)) = \aleph_{\omega+1}$ となる $b \in J_{<\aleph_{\omega+2}}(a) - J_{\aleph_{\omega+1}}(a)$ が存在する.

定理 **5.6.** $\min(a) > 2^{|a|}$ であると仮定する. このとき $J_{<\lambda^+}(a)$ が $J_{<\lambda}(a) \cap \{b\}$ から生成されるような $b \subsetneqq a$ が存在する. (但し, b は空集合であってもよい.)

補題 **5.7.** λ を正則基数, $\mu < \lambda$, $\{b_\alpha : \alpha < \mu\} \subsetneqq J_{<\lambda^+}(a)$ とする. このとき, $\forall \alpha < \mu(b_\alpha \subsetneqq_{J_{<\lambda}(a)} b)$ となる $b \in J_{<\lambda^+}(a)$ が存在する.

証明. すべての $\alpha < \mu$ に対して, $b_\alpha \in J_{<\lambda^+}(a) - J_{<\lambda}(a)$ としてよい. $\alpha < \mu$ とする. 系 5.4 より $tcf(\Pi b_\alpha/J_{<\lambda}(a)) = \lambda$ が言える. 従って, $\langle (f^\alpha_\rho|b_\alpha)/J_{<\lambda}(a) : \rho < \lambda\rangle$ が $\Pi b_\alpha/J_{<\lambda}(a)$ で狭義単調増加共終となる $\langle f^\alpha_\rho : \rho < \lambda\rangle \in {}^\lambda(\Pi a)$ が取れる. $\Pi a/J_{<\lambda}(a)$ が λ-有向的より, $\rho < \lambda$ に対し $f^*_\rho \in \Pi a$ を次のように帰納的に定義できる. f^*_ρ は $J_{<\lambda}(a)$ について $\{f^\alpha_\rho : \alpha < \mu\} \cap \{f^*_{\rho'} : \rho' < \rho\}$ の上界である. すると, $\langle f^*_\rho : \rho < \lambda\rangle$ は $J_{<\lambda}(a)$ について Πa で有界でない. 定理 5.1 より, (1)–(3) を満たす $g \in \Pi a$ と $\langle c_\alpha : \alpha < \lambda\rangle \in {}^\lambda(P(a))$ が存在する.

(1) $c_0 \in J_{<\lambda}(a)$;
(2) $\langle c_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ は $J_{<\lambda}(a)$ について $\subsetneqq$-増加列である;
(3) $\langle (f^*_\rho|c_\alpha)/J_{<\lambda}(a) : \rho < \lambda\rangle$ は $\Pi c_\alpha/J_{<\lambda}(a)$ で共終的であり, g は $J_{<\lambda}(a) \cap \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$ によって生成されるイデアルについて $\langle f^*_\rho : \rho < \lambda\rangle$ に対する上界となる.

主張 **5.8.** すべての $\alpha < \mu$ に対して, $b_\alpha \subsetneqq_{J_{<\lambda}(a)} c_\gamma$ となる $\gamma < \lambda$ が存在する.

証明. $\forall \gamma < \lambda(b_\alpha \not\subsetneqq_{J_{<\lambda}(a)} c_\gamma)$ となる $\alpha < \mu$ が存在することを仮定する. すると, $D \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$ かつ $\forall \gamma < \lambda; b_\alpha - c_\gamma \in D$ となる a 上の超フィルター D が存在する. $\langle (f^*_\rho|b_\alpha)/J_{<\lambda}(a) : \rho < \lambda\rangle$ は $\Pi b_\alpha/J_{<\lambda}(a)$ であることと $b_\alpha \in D$ より, $\langle f^*_\rho/D : \rho < \lambda\rangle$ は $\Pi a/D$ で共終的である. ところで, すべての $\gamma < \lambda$ に対して, $c_\gamma \notin D$ となる. 従って, I^* を $J_{<\lambda}(a) \cup \{c_\alpha : \alpha < \lambda\}$ とおくと, $D \cap I^* = \emptyset$ となる. (1) より g は I^* について $\langle f^*_\rho : \rho < \lambda\rangle$ の上界となる. 従って, $\{\delta \in a : g(\delta) < f^*_\rho(\delta)\} \in I^*$ となり, $\{\delta \in a : g(\delta) \geqslant f^*_\rho(\delta)\} \in D$ となる. これは, g が D の意味で $\langle f^*_\rho : \rho < \lambda\rangle$ の上界になっている. 故に, $\langle f^*_\rho/D : \rho < \lambda\rangle$ が $\Pi a/D$ で共終的であることに反する. □

補題 5.7 の証明に戻る. $\alpha < \mu$ に対して, $b_\alpha \subsetneqq_{J_{<\lambda}(a)}$ となる $\gamma(\alpha) < \gamma$ をとる. ここで, $\gamma^* = \sup_{\alpha<\mu} \gamma(\alpha) < \lambda$ とおく. ところで, (2) より $\forall \alpha < \mu(b_\alpha \subsetneqq_{J_{<\lambda}(a)} c_{\gamma^*})$ となる. $c_{\gamma^*} \in J_{<\lambda}(a)$ であるから題意は成り立つ. □

定理 *5.6* の証明. λ 特異基数のときは $J_{<\lambda^+}(a) = J_{<\lambda}(a)$ であるので, λ は正則基数としてよい. $J_{<\lambda^+}(a) - J_{<\lambda}(a) = \emptyset$ のときは明かであるから, $J_{<\lambda^+}(a) - J_{<\lambda}(a) \neq \emptyset$

のときを考える．ところで，$\lambda \geqslant \min(a) > 2^{|a|} \geqslant |J_{<\lambda^+}(a)|$ となる．補題 5.7 より，$\forall b \in J_{<\lambda^+}(a)(b \subseteqq_{J_{<\lambda}(a)} c)$ となる $c \in J_{<\lambda^+}(a)$ が存在する．故に，$J_{<\lambda^+}(a)$ は $J_{<\lambda}(a) \cap \{c\}$ から生成されるイデアルとなる．□

定義 5.9. λ を基数とする．$b_\lambda \subseteqq a$ を次のようにとり，$J_{<\lambda^+}(a)$ に対する $J_{<\lambda}(a)$ 上の生成元と呼ぶ．

$\lambda \in pcf(a)$ のとき $J_{<\lambda^+}(a)$ が $J_{<\lambda}(a) \cup \{b_\lambda\}$ によって生成される，$\lambda \notin pcf(a)$ のとき $b_\lambda = \emptyset$．

明らかに，$cf(\Pi a/D) = \min\{\lambda : b_\lambda \in D\}$ となる．

補題 5.10. すべての a の部分集合 c に対して，$pcf(c)$ の元$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が存在して，$c \subseteqq b_{\lambda_1} \cup \cdots \cup b_{\lambda_n}$ となる．

証明. $J = \{b \subseteqq c : \exists\lambda_1, \ldots, \exists\lambda_n \in pcf(a)(b \subseteqq b_{\lambda_1} \cup \cdots \cup b_{\lambda_n})\}$ とおくと，J は c 上のイデアルとなる．J が自明なイデアルのとき，$c \in J$ より明か．J が真のイデアルのとき，J^* を双対フィルターとおくと，$c \in J^*$ となる．従って，$J^* \subseteqq D'$ となる a 上の超フィルターが存在する．今，$D = \{d \subseteqq a : d \cap c \in D'\}$ とおくと，D は a 上の超フィルターとなる．そして，$c \in D$ かつ $D \cap J = \emptyset$——(1) を満たす．$\lambda = cf(\Pi a/D) = cf(\Pi c/D) \in pcf(c)$ とおく．$cf(\Pi a/D) = \min\{\delta : a_\delta \in D\}$ (但し，a_δ は $J_{<\delta^+}(a)$ に対する $J_{<\delta}(a)$ 上の生成元) であるから，$a_\lambda \in D$ となる．$c \in D$ であるから $b_\lambda = a_\lambda \cap c \in D$ となる．故に，$b_\lambda \in D \cap J$ となり (1) に反する．□

6. 潜在的共終数の最大値

定理 6.1. a を正則基数の区間とし，$\min(a)^{|a|} < \sup(a)$ とする．このとき，$\max(pcf(a)) = |\prod a|$ となる．

例 6.2. $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ となる．

証明. $cf(2^{\aleph_0}) > \omega$ より $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$ である．$2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$ のときは明かであるから，$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ のときについて考える．$a = \{\aleph_n : 1 < n < \omega\}$ とおき定理 6.1 を使うと，$\max(pcf(a)) = \prod_{1<n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$ となる．ところで，$|pcf(a)| \leqslant 2^{|a|} = 2^{\aleph_0}$ であった．そして，系 4.6 より $pcf(a)$ は正則基数の区間であった．故に，$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \max(pcf(a)) < \aleph_{|pcf(a)|^+} \leqslant \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$ となる．□

例 6.3. 全ての極限順序数 δ に対して，$\aleph_\delta^{|\delta|} < \aleph_{(2^{|\delta|})^+}$ が成立する．

証明. $2^{|\delta|} \neq \aleph_\delta$ であるから $2^{|\delta|} > \aleph_\delta$ の時と $2^{|\delta|} < \aleph_\delta$ の時に場合分けをすれば良いが，$2^{|\delta|} > \aleph_\delta$ の時は明らかなので $2^{|\delta|} < \aleph_\delta$ の時について考える．$a = [(2^{|\delta|})^+, \aleph_\delta) \cap legular$ と置く．すると，$\max(pcf(a)) = |\Pi a| = \aleph_\delta^{|\delta|}$ となる． 帰納法で $\Pi_{\alpha<\delta}\aleph_\alpha = \aleph_\delta^{|\delta|}$ を示す．$\Pi_{\alpha<\delta} \geqslant \aleph_\delta^{|\delta|}$ を示せば十分．

補題. λ を無限基数とし $\langle \kappa_i : i < \lambda \rangle$ を 0 でない基数の単調増加列とする．この時，$\Pi_{i<\lambda}\kappa_i = (\sup_{i<\lambda}\kappa_i)^\lambda$ となる．

δ が基数ならば補題より言える．従って，δ は基数でないとする．すると，$\alpha < |\delta|^+$ となる極限基数が存在して $\delta = |\delta| + \alpha$ となる．明らかに，$\{\gamma \leqslant \alpha : \gamma$ は極限順

序数 $\} \cong \beta+1$ となる順序数 β が存在して，$\omega=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_\beta=\alpha$ となる極限順序数の列が取れる．$\beta=0$ の時．$\aleph_\delta^{|\delta|}=\aleph_{|\delta|+\omega}^{|\delta|}=(\sum_{n<\omega}\aleph_{|\delta|+n})^{|\delta|}\leqslant(\Pi_{n<\omega}\aleph_{|\delta|+n})^{|\delta|}$ となる．更に，$(\Pi_{n<\omega}\aleph_{|\delta|+n})^{|\delta|}=\Pi_{n<\omega}\aleph_{|\delta|+n}^{|\delta|}=(\Pi_{n<\omega}\aleph_{|\delta|+n})\cdot\aleph_{|\delta|}^{|\delta|}=\Pi_{\xi<|\delta|}\aleph_\xi\cdot\Pi_{n<\omega}\aleph_{|\delta|+n}=\Pi_{\xi<|\delta|+\omega}\aleph_\xi=\Pi_{\alpha<\delta}\aleph_\alpha$ となる．$\beta=\eta+1$ の時．$\alpha=\gamma_{\eta+1}=\gamma_\eta+\omega$ であるから，帰納法の仮定より $\beta=0$ の時と同様に示せる．β が極限順序数の時．(場合 1) $\forall i<\beta, i<\exists j<\beta(\aleph_{|\delta|+\gamma_i}^{|\delta|}<\aleph_{|\delta|+\gamma_j}^{|\delta|})$ のとき．$\aleph_{|\delta|+\gamma_i}^{|\delta|}<\aleph_{|\delta|+\gamma_j}$ としてよい．従って，$\aleph_{|\delta|+\alpha}^{|\delta|}=(\sum_{i<\beta}\aleph_{|\delta|+\gamma_i})^{|\delta|}\leqslant(\Pi_{i<\beta}\aleph_{|\delta|+\gamma_i})^{|\delta|}=\Pi_{i<\beta}\aleph_{|\delta|+\gamma_i}^{|\delta|}\leqslant\Pi_{i<\beta}\aleph_{|\delta|+\gamma_i}\leqslant\Pi_{\xi<\delta}\aleph_\xi$ となる．(場合 2) $\exists i_0<\beta, i_0\leqslant\forall j<\beta(\aleph_{|\delta|+\gamma_{i_0}}^{|\delta|}=\aleph_{|\delta|+\gamma_j}^{|\delta|})$ の時．$\aleph_\delta^{|\delta|}\leqslant(\Pi_{i<\beta}\aleph_{|\delta|+\gamma_i})^{|\delta|}=\Pi_{i<\beta}\aleph_{|\delta|+\gamma_i}^{|\delta|}\leqslant\Pi_{i<\beta}\aleph_{|\delta|+i_0}^{|\delta|}=(\aleph_{|\delta|+i_0}^{|\delta|})^{|\beta|}=\aleph_{|\delta|+i_0}^{|\delta|}=\Pi_{\xi<|\delta|+i_0}\aleph_\xi\leqslant\Pi_{\xi<\delta}\aleph_\xi$ となる． (場合 A) $2^{|\delta|}<\aleph_{|\delta|}\leqslant\aleph_\delta$ の時．今，$2^{|\delta|}=\aleph_\beta$ と置く．$|[\beta,\delta)|=|\delta|$ であるから，$|\delta|=|a|\leqslant|pcf(a)|$ となる．$\Pi a=\max(pcf(a))\doteq\aleph_\alpha$ と置くと，$pcf(a)=(2^{|\delta|},\aleph_\alpha]\cap legular$ である．従って，$\aleph_\alpha<\aleph_{|pcf(a)|^+}$ となる．故に，$\aleph_\delta^{|\delta|}=\Pi_{\alpha<\delta}\aleph_\alpha=\Pi a=\max(pcf(a))<\aleph_{|pcf(a)|^+}\leqslant\aleph_{(2^{|a|})^+}=\aleph_{(2^{|\delta|})^+}$ となる． (場合 B) $\aleph_{|\delta|}<2^{|\delta|}<\aleph_\delta$ の時．$2^{|\delta|}=\aleph_\gamma$ と置く．$|a|\leqslant|\delta|$ であるから，$|pcf(a)|\leqslant 2^{|\delta|}=\aleph_\gamma$ となる．従って，$\aleph_\delta^{|\delta|}=\max(pcf(a))<\aleph_\gamma^{+\eta}$ となる順序数 $\eta\sim|pcf(a)|$ が存在する．故に，$\aleph_\gamma^{+\eta}=\aleph_{\gamma+\eta}<\aleph_{(|\eta|^+)}=\aleph_{\aleph_{\gamma+1}}=\aleph_{(2^{|\delta|})^+}$ となる．

注意. a が無限濃度を持つ正則基数の区間で $\min(a)^{|a|}<\sup(a)$ としても，$\max(pcf(a))<\aleph_{|pcf(a)|^+}$ は ZFC で証明できない．なぜなら，$\mathrm{CH}+2^{\aleph_1}=\aleph_{\omega_1+1}+\aleph_{\omega_1+\omega}^{\aleph_1}=\aleph_{\omega_1+\omega+1}$ を満たす Easton モデルが存在する．ここで，$a=[\aleph_{\omega_1+1},\aleph_{\omega_1+\omega})$ と置くと，$\min(a)^{|a|}<\sup(a)$ となり定理 4.1 より $\max(pcf(a))=\Pi a=\aleph_{\omega_1+\omega}^{\aleph_1}=\aleph_{\omega_1+\omega+1}$ となる．従って，$|pcf(a)|=\aleph_0$ となる．故に，$\max(pcf(a))=\aleph_{\omega_1+\omega+1}>\aleph_{\omega_1}=\aleph_{|pcf(a)|^+}$ となる．

注意 6.4. 定理 *6.1* の $\min(a)^{|a|}<\sup(a)$ は $2^{|a|}<\min(a)$ でおき換えることはできない．なぜなら，$\aleph_\omega$ が強極限基数で $2^{\aleph_\omega}=\aleph_{\omega+\omega+2}$ を満たす標準モデルで，$\max(pcf(\{\aleph_{\omega+n}:0<n<\omega\}))\leqslant\aleph_{\omega+\omega+1}$ と$\Pi_{0<n<\omega}\aleph_{\omega+n}\geqslant\aleph_\omega^{\aleph_0}=2^{\aleph_\omega}=\aleph_{\omega+\omega+2}$ が成立するものが存在するからである．

定理 6.1 を証明するのに $2^{|a|}<\min(a)$ としてよい．$\kappa=\max(pcf(a))$ とおく．明らかに，$\kappa\geqslant|\Pi a|$ である．従って，$\kappa\leqslant|\Pi a|$ を示せば証明は終る．今，θ を十分大きな正則基数とする．そして，$<^*$ は $H(\theta)$ 上の整列順序とし，$H(\theta)$ を $(H(\theta),\in,<^*)$ と同一視する．更に，$\langle b_\lambda:\lambda\leqslant\kappa\rangle$ を生成元の列の中で $<^*$ に関して最小のものとする．

定義 6.5. $N\prec H(\theta)$ が良モデルとは，$|N|=\min(a)$ でかつ (1),(2) を満たすことである．

(1) 連続初等的鎖 $\langle N_i:i<|a|^+\rangle$ が存在して，$N=\bigcup_{i<|a|^+}N_i$ かつ $\forall j<|a|^+(\langle N_i:i<j\rangle\in N)$ となる．
(2) $a\in N$ かつ $\min(a)\subsetneqq N$

(1) N が良モデルのとき，$pcf(a) \in N, pcf(a) \subsetneq N, \forall i < |a|^+(N_i \in N)$ と $\forall\lambda \in pcf(a)(b_\lambda \in N, J_{<\lambda}(a) \in N)$ が成立する．
(2) 任意の $x \in H(\theta)$ に対して，$x \in N$ となる良モデル N が存在する．

補題 6.7. $|\{N \cap \sup(a) : N$ は良モデル $\}| \leqslant \kappa$

定理 6.1 の証明.

$f \in \Pi a$ を取ると，$f \in N$ となる良モデル N が存在する．そして，$f \subsetneq N \cap (a \times \sup(a)) = a \times (N \cap \sup(a))$ となる．よって，$f \in (N \cap \sup(a))^a$ となる．従って，$\Pi a \subsetneq \bigcup\{(N \cap \sup(a))^a : N$ は良モデル $\}$ となる．故に補題 6.7 より $|\Pi a| \leqslant |\{N \cap \sup(a) : N$ は良モデル $\}| \cdot \min(a)^{|a|} \leqslant \kappa \cdot \sup(a) \leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa$ となる．□

補題 6.7 の証明. $\eta \in a$ に対して，$\chi_N(\eta) = \sup(N \cap \eta)$ とおく．

主張 6.8. N を良モデルとする．このとき，$N \cap \sup(a)$ は χ_N によって決定される．すなわち，$\chi_N = \chi_{N'}$ ならば $N \cap \sup(a) = N' \cap \sup(a)$ となる．

証明. $\min(a) \leqslant \eta \leqslant \sup(a)$ の η に関する帰納法で $N \cap \eta = N' \cap \eta$ を示す．$\eta = \min(a)$ のときと，η が極限数のときは明か．従って，$N \cap \eta = N' \cap \eta$ と仮定して $N \cap \eta^+ = N' \cap \eta^+$ を示す．$\eta^+ \in a \subsetneq N$ であるから，$\chi_N(\eta^+)$ の非有界閉集合で整列型が $|a|^+$ となる $E \subsetneq N$ が存在する．$\chi_N = \chi_{N'}$ と $|a|^+$ が非可算より，$\chi_N(\eta^+)$ の非有界閉集合で $E \subsetneq N \cap N'$ となるものが存在する．従って，$N \cap N' \cap \eta^+$ は $N \cap \eta^+$ と $N' \cap \eta^+$ の両方に対して共終—(A) である．ところで，$\alpha \in N \cap N' \cap \eta^+ - \eta$ をとる．$\{f \in {}^\eta\alpha : f$ は全単射 $\} \subsetneq {}^\eta\alpha \subsetneq H(\theta)$ であるから，$f_0 = \min_{<^*}\{f \in {}^\eta\alpha :$
f は全単射 $\}$ とおくと，$N, N' \prec H(\theta)$ より $f_0 \in N \cap N'$ となる．したがって，$N \cap \eta = N' \cap \eta$ であるから，$N \cap \alpha = f_0[N \cap \eta] = f_0[N' \cap \eta] = N' \cap \alpha$—(B) となる．故に，

$$
\begin{aligned}
N \cap \eta^+ &= \bigcup\{N \cap \alpha : \alpha \in N \cap N' \cap \eta^+ - \eta\} \qquad [\because (A)] \\
&= \bigcup\{N' \cap \alpha : \alpha \in N \cap N' \cap \eta^+ - \eta\} \qquad [\because (B)] \\
&= N' \cap \eta^+
\end{aligned}
$$

が成立する．□

主張 6.8 より $|\{\chi_N : N$ は良モデル $\}| \leqslant \kappa$ を示せば十分である．系 5.4 より，$\lambda \in pcf(a)$ に対し，$b_\lambda \neq \emptyset$ かつ $tcf(b_\lambda / J_{<\lambda}(a)) = \lambda$ となる $b_\lambda \in J_{<\lambda^+}(a) - J_{<\lambda}(a)$ が存在する．$J_{<\lambda}(a)$ について Πb_λ で狭義単調増加共終列 $\langle g_i^\lambda : i < \lambda \rangle \in {}^\lambda(\Pi a)$ をとる．$\langle f_i^\lambda : i < \lambda \rangle \in {}^\lambda(\Pi a)$ を $J_{<\lambda}(a)$ について Πb_λ で狭義単調増加共終列で，次の条件を満たすように帰納的に作れる．$i < \lambda$ に対して，$cf(i) = |a|^+$ ならば任意の $\beta \in a$ に対して $f_i^\lambda(\beta) = \min\{\sup\{f_j^\lambda(\beta) : j \in C\} : C$ は i の非有界閉部分集合 $\}$

注意 **6.9.** $i < \lambda$ かつ $cf(i) = |a|^+$ とする.

(1) 任意の $\beta \in a$ に対して, $f_i^\lambda(\beta) < \beta$ となる ;

(2) $\forall\beta \in a(f_i^\lambda(\beta) = \sup\{f_j^\lambda(\beta) : j \in C\})$ となる i の非有界閉集合 C が存在する.

今, $\langle f_i^\lambda : i < \lambda\rangle$ を $<^*$ で最小のものとする. すると, 全ての $N \prec H(\theta)$ に対し, N が良モデルならば $\langle f_i^\lambda : i < \lambda\rangle \in N$ となる.

補題 6.10. N, N' は良モデルで, $\lambda \in pcf(a)$ とする.

(1) $\lambda = \min(a)$ のとき. $b_\lambda = \{\min(a)\}$ となり, $N \neq N'$ ならば $\chi_N|b_\lambda = \chi_{N'}|b_\lambda$ となる ;

(2) $\lambda > \min(a)$ のとき. $\rho = \sup(N\cap\lambda)$ とおくと, $f_\rho^\lambda \leqslant \chi_N$ —*(A)* かつ $J_{<\lambda}(a)$ について $\chi_N|b_\lambda =_{J_{<\lambda}(a)} f_\rho^\lambda|b_\lambda$ [すなわち, $\{\beta \in b_\lambda : f_\rho^\lambda(\beta) < \chi_N(\beta)\} \in J_{<\lambda}(a)$ かつ $\{\beta \in b_\lambda : f_\rho^\lambda(\beta) > \chi_N(\beta)\} \in J_{<\lambda}(a)$]—*(B)* となる.

証明. (1) は明かなので (2) を示す. まず, (A) を証明する. $|N| = \min(a)$ と $N \prec H(\theta)$ より, $\rho < \lambda$ は極限順序数となる. ところで, $cf(\rho) = |a|^+$ であるから, ρ の非有界閉集合 $E \subsetneqq N$ が存在する. 今, $\forall\beta \in a(f_\rho^\lambda(\beta) = \sup\{f_j^\lambda(\beta) : j \in C'\})$ となる ρ の非有界閉集合 C' をとる. $C = C' \cap E$ とおくと, $C \subsetneqq N$ かつ
$\forall\beta \in a(f_j^\lambda(\beta) = \sup\{f_j^\lambda(\beta) : j \in C'\})$ となる. そして, $\beta \in a$ と $j \in C$ をとると, $f_j^\lambda(\beta) \in N \cap \beta$ となる. したがって, $\{f_j^\lambda(\beta) : j \in C\} \subsetneqq N \cap \beta$ となる. よって, $f_\rho^\lambda(\beta) \leqslant \sup(N \cap \beta) = \chi_N(\beta)$ となる. 故に, $f_\rho^\lambda \leqslant \chi_N$ となる.　つぎに, (B) の証明をする. (1) より $\{\beta \in b_\lambda : f_\rho^\lambda(\beta) < \chi_N(\beta)\} \in J_{<\lambda}(a)$ を示せば十分である. $C = \{\beta \in b_\lambda : f_\rho^\lambda(\beta) < \chi_N(\beta)\}$ とおく. ところで, $\forall\beta \in C\exists\gamma(\beta) \in N \cap \beta(\gamma(\beta) > f_\rho^\lambda(\beta))$ が成り立つ. $\{\gamma(\beta) : \beta \in C\} \subsetneqq N = \bigcup_{i<|a|^+} N_i$,$\langle N_i : i < |a|^+\rangle$ が初等的鎖と $|C| \leqslant |a|$ により $\{\gamma(\beta) : \beta \in C\} \subsetneqq N_i$ となる $i < |a|^+$ が存在する. よって, すべての $\beta \in C$ に対し, $\gamma(\beta) < \sup(N_i \cap \beta) = \chi_{N_i}(\beta)$ となる. 今,

$$\chi'_{N_i}(\beta) = \begin{cases} \chi_{N_i}(\beta) & \beta \neq \min(a) \\ 0 & \beta = \min(a) \end{cases}$$

とおく. 明らかに$\chi'_{N_i} \in \Pi a$ であり, $N_i \in N$ より $\chi'_{N_i} \in N$ となる. $\langle f_i^\lambda : i < \lambda\rangle$ は $J_{<\lambda}(a)$ についてΠb_λ で狭義単調増加共終であるから, $\chi'_{N_i}|b_\lambda <_{J_{<\lambda}(a)} f_j^\lambda|b_\lambda$ となる $j < \lambda$ が存在する. $N \prec H(\theta)$ であるから, $\chi'_{N_i}|b_\lambda <_{J_{<\lambda}(a)} f_j^\lambda|b_\lambda$ となる $j \in N\cap\lambda$ が存在する. $j < \rho = \sup(N\cap\lambda)$ より $f_j^\lambda|b_\lambda <_{J_{<\lambda}(a)} f_\rho^\lambda|b_\lambda$ となる. 従って, $\{\beta \in b_\lambda : \chi'_{n_i}(\beta) \geqslant f_\rho^\lambda(\beta)\} \in J_{<\lambda}(a)$ となる. 更に, $\{\min(a)\} \in J_{<\lambda}(a)$ であるから, $C \subsetneqq \{\beta \in b_\lambda : \chi_{N_i}(\beta) \geqslant f_\rho^\lambda(\beta)\} \subsetneqq \{\beta \in b_\lambda : \chi'_{N_i}(\beta) \geqslant f_\rho^\lambda(\beta)\} \cup \{\min(a)\} \in J_{<\lambda}(a)$ となり題意が成り立つ. □

補題 6.7 の証明の続き.

$\langle(\rho_m, \lambda_m, A_m) : m \leqslant n\rangle$ を次の (1)—(6) を満たすように作れる.

(1) $\kappa = \lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_n$;

(2) $\forall m \leqslant n(\lambda_m \in pcf(a), \rho_m = \sup(N \cap \lambda_m))$;

(3) $\forall m \leqslant n(A_m \subsetneqq a)$;

(4) $A_n = \emptyset$ で $A_0 = \{\beta \in a : f^{\lambda_0}_{\rho_0}(\beta) < \chi_N(\beta)\}$;
(5) $\forall m < n(A_m \in J_{<\lambda^+_{m+1}}(a) - J_{<\lambda_{m+1}}(a))$;
(6) $\forall m < n(A_{m+1} = \{\beta \in A_m : f^{\lambda_{m+1}}_{\rho_{m+1}}(\beta) < \chi_N(\beta)\})$

ところで, $\langle(\rho_m, \lambda_m, A_m) : m \leqslant n\rangle$ の作り方より, $\chi_N|(a - A_0) = f^{\lambda_0}_{\rho_0}|(a - A_0)$ かつ全ての $m < n$ に対して $\chi_N|(a_m - A_{m+1}) = f^{\lambda_{m+1}}_{\rho_{m+1}}|(A_m - A_{m+1})$ となる. したがって, $\chi_N = (\bigcup_{m<n} f^{\lambda_{m+1}}_{\rho_{m+1}}|(A_m - A_{m+1}))\bigcup(f^{\lambda_0}_{\rho_0}|(a - A_0))$ となる. 故に,

$$
\begin{aligned}
|\{\chi_N : N \text{ は良モデル }\}| &\leqslant |(\bigcup_{\lambda\in pcf(a)} \{f^{\lambda}_{\rho} : \rho < \lambda\})^{<\omega}| \\
&\leqslant (\sum_{\lambda\in pcf(a)} \kappa)^{<\omega} = (\kappa\cdot\kappa)^{\omega} = \omega\cdot\kappa\cdot\kappa = \kappa
\end{aligned}
$$

□

系 6.11. a を $\min(a)^{|a|} < \sup(a)$ となる正則基数の区間とする. このとき, $|\Pi a|$ は正則基数となる. 特に, $a = [\aleph_2, \aleph_\omega)$ とおくと, $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ ならば $\aleph_\omega^{\aleph_0} = |a| = \max(pcf(a))$ は正則基数となる.

7. $|pcf(a)| \leqslant |a|^{+3}$ の証明

定理 7.1. a は $\min(a) > 2^{|a|}$ を満たす正則基数の区間とする. このとき $|pcf(a)| \leqslant |a|^{+3}$ となる.

系 7.2. $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ ならば $\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}$ となる.

証明. $a = [2^{\aleph_0}, \aleph_\omega)$ とおく. すると, $\aleph_\omega^{\aleph_0} = \Pi_{n<\omega}\aleph_n = |\Pi a| = \max(pcf(a)) < \aleph_{|pcf(a)|^+} \leqslant \aleph_{|a|^{+4}} = \aleph_{\omega_4}$ となる.

補題 7.3. λ を $\omega < cf(\lambda) < \lambda$ となる基数とし, $otp(C) = cf(\lambda)$ で C は λ で非有界集合となる $C \subsetneqq [cf(\lambda), \lambda)$ をとる. 今, $A^{+n} = \{\rho^{+m} : \rho \in A\}$ と定義し, $m, n < \omega$ に対して $b_{\lambda^{+m}}(C^{+n})$ を $J_{<\lambda^{+m+1}}(C^{+n})$ に対する $J_{<\lambda^{+m}}(C^{+n})$ 上の生成元とおく. このとき, $1 \leqslant n < \omega$ となる全ての n に対して, $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}(C^{+m})\}$ は λ で非有界閉集合となる.

証明. 今, n を $1 \leqslant n < \omega$ で $\{\rho \in C : \rho^{+n} \in \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}(C^{+n})\}$ が λ に於て非有界閉集合となる最小の自然数とする. 記号を簡単にするため, $a = C^{+n}$ とおき $b_{\lambda^{+k}} = b_{\lambda^{+k}}(C^{+n})$ とおく. a 上のイデアル I を次のように定義する.

$$A \in I \leftrightarrow \{\rho \in C : \rho^{+n} \in A\} \text{ は } \lambda \text{ で非停留的.}$$

すると, $a - \bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}} \notin I$——(1) となる. 明らかに, $J_{<\lambda}(a) \subsetneqq I$ となる. ここで, I^* を $I \bigcup\{\bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\}$ から生成されるイデアルとする. (1) より I^* は真のイデアルとなる. λ は特異基数であるから, $J_{<\lambda}(a) = J_{<\lambda^+}(a)$ となり, $J_{<\lambda^{+n+1}}(a)$ は $J_{<\lambda}(a)\bigcup\{\bigcup_{k=1}^{n} b_{\lambda^{+k}}\}$ で生成される. 従って, $I^* \supsetneqq J_{<\lambda^{+n+1}}(a)$ となるので $\Pi a/I^*$ はλ^{+n+1}-有向的——(2) になる. 定理 4.4 の証明の最初に出て来るような狭義単調増加列 $\langle f_\alpha/I^* : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$ を単純平方列を使って作る. すると主張 4.5 と同様に次のことが言える.

主張 7.4. D を a 上の超フィルターで $D\cap I^*=\emptyset$ となるものとする．このとき，すべての $\alpha\in a$ について $|S_\alpha|\leqslant\mu'$ で $\prod_{\alpha\in a}S_\alpha$ が $\langle f_\alpha:\alpha<\lambda^{+n}\rangle$ を共終切断するような$\mu'<\mu$ と $\langle S_\alpha\subseteqq\alpha:\alpha\in a\rangle$ は存在しない．

補題 4.2 と主張 7.4 より a と $|a|$ を同一視すると，$g\in\mathbb{O}N^a$ が存在して g は D の意味で $\langle f_\alpha:\alpha<\lambda^{+n}\rangle$ に対する最小上界となる．—(3)　(2) より，$g\leqslant\overline{g}$ となり I^* の意味で $\overline{g}$ は $\langle f_\alpha:\alpha<\lambda^{+n}\rangle$ の上界となる$\overline{g}\in\Pi a$ が存在する．ここで，すべての $\alpha\in a$ に対して $cf(g(\alpha))>|a|$ と仮定しても一般性は失わない．ところで，すべての $\rho\in C$ に対して，$1\leqslant\exists k\leqslant n-1(cf(g(\rho^{+n}))=\rho^{+k})$ または $cf(g(\rho^{+n}))<\rho$ となる．従って，$S_0=\{\rho\in C:cf(g(\rho^{+n}))<\rho\}$ とおき，$k=1,\ldots,n-1$ に対して $S_k=\{\rho\in C:cf(g(\rho^{+n}))=\rho^{+k}\}$ とおくと，$C=S_0\bigcup(\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k)$ となり $a=S_0^{+n}\bigcup(\bigcup_{k=1}^{n-1}S_k^{+n})$ となる．

主張 7.5. $S_0^{+n}\in D$

証明．$n=1$ のときは明かだから $n>1$ とする．$S_0^{+n}\notin D$ とすると，$S_k^{+n}\in D$ となる $1\leqslant k\leqslant n-1$ が存在する．n のとり方より，$\{\rho\in C:\rho^{+k}\in\bigcup_{j=1}^{k}b_{\lambda+j}\}$ は λ で非有界な閉集合を含む．すなわち $K^{+k}\subseteqq\bigcup_{j=1}^{k}b_{\lambda+j}$ となる非有界閉集合 $K\subseteqq C$ が存在する．

ところで，g は D の意味で $\langle f_\alpha:\alpha<\lambda^{+n}\rangle$ の最小上界であるから，$a'=\{\rho^{+k}:\rho\in C\}$ と定義し，a' 上の超フィルター D' を次のように定義する．

$A\in D'\leftrightarrow\{\rho^{+n}:\rho\in C$ で $\rho^{+k}\in A\}\in D$ すると，$cf(\Pi a'/D')=\lambda^{+n}$ となる．[$\because a''=\{cf(g(\alpha)):\alpha\in a\}$ とおき，D'' を次のように定義する．
$A\in D''\leftrightarrow\{\alpha\in a:cf(g(\alpha))\in A\}\in D$ すると，定理 4.4 の最後の方の証明と同様に $cf(\Pi a''/D'')=\lambda^{+n}$ が成立する．ところで，$a'\in D''$ で $D'=\{b\cap a':b\in D''\}$ である．したがって，$cf(\Pi a'/D')=cf(\Pi a''/D'')=\lambda^{+n}$ となる．]

K は λ で非有界閉集合であり $D\cap I=\emptyset$ であるから，$K^{+n}\in D$ となる．したがって，$D'\ni K^{+k}\subseteqq\bigcup_{j=1}^{k}b_{\lambda+j}$ となるので，$b_{\lambda+j}\in D'$ となる $1\leqslant j\leqslant k$ が存在する．故に，$cf(\Pi a'/D')<\lambda^{+j+1}\leqslant\lambda^{+k+1}\leqslant\lambda^{+n}$ となり矛盾．□

定義 7.6. $b\subseteqq a$ とする．$\langle f_\alpha:\alpha<\lambda^{+n}\rangle$ が I について g の下で Πb で共終であるとは次のことを満たすことである．$k<_{I^*}g|b$ となる全ての $k\in\Pi b$ に対して，$k\leqslant_{I^*}f_\alpha|b$ となる $\alpha<\lambda$ が存在する．

主張 7.7. $b\in D$ が存在して，$\langle f_\alpha:\alpha<\lambda^{+n}\rangle$ は I^* について g の下で Πb で共終となる．

証明．定理 3.2 の証明と同様に示す．帰納的に $\beta<|a|^+$ に対して $h_\alpha\in\Pi a$ を次の条件 (1),(2) を満たすように作る．

(1) $\beta<\beta'\to h_\beta\leqslant h_{\beta'}$;
(2) $\forall\beta<|a|^+(h_\beta<g)$.

そして，$b_\alpha^\beta=\{\gamma\in a:f_\alpha(\gamma)>h_\beta(\gamma)\}$ とおく．　$\beta<|a|^+$ に対する $h_\beta\in\Pi a$ の構成について．$\beta=0$ のときは，$\delta\in a$ に対し $h_0(\delta)=0$ と定義する．β が極限数のとき．$h_\beta(\delta)=\sup\{h_\gamma(\delta):\gamma<\beta\}$ と定義すればよい．h_β が定義できたとして $h_{\beta+1}$ の定義．

すべての $\alpha<\lambda^{+n}$ に対して，$\langle f_\gamma:\gamma<\lambda^{+n}\rangle$ が I^* について g の下で Πb_α^β で共終であるときは証明は終るので，$i_\beta<\lambda^{+n}$ が存在して，$\langle f_\gamma:\gamma<\lambda^{+n}\rangle$ が I^* につ

いて g の下で$\Pi b^{\beta}_{i_\beta}$ で共終でないときが問題となる．このときは，$h <_{I^*} g|b^{\beta}_{i_\beta}$ かつ $\forall\alpha < \lambda^{+n}(h \not\leq_{I^*} f_\alpha|b^{\beta}_{i_\beta})$ となる $h \in \Pi b^{\beta}_{i_\beta}$ が存在する．そこで，$\delta \in a$ に対して，$h_{\beta+1}(\delta) = \max(h_\beta(\delta), h(\delta))$ と定義する．すると，$i_\beta < \forall\alpha < \lambda^{+n}(b^{\beta+1}_\alpha \subsetneqq b^\beta_\alpha)$ となる．[$\because b^\beta_{i_\beta} - b^\beta_\alpha \in I^*$ と $\{\gamma \in b^\beta_{i_\beta} : f_\alpha(\gamma) < h(\gamma)\} \notin I^*$ より，$\{\gamma \in b^\beta_\alpha : f_\alpha(\gamma) < h(\gamma)\} \notin I^*$ となる．よって，$\gamma \in b^\beta_\alpha - b^{\beta+1}_\alpha$ となる γ が存在する．明らかに，$b^{\beta+1}_\alpha \subseteqq b^\beta_\alpha$ であるから，$b^{\beta+1}_\alpha \subsetneqq b^\beta_\alpha$ となる．]

$\alpha = \sup\{i_\beta : \beta < |a|^+\} < \lambda^{+n}$ とおく．すると，$\langle b^\beta_{\alpha+1} : \beta < |a|^+\rangle$ は $\subseteqq$ 上，狭義単調増加となる．故に矛盾． □

主張 7.7 より，$\langle f_\alpha : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$ が I^* について g の下で Πb で共終となる $b \in D$ が存在する．すべての $\alpha < \lambda^{+n}$ に対し $f_\alpha <_D g$ がいえる．今，$\alpha < \lambda^{+n}$ を固定し，$b_\alpha = \{\delta \in b : f_\alpha(\delta) < g(\delta)\} \in D$ とおく．主張 7.5 より $b'_\alpha = b_\alpha \cap S_0^{+n} \in D$ が成立して，$b'_\alpha \notin I^*$ となる．従って，$b'_\alpha - \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k} \notin I$ となる．これより，$S_\alpha = \{\rho \in C : \rho^{+n} \in b'_\alpha - \bigcup_{k=1}^n b_{\lambda+k}\}$ は λ で停留的となる．ところで，S_α は S_0 の部分集合であるから $f; S_\alpha \to \lambda$ を $f(\rho) = cf(g(\rho^{+n}))$ と定義すると，Fodor の定理より $\{\rho \in S_\alpha : cf(g(\rho^{+n})) \leqslant \eta_\alpha\}$ がλ で停留的となる $\eta_\alpha < \lambda$ が存在する．よって，$\{\delta \in b'_\lambda : cf(g(\delta)) \leqslant \eta_\alpha\} \notin I^*$ となる．α の固定はここまで．

ところで，すべての $\alpha < \lambda^{+n}$ に対して $\eta_\alpha < \lambda$ であるから，$\eta < \lambda$ が存在して $A = \{\alpha < \lambda : \eta_\alpha = \eta\} \sim \lambda^{+n}$ が成立する．$\alpha \in A$ に対し，すべての $\beta < \alpha$ に対し $\eta_\beta = \eta$ としてよい．従って，A は λ^{+n} で非有界であるから，すべての$\alpha < \lambda^{+n}$ に対して $\{\delta \in b'_\alpha : cf(g(\delta)) \leqslant \eta\} \notin I^*$ となる．今，$\alpha < \lambda^{+n}$ に対して $C_\alpha = \{\delta \in b'_\alpha : cf(g(\delta)) \leqslant \eta\}$ とおく．明らかに，$\forall\alpha, \alpha' < \lambda^{+n}(\alpha < \alpha' \to C_{\alpha'} \subseteqq_{I^*} C_\alpha)$ となる．更に，$b \in D^*, D^* \cap I^* = \emptyset$ かつ $\forall\alpha < \lambda^{+n}(C_\alpha \in D^*)$ となる a 上の超フィルター D^* が存在する．C_α の定義より $f_\alpha <^*_D g$ となる．

主張 7.8. g は D^* について $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$ に対する最小上界となる．

証明. 補題 4.3 と主張 7.4 と 主張 7.7 より明か．

補題 7.3 の証明に戻る．$E = \{\delta \in b : cf(g(\delta)) \leqslant \eta\} \in D^*$ とおけば$E \in D^*$ である．今，$\delta \in E$ のとき $S_\alpha \subseteqq g(\delta)$ を非有界で $|S_\alpha| \leqslant \eta$ とし，$\delta \notin E$ のとき $S_\alpha = \{0\}$ とする．

主張 7.8 より $\prod_{\delta\in a} S_\delta/D^*$ は $\langle f_\alpha/D^* : \alpha < \lambda^{+n}\rangle$ を共終切断する．これは主張に反する．故に，補題 7.3 の証明は終った． □

注意. 補題 7.3 より全ての $0 < n < \omega$ に対して，$\lambda^+ \in pcf(C^{+n})$ または ... または$\lambda^{+n} \in pcf(C^{+n})$ となる．ところで，$C = \{\aleph_\alpha : \alpha$ は極限数 $, \alpha < \omega_1\}$ とおくと，$otp(C) = \omega_1$ で C は$\aleph_{\omega_1}$ で非有界閉集合となる．則ち，補題 7.3 の仮定を満たす．ここで，$a = C^{+2}$ とおき，$\aleph_{\omega_1}$ を強極限基数とし $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$ と仮定すると，$\max(pcf(a)) = \aleph_{\omega_1+1}$ となり $\aleph^{+2}_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1+2} \notin pcf(a)$ となる．ここで疑問になるのが，ZFC で $\aleph_{\omega_1+1} \in pcf(C^{+2})$ となるか? ということである．更に，一般に補題 7.3 の仮定のもとで $0 < \forall n < \omega(\lambda^+ \in pcf(C^{+n}))$ となるかが問題となると思う．

a を正則基数の集合とし，$|a| \geqslant \omega$ かつ $|a|^+ < \min(a)$ を満たすとする．今，$c = pcf(a)$ とおくと補題 3.7 より，$|pcf(a)| < \min(a)$ ならば$pcf(a) = pcf(c)$ となる．今後，我々には，[すべての $\lambda \in pcf(c)$ に対して，$J_{<\lambda^+}(c)$ に対する $J_{<\lambda}(c)$ 上の生成元が存在する．]—(1) が必要となる．ところで，$2^{|c|} < \min(c) = \min(a)$ の

ときは明らかに (1) が成立する．次の補題 7.9 は $2^{|a|} < \min(a)$　[これは定理 5.6 の仮定から出てきたものである] の条件だけで (1) が成立することを示している．

補題 7.9. $2^{|a|} < \min(a)$ とし，$c = pcf(a)$ とおく．更に，すべての $\lambda \in pcf(a) = pcf(c)$ に対して b_λ は $J_{<\lambda^+}(a)$ に対する $J_{<\lambda}(a)$ 上の生成元と仮定する．このとき，$d_\lambda = pcf(b_\lambda)$ とおくと d_λ は $J_{<\lambda^+}(c)$ に対する $J_\lambda(c)$ 上の生成元となる．

証明. 最初に $d_\lambda \in J_{<\lambda^+}(c)$ を示す．$\lambda \in pcf(a)$ より $b_\lambda \neq \emptyset$．よって，$\emptyset \neq pcf(b_\lambda) = b_\lambda$ となる．今，c 上の超フィルター $D \ni d_\lambda$ をとる．ところで，すべての $\mu \in pcf(a)$ に対して，$cf(\Pi a/D_\mu) = \mu$ となる a 上の超フィルター D_μ が存在する．但し，$\mu \in d_\lambda = pcf(b_\lambda)$ のときは，$b_\lambda \in D_\mu$ となるように D_μ をとる．補題 3.7 の証明のように a 上の超フィルター D^* を次のように定義する．

$D^* = \{A \subsetneqq a : \{\mu \in pcf(a) : A \in D_\mu\} \in D\}$ 補題 3.7 のように $cf(\Pi a/D^*) = cf(\Pi c/D)$ が成立する．$d_\lambda \in D$ と D_μ のとり方より $b_\lambda \in D^*$ となる．従って，$cf(\Pi c/D) = cf(\Pi a/D^*) = \min\{\lambda : b_\lambda \in D^*\} < \lambda^+$ となる．故に，$d_\lambda \in J_{<\lambda^+}(c)$ が成立する．

次に，d_λ が $J_{<\lambda^+}(c)$ に対する $J_{<\lambda}(c)$ 上の生成元であることについて示す．d_λ が $J_{<\lambda^+}(c)$ に対する $J_{<\lambda}(c)$ 上の生成元でないとする．すなわち $e - d_\lambda \notin J_{<\lambda}(c)$ となる $e \in J_{<\lambda^+}(c) - J_{<\lambda}(c)$ が存在する．今，$e - d_\lambda \in D'$ かつ $D' \cap J_{<\lambda}(c) = \emptyset$ となる c 上の超フィルター D' をとる．命題 3.4 より $cf(\Pi c/D') = \lambda$—(1) となる．ところで，$\mu \in e - d_\lambda$ に対し $cf(\Pi a/D_\mu) = \mu$ となる a 上の超フィルター D_μ をとる．$\mu \notin d_\lambda = pcf(b_\lambda)$ であるから $b_\lambda \notin D_\mu$ となり，$a - b_\lambda \in D_\mu$ となる．以上より，$\forall \mu \in e - d_\lambda (a - b_\lambda \in D_\mu)$ が成立する．

$D_1^* = \{A \subsetneqq a : \{\mu \in pcf(a) : A \in D_\mu\} \in D'\}$ と定義する．$e - d_\lambda \in D'$ より $a - b_\lambda \in D_1^*$—(2) が成立する．一方，補題 3.7 のように $cf(\Pi a/D_1^*) = cf(\Pi c/D')$ が成立するので (1) より $cf(\Pi a/D_1^*) = \lambda$—(3) となる．従って，命題 3.4 より $D_1^* \cap J_{<\lambda}(a) = \emptyset$ となる．(3) より $D_1^* \cap J_{<\lambda^+}(a)$ の元 b がとれる．b_λ は $J_{<\lambda^+}(a)$ に対する $J_{<\lambda}(a)$ 上の生成元であるから，$b \subsetneqq_{J_{<\lambda}(a)} b_\lambda$ となる．故に，$D_1^* \ni b \cap b_\lambda \subsetneqq b_\lambda$ となり (2) に反する．□

補題 3.7 からすぐ分かるように pcf を 2 度以上繰り返しても c も生成元の変わらない．

補題 7.10(生成元の列の推移性). $2^{|a|} < \min(a)$ で $\lambda \in pcf(a) = c = pcf(c)$ と仮定する．このとき，$J_{<\lambda^+}(c)$ に対する $J_{<\lambda}(c)$ 上の生成元 $b_\lambda(c)$ を
(1) $\forall \mu \in b_\lambda(c)(b_\mu(c) \subsetneqq b_\lambda(c))$ となる $b_\lambda(c) \in J_{<\lambda^+}(c) - J_{<\lambda}(c)$ が存在する；
(2) $pcf(b_\lambda(c)) = b_\lambda(c)$.
が成立するようにとれる．

$\rho \prec \mu \leftrightarrow \rho \in b_\mu(c)$ と定義すると，この補題は $\prec$ が推移的であることを示している．

定理 7.11. $2^{|a|} < \min(a)$ で $d \subsetneqq c$ と仮定する．このとき，任意の $\mu \in pcf(d)$ について $d' \subsetneqq d$ で $|d'| \leqslant |a|, \mu \in pcf(d')$ となるものが存在する．

証明. $b_\lambda(c)$ を簡単に b_λ と表わす．$\mu \in pcf(d)$ をとり，μ に関する帰納方で証明する．補題 7.10 より任意の $\nu \in b_\mu \subsetneqq b_\lambda$ で $pcf(b_\mu) = b_\mu$ となる b_μ がとれる．ここで，$pcf(d) \subsetneqq b_\mu \subsetneqq \nu + 1$ と仮定してよい．更に，$pcf(d) \cap \nu$ は最大元を持たないとしてよい．$\kappa = cf(pcf(d) \cap \mu)$ とおき，$pcf(d) \cap \mu$ で狭義単調増加共終列 $\langle \mu_i : i < \kappa \rangle$

をとる．$|e| \leqslant |a|$ かつ $\mu \in pcf(e)$ となる $e \subseteqq \{\mu_i : i < \kappa\}$ が存在することを示せば証明は終る．

以下その証明．$|S| \leqslant |a|$ かつ $a \bigcap (\bigcup_{i<\kappa} b_{\mu_i}) \subseteqq \bigcup_{i \in S} b_{\mu_I}$ となる $S \subseteqq \kappa$ が存在する．$e = \{\mu_i : i \in S\}$ とおく．補題 5.10 より $\delta_1 < \cdots < \delta_k$ かつ $e \subseteqq b_{\delta_1} \cap \cdots \cup b_{\delta_k}$ となる $pcf(e)$ の元$\delta_1, \ldots, \delta_k$ が存在する．

今，$1 \leqslant \forall h \leqslant k(\mu > \delta_h)$ と仮定して矛盾を導く．$pcf(e) \subseteqq pcf(d')$ より $1 \leqslant \forall h \leqslant k(\mu_i > \delta_h)$ となる $i \in \kappa$ が存在する．ここで，$A = a \cap \{b_{\mu_i} - (b_{\delta_1} \cup \cdots \cup \delta_k)\}$ とおくと明らかに $A \neq \emptyset$ となる．一方，$\forall j \in S(\mu_j \in e \subseteqq b_{\delta_1} \cup \cdots \cup b_{\delta_k})$ であり c 上の生成元は 補題 7.10 の結果を満たすので$\bigcup_{i \in S} b_{\delta_i} \subseteqq b_{\delta_1} \cup \cdots \cup b_{\delta_k}$ となる．S の作り方より $a \cap b_{\mu_i} \subseteqq \bigcup_{j \in S} b_{\mu_j} \subseteqq b_{\delta_1} \cup \cdots \cup b_{\delta_k}$ となる．したがって $A = \emptyset$ となる．これは矛盾．

よって，$\delta_h \geqslant \mu$ となる $1 \leqslant h \leqslant k$ が存在する．更に，$pcf(e) \subseteqq pcf(\{\mu_i : i < \kappa\}) \subseteqq pcf(d) \subseteqq \mu + 1$ であるから $\delta_h \leqslant \mu$ となる．故に，$\mu = \delta_h \in pcf(e)$ かつ $|e| \leqslant |a|$ が成立する．□

7.12 補題 7.10 の証明.

推移性を示せば十分．(これを示せば $pcf(b_\lambda) = b_\lambda$ が簡単に示せる．) ここで，$(2^{|a|})^+ < \min(a)$ を仮定してよい．θ を十分大きな正則基数とし，$<^*$ を $H(\theta)$ 上の整列順序とする．そして，$H(\theta)$ と $\langle H(\theta), \in, <^* \rangle$ を同一視する．

定義 7.13. $N \prec H(\theta)$ が良モデルであるとは，$|N| = (2^{|a|})^+$ であり (1) と (2) を満たすことである．

(1) $N = \bigcup_{\alpha < (2^{|a|})^+} N_\alpha$ かつ $\forall \alpha < (2^{|a|})^+ (\langle N_\beta : \beta < \alpha \rangle \in N_{\alpha+1})$ となる連続初等的鎖 $\langle N_\alpha : \alpha < (2^{|a|})^+ \rangle$ が存在する；

(2) $\{a\} \cup 2^{|a|} \subseteqq N_0$ かつ $\forall \alpha < (2^{|a|})^+ (|N_\alpha| = 2^{|a|}, \alpha \subseteqq N_\alpha)$.

注意 6.6 と同様に任意の $x \in H(\theta)$ に対して良モデル N で $x \in N$ なるものがあり $pcf(c) = c = pcf(a) \in N$ そして $pcf(a) \subseteqq N$ が成立する．更に，$<^*$ の意味に於て N で最小元である $\langle b_\lambda : \lambda \in pcf(a) \rangle$ が存在する．$pcf(c) \subseteqq N$ より $\forall \lambda \in pcf(c)(b_\lambda \in N)$ となる．そして，系 5.4 より $\forall \lambda \in pcf(c)(tcf(\Pi b/J_{<\lambda}) = \lambda)$ となる．

定義 7.14. 良モデル N に対して，$\forall \alpha \in c(\chi_N(\alpha) = \sup(N \cap \alpha))$.

主張 7.15. $\lambda \in pcf(a)$ とする．$\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in \Pi c$ に対して，$\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in N$ かつ $\forall K \in \Pi b_\lambda \exists \alpha_0 < \lambda, \alpha_0 \leqslant \forall \alpha < \lambda(K <_{J_{<\lambda}} f^\lambda_\alpha | b_\lambda)$—*(A)* と仮定する．このとき，$b_\lambda =_{J_{<\lambda}} \{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geqslant \chi_N(\alpha)\}$ となる．

証明. (a) $b_\lambda \subseteqq_{J_{<\lambda}} \{\alpha \in c : f^\alpha_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geqslant \chi_N(\alpha)\}$ について．

背理法で示す．則ち，$b' \notin J_<$ かつ $\forall \alpha \in b'(f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) < \chi_N(\alpha))$ となる $b' \subseteqq b_\lambda$ が存在すると仮定して矛盾を導く．c 上の関数 h を次のように定義する．

$$h(\alpha) = \begin{cases} f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) & \alpha \in b' \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

すると，すべての $\alpha \in c$ に対して $h(\alpha) < \chi_N(\alpha) = \sup\{\chi_{n_i}(\alpha) : \alpha < (2^{|a|})^+\}$ となる．$|c| \leqslant 2^{|a|}$ であるから，$\forall \alpha \in c(h(\alpha) < \chi_{N_i}(\alpha))$ となる $i < (2^{|a|})^+$ が

存在する．$\chi_{N_i} \in N \cap \Pi c$ であるから (A) と $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in N$ より $\delta_0 \leqslant \forall\delta < \lambda(\chi_{N_i}|b_\lambda <_{J_{<\lambda}} f^\lambda_\delta|b_\lambda)$ となる $\delta_0 \in N \cap \lambda$ が存在する．$\delta_0 < \sup(N \cap \lambda) = \chi_N(\lambda) < \lambda$ より $h|b_\lambda < \chi_{N_i}|b_\lambda <_{J_{<\lambda}} f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}|b_\lambda$—(1) となる．$h$ の定義より $h|b' = f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}|b'$ となる．(1) より $b' \notin J_{<\lambda}$ で，$b' \subseteqq \{\alpha \in b_\lambda : h(\alpha) \geqslant f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha)\} \in J_{<\lambda}$ となり矛盾． (b) $\{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geqslant \chi_N(\alpha)\} \subseteqq_{J_{<\lambda}} b_\lambda$ について．背理法で示す．$d = \{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geqslant \chi_N(\alpha)\} - b_\lambda \notin J_{<\lambda}$ とおく．b_λ は $J_{<\lambda^+}$ に対する $J_{<\lambda}$ 上の生成元であるから，$d \notin J_{<\lambda^+}$—(2) となる．ところで，$\Pi c/J_{<\lambda^+}$ は λ^+-有向的であったので，$\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ は $J_{<\lambda^+}$ の意味で上界 $g \in \Pi c$ を持つ．よって，g が存在して g は $J_{<\lambda^+}$ の意味で $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ に対する上界となる．$c \in N$ かつ $c \subseteqq N$ より $range(g) \subseteqq N$ である．従って，すべての $\delta \in c$ に対して $g(\delta) < \sup(N \cap \delta) = \chi_N(\delta)$ となる．$\chi_N(\lambda) < \lambda$ であるから，$f^\lambda_{\chi_N(\lambda)} \leqslant_{J_{<\lambda^+}} g < \chi_N$ となる．故に，(2) より $d \notin J_{<\lambda^+}$ かつ $d \subseteqq \{\alpha \in c : f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha) \geqslant \chi_N(\alpha)\} \in J_{<\lambda^+}$ となり矛盾． □

補題 7.10 の証明に戻る．我々は，$\lambda \in pcf(a) = c = pcf(c)$ に対し，主張 7.5 の (A) を満たす列 $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in \Pi c$ を全ての良モデル N に対し (1),(2) が成立するように作る．

(1) $f^\lambda_{\chi_N(\lambda)} \leqslant \chi_N$;

(2) すべての $\alpha, \mu \in c$ に対して，$\alpha \leqslant \mu < \lambda$ かつ $cf(f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\mu)) > \omega$ ならば $f^\mu_{f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\mu)}(\alpha) \leqslant f^\lambda_{\chi_N(\lambda)}(\alpha)$.

このような列 $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in \Pi c$ が作れたならば証明が終ることは簡単な計算で分かる．$\lambda \in c$ に対し $J_{<\lambda}$ について Πb_λ で狭義単調増加共終列 $\langle f^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle \in \Pi c$ がとれる．これは系 5.4 から言える．補題 6.7 の証明と同様に $\langle h^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ を帰納的に次のように作る．$cf(\alpha) = (2^{|a|})^+$ ならば，$\delta \in c$ に対して $h^\lambda_\alpha(\delta) = \min\{\sup\{f^\lambda_\beta(\delta) : \beta \in C\} : C$ は α の非有界閉部分集合$\}$．明らかに，$\forall\delta \in c(h^\lambda_\delta(\delta) = \sup\{f^\lambda_\beta(\delta) : \beta \in C\})$ となる α の非有界閉部分集合 C が存在する．今，$\lambda \in c$ と $n < \omega$ に対して，$\langle f^\lambda_{\alpha,n} : \alpha < \lambda \rangle \in \Pi c$ を次のように帰納的に作る． $f^\lambda_{\alpha,0}(\delta) = h^\lambda_\alpha(\delta)$

$f^\lambda_{\alpha,n+1}(\delta) = \sup(\{f^\lambda_{\alpha,n}(\delta)\} \bigcup \{f^\mu_{f^\lambda_{\alpha,n}(\mu),n}(\delta) : \mu \in [\delta, \lambda) \cap c\})$ ここで，すべての $\delta \in c$ に対して $g^\lambda_\alpha(\delta) = \sup_{n<\omega} f^\lambda_{\alpha,n}(\delta)$ と定義する．$g^\lambda_\alpha \geqslant f^\lambda_{\alpha,0} = h^\lambda_\alpha$ であるから $\langle g^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ が主張 7.5 の (A) を満たすことは明か．$\langle g^\lambda_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ が (1),(2) を満たすことを示す．

主張 7.16. $\lambda, \mu \in c$, $\lambda > \mu, \alpha < \lambda$ とし，$cf(g^\lambda_\alpha(\mu)) > \omega$ とする．このとき任意の $\delta \in c$ に対して$\delta \leqslant \mu$ ならば $g^\mu_{g^\lambda_\alpha(\mu)}(\delta) \leqslant g^\lambda_\alpha(\delta)$ となる．

証明．$\forall m \geqslant n(g^\lambda_\alpha(\mu) = f^\lambda_{\alpha,n}(\mu) = f^\lambda_{\alpha,m}(\mu))$ となる $n < \omega$ が存在する．従って，任意の $m > n, \delta \leqslant \mu$ に対し $f^\mu_{g^\lambda_\alpha(\mu),m-1}(\delta) = f^\mu_{f^\lambda_{\alpha,m}(\mu),m-1}(\delta) \geqslant f^\lambda_{\alpha,m}(\delta)$ となる．故に，$g^\mu_{g^\lambda_\alpha(\mu)}(\delta) = \sup\{f^\mu_{g^\lambda_\alpha(\mu),m-1}(\delta) : 1 \leqslant m < \omega\} \leqslant \sup\{f^\lambda_{\alpha,m}(\delta) : 1 \leqslant m < \omega\} = g^\lambda_\alpha(\delta)$ となる． □

主張 7.17. すべての $n < \omega, \alpha \in c, \alpha < \lambda$ に対し $\alpha \in \overline{N \cap \lambda}$ ならば $\forall\delta \in pcf(a)(f^\lambda_{\alpha,n}(\delta) \in \overline{N \cap \theta})$ となる．但し，$\overline{N}$ は順序位相での閉包の意味である．

証明．λ に関する帰納法で示す．$\alpha \in \overline{N \cap \lambda}$ とすると，$\alpha \in N \cap \lambda$ または α は $N \cap \lambda$ の極限点となる．α が $N \cap \lambda$ の極限点で $\alpha \notin N$ のときについて考えれば十分．

$n=0$ のとき．明らかに，$cf(\alpha)=(2^{|a|})^+$ となる．ところで，$N\cap\alpha$ が α で非有界閉集合であるから，今すべての $\delta\in pcf(a)$ に対して $h^\lambda_\alpha(\delta)=\sup_{\beta\in C} f^\lambda_\beta(\delta)$ となる α での非有界閉集合 C をとる．すると，$h^\lambda_\alpha(\delta)=\sup\{f^\lambda_\beta(\delta):\beta\in N\cap C\}$ となる．$\beta\in C\cap N$ に対して $f^\lambda_\beta(\delta)\in N$ より，$f^\lambda_{\alpha,0}(\delta)=h^\lambda_\alpha(\delta)\in\overline{N\cap\theta}$ となる． $n+1$ のとき．帰納法の仮定より $f^\lambda_{\alpha,n}(\delta)\in\overline{N\cap\theta}$ かつ $\forall\mu\in[\delta,\lambda)\cap c(f^\lambda_{\alpha,n}(\mu)\in\overline{N\cap\theta})$ となる．λ に関する帰納法の仮定より $\mu\in[\delta,\lambda)\cap c$ とすると，$f^\mu_{f^\lambda_{\alpha,n}(\mu),n}(\delta)\in\overline{N\cap\theta}$ となる．故に，$f^\lambda_{\alpha,n+1}$ の定義より $f^\lambda_{\alpha,n+1}(\delta)\in\overline{N\cap\theta}$ となる．□

もう一度補題 7.10 の証明に戻る．$\langle g^\lambda_\alpha : \alpha<\lambda\rangle$ に対して (1) が成立することを示せばよい．$\alpha=\chi_N(\lambda)$ とおくと，明らかに $\alpha\in\overline{N\cap\lambda}$ となる．主張 7.17 より $\forall n<\omega\forall\delta\in c(f^\lambda_{\alpha,n}(\delta)\in\overline{N\cap\theta})$ となる．従って，$g^\lambda_\alpha(\delta)=\sup\{f^\lambda_{\alpha,n}(\delta):n<\omega\}\in\overline{N\cap\theta}$ となる．$g^\lambda_\alpha(\delta)<\delta$ であるから $g^\lambda_\alpha(\delta)\in\overline{N\cap\delta}$ となる．故に，$g^\lambda_\alpha(\delta)\leqslant\sup(\overline{N\cap\delta})=\sup(N\cap\delta)=\chi_N(\delta)$ が言える．これで補題 5.10 の証明が終った．□

定理 7.1 の証明.

$\min(a)=\aleph_{\delta+1}$ すなわち後続基数と仮定してよい．すると，$pcf(a)$ は弱到達不能基数を持たない．従って，今，$\eta=|a|$ とおくと $\max(pcf(a))=\aleph_{\delta+\rho+1}$ と表わせる．ここで，$P(\rho+1)$ 上の閉作用素を次のように定義する． $X\subseteqq\rho+1$ に対し $\overline{X}=\{\gamma\leqslant\rho:\aleph_{\delta+\gamma+1}\in pcf(\{\aleph_{\delta+\eta+1}:\eta\in X\})\}$

7.18 この作用素は次の性質を持つ.

(1) $X,Y\subseteqq\rho+1$ に対し，$\overline{\emptyset}=\emptyset, X\subseteqq\overline{X}, X\subseteqq Y\rightarrow\overline{X}\subseteqq\overline{Y}, \overline{X\cup Y}=\overline{X}\cup\overline{Y}, \overline{\overline{X}}=\overline{X}$；

(2) $X\subseteqq\rho+1$ かつ $\gamma\in\overline{X}$ とする．このとき $|X'|\leqslant\eta$ かつ $\gamma\in\overline{X'}$ となる $X'\subseteqq X$ が存在する；

(3) すべての $X\subseteqq\rho+1$ に対して $\overline{X}$ は最大元を持つ；

(4) すべての $\gamma<\rho$ に対して $cf(\gamma)>\omega$ ならば，$\overline{C}\subseteqq\gamma+1$ となる γ の非有界閉集合 C が存在する；

(5) $[\eta^{+4},\rho]$ は閉集合である.

(1)–(5) から $|\rho|\leqslant\eta^{+3}$ が導ければ，証明は終わる．$|\rho|\geqslant\eta^{+4}$ と仮定して矛盾を導けば十分．$P(\eta^{+4})$ 上の閉作用素を次のように定義する．

$$cl(X)=\begin{cases}\overline{X} & \overline{X}\subseteqq\eta^{+4}\\ (\overline{X}\cap\eta^{+4})\cup\{\eta^{+4}\} & \text{その他}\end{cases}$$

すると 7.18 の (1)–(5) と同様のことが言える.

定義 7.19. $\mu<\kappa$ で両方とも正則基数とする．$T\subseteqq\{\alpha<\kappa:cf(\alpha)=\mu\}$ は κ で停留的とする．$\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}(T)$ とは，(1),(2) が成立する列 $\langle S_\alpha:\alpha\in T\rangle$ が存在することである.

(1) すべての $\alpha\in T$ に対して S_α は α で非有界閉集合である；

(2) すべての κ 上の非有界閉集合 C に対して，$\{\alpha\in T:S-\alpha\subseteqq C\}$ は κ で停留的である.

我々は $T=\{\alpha<\kappa : cf(\alpha)=\mu\}$ のとき，$\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}(T)$ を $\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}$ と表わし，$\langle S_\alpha : \alpha\in T\rangle$ を $\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}(T)$-列と呼ぶ.

補題 7.20. μ,κ を非可算正則基数とし $\mu^+<\kappa$ とする．このとき，すべての停留的な $T\subsetneqq\{\alpha<\kappa : cf(\alpha)=\mu\}$ に対して $\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}(T)$ が成立する.

証明. 背理法で示す. $\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}(T)$ が成立しない停留的な集合 $T\subsetneqq\{\alpha<\kappa : cf(\alpha)=\mu\}$ が存在すると仮定する．今，全ての$\alpha\in T$ に対して $otp(S_\alpha)=\mu$ かつ S_α が α で非有界閉集合であるような列 $\langle S_\alpha : \alpha\in T\rangle$ をとる．$\beta\leqslant\mu^+$ までの帰納法で，$\langle S^\beta_\alpha : \alpha\in T\cap\lim(\bigcap_{\beta'<\beta}C_{\beta'})\rangle$ と C_β を作る.

構成について．$\beta=0$ のとき．$\alpha\in t$ に対して $S^0_\alpha=S_\alpha$ と定義する．そして，$\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}(T)$ が成立しないことより，$\{\alpha\in T : S_\alpha\subsetneqq C_0\}$ が停留的とならない κ 上の非有界閉集合 C_0 が存在する．$0<\beta<\mu^+$ のとき．$\alpha\in T\cap\lim(\bigcap_{\beta'<\beta}C_{\beta'})$ に対し，$S^\beta_\alpha=S^0_\alpha\cap(\bigcap_{\beta'<\beta}C_{\beta'})$ と定義する．$(\bigcap_{\beta'<\beta}C_{\beta'})\cap\alpha$ は α で非有界閉集合であるから，$otp(S^\beta_\alpha)=\mu$ かつ S^β_α は α で非有界閉集合となる．ところで，$\diamondsuit_{club(\kappa,\mu)}(T\cap\lim(\bigcap_{\beta'<\beta}C_{\beta'}))$ が成立しないので，$\{\alpha\in T\cap\lim(\bigcap_{\beta'<\beta}C_{\beta'}) : S^\beta_\alpha\subsetneqq C_\beta\}$ が停留的とならない κ 上の非有界閉集合 C_β が存在する．$D=\bigcap_{\beta'<\beta}C_\beta$ とおき，$\alpha\in T\cap\lim(D)$ に対して $S^{\mu^+}_\alpha=S^0_\alpha\cap D$ と定義する． これで，構成は終った．以下矛盾を導く．$\alpha\in T\cap\lim(D)$ に対して，$\langle S^\beta_\alpha : \beta\leqslant\mu^+\rangle$ は S_0 の部分集合の $\subsetneqq$-減少列．$|S_0|=\mu$ より，$\beta(\alpha)\leqslant\forall\beta'\leqslant\mu^+(S^{\beta'}_\alpha=S^{\beta(\alpha)}_\alpha)$ となる $\beta(\alpha)$ が存在する．ところで，$\forall\alpha\in T\cap\lim(D)(\beta(\alpha)<\mu^+<\kappa)$ であるから，$E=\{\alpha\in T\cap\lim(D) : \beta(\alpha)=\beta_0\}$ が κ で停留的である $\beta_0<\mu^+$ が存在する．従って，$\alpha\in E$ に対して $S^{\beta_0}_\alpha=S^{\beta_0+1}_\alpha=S^0_\alpha\cap(\bigcap_{\beta<\beta_0}C_\beta)\cap C_{\beta_0}=S^{\beta_0}_\alpha\cap C_{\beta_0}$ となる．則ち，$S^{\beta_0}_\alpha\subsetneqq C_{\beta_0}$ となり C_{β_0} の定義に反する． □

また定理 **7.1** の証明に戻る.

$\langle S_\alpha : \alpha<\eta^{+4}, cf(\alpha)=\eta^{+1}\rangle$ を $\diamondsuit_{club(\eta^{+3},\eta^+)}$-列とする．今，$\theta$ を十分大きな正則基数とする．(1),(2) の条件を満たすように $H(\theta)$ の初等的鎖 $\langle M_\beta : \beta\leqslant\eta^{+3}\rangle$ をとる.

(1) 任意の $\beta<\eta^{+3}$ に対して $\langle M_\gamma : \gamma\leqslant\beta\rangle\in M_{\beta+1}$ かつ $|M_{\beta+1}|=\eta^{+3}$ となる
(2) $\eta^{+3}\subsetneqq M_0$ かつ，$\{\langle X,\overline{X} : X\subsetneqq\eta^{+4}+1\}$，$\eta^{+4}$ そして $\langle S_\alpha : \alpha<\eta^{+3}, cf(\alpha)=\eta^+\rangle$ は M_0 の元.

明らかに次の 2 つのことが言える．(a) すべての $\beta\leqslant\eta^{+3}$ に対して $\gamma_\beta=M_\beta\cap\eta^{+4}\in\eta^{+4}$ となる．(b) $\{\gamma_\beta : \beta\leqslant\eta^{+3}\}$ は η^{+4} の閉部分集合である.

7.21 注意. (A) 全ての $\beta<\eta^{+3}$ に対して $\langle\gamma_\delta : \delta\leqslant\beta\rangle\in M_{\beta+1}$ となる． (B) $cf(\alpha)=\eta^+$ となる $\alpha,\beta<\eta^{+3}$ に対し，$E^\beta_\alpha=\{\gamma_\delta : \delta\in S_\alpha\cap\beta\}$ とおく．このとき，$cl(E^\beta_\alpha)$ が η^{+4} で有界ならば $cl(E^\beta_\alpha)\subsetneqq\gamma_{\beta+1}$ となる.

$cf(\gamma_{\eta^{+3}})=\eta^{+3}>\omega$ と 7.18 の (4) より $cl(D)\subsetneqq\gamma_{\eta^{+3}}+1$ となる $\gamma_{\eta^{+3}}$ 上の非有界閉集合 D が存在する．ところで，$\langle S_\alpha;\alpha<\eta^{+3}, cf(\alpha)=\eta^+\rangle$ は $\diamondsuit_{club(\eta^{+3},\eta^+)}$-列であるから，$cf(\alpha)=\eta^+$ かつ $S_\alpha\subsetneqq\{\beta<\eta^{+3} : \gamma_\beta\in D\}$ となる $\alpha<\eta^{+3}$ が存在する．S_α は α で非有界閉集合であり $otp(S_\alpha)=\eta^+$ であるから，$S^*_\alpha=\{\gamma_\beta : \beta\in S_\alpha\}$ とおくと，S^*_α は γ_α で非有界閉集合であり $otp(S^*_\alpha)=\eta^+$ となる．7.18 の (3) より，$x\in cl(S^*_\alpha)$ となる $x\geqslant\gamma_\alpha$ が存在する．—(*) 7.18 の (2) より $x\in cl(S^*_\alpha\cap\gamma_\beta)=$

$cl(E_\alpha^\beta)$ となる $\beta < \alpha$ が存在する．よって，$cl(E_\alpha^\beta) \subseteqq cl(S_\alpha^*) \subseteqq cl(D) \subseteqq \gamma_{\eta^{+3}} + 1 < \eta^{+4}$ となる．従って，$cl(E_\alpha^\beta)$ は η^{+4} で有界となる．故に，7.21 注意 の (B) より，$x \in cl(E_\alpha^\beta) \subseteqq \gamma_{\beta+1} < \gamma_\alpha$ となり (*) に反する．□

定理 D. ξ が極限順序数とする．このとき，$2^{|\xi|} < \aleph_\xi$ ならば$\aleph_\xi^{|\xi|} < \aleph_{|\xi|^{+4}}$ が成立する．

証明. 例 6.3 のように示せばよいが，敢えて証明する．$a = [(2^{|\xi|})^+, \aleph_\xi) \cup Regular$ ととる． (場合 A) $2^{|\xi|} < \aleph_{|\xi|} \leqslant \aleph_\xi$ のとき．定理 6.1 より $\aleph_\xi^{|\xi|} = \Pi a = \max(pcf(a)) < \aleph_{|pcf(a)|^+} \leqslant \aleph_{|\xi|^{+4}}$ となる． (場合 B) $\aleph_{|\xi|} < 2^{|\xi|} < \aleph_\xi$ のとき．$2^{|\xi|} = \aleph_\gamma$ とおく．$|a| \leqslant |\xi|$ であるから，$|pcf(a)| \leqslant |\xi|^{+3}$ となる．したがって，$\aleph_\xi^{|\xi|} = \Pi a = \max(pcf(a)) < \aleph_\xi^{+\eta}$ となる順序数 $\eta \sim |pcf(a)|$ が存在する．故に，$\aleph_\xi^{+\eta} = \aleph_{\xi+\eta} < \aleph_{\max(|\xi|^+, |\eta|^+)} \leqslant \aleph_{|\xi|^{+4}}$ となる．□

8. [1] の定理 6.2.4 の証明

定義 8.1. λ, μ を正則基数で $\mu < \lambda$ とする．$< f_\xi : \xi < \lambda > \in {}^\lambda\Pi a$ が μ-連続とは，

$$f_\xi(\nu) = \min\{\sup\{f_\zeta(\nu) : \zeta \in C\} : C\text{は}\xi\text{上非有界閉集合}\}$$

と，$cf(\xi) = \mu$ となる全ての $\xi < \lambda$ と $\nu \in a$ に対して成立する事である．

定義 8.2. $b \subseteq a$ とし，

$$\lambda_b = \begin{cases} \max(pcf(b)) & b \neq \emptyset \\ 0 & b = \emptyset \end{cases}$$

と置く．$\mu \in (|a|, \min(a))_{reg}$ を取る．$\bar{f^b} =< f_\xi^b : \xi < \lambda_b > \in {}^{\lambda_b}\Pi a$ が下記の *(1), (2)* と *(3)* を満たすとき，$\bar{f} =< \bar{f^b} : b \subseteq a >$ を a と μ に対する特殊列という．

(1) $\bar{f^b}$ は $J_{<\lambda_b}(a)$ 上狭義単調増加列;
(2) $\bar{f^b}$ は μ-連続;
(3) $\{f_\xi^b | b : \xi < \lambda_b\}$ は Πb で共終的.

定義 8.3. $\bar{f}$ を a と μ に関する特殊列とし，$\mu \in (|a|, \min(a))_{reg}$ とする．λ_b に関する帰納法で，$F_b = \{f_\xi^b | (b-c) \cup g | c : \xi < \lambda_b$ で $g \in F_c$ そして $\exists\alpha\exists\beta < \lambda_b(\alpha < \beta$ で $c = \{\nu \in b : f_\alpha^b(\nu) \geq f_\beta^b(\nu)\})\}$ と定義する．

$\bar{f^b}$ は $J_{<\lambda_b}(a)$ 上狭義単調増加列なので，$c \in J_{<\lambda_b}(a)$ となり $\lambda_c < \lambda_b$ であるから F_c はすでに定義されている．

Lemma 6.1.4 in [1]. $|F_b| \leq \max(pcf(b))$

定義 8.4. θ を十分大きな正則基数とし $M \prec H(\theta)$ とする．関数 D が $b \subseteq a$ 上 M を特徴づけるとは，*(1),(2)* を満たす事である．

(1) $M \cap \subseteq dom(D)$;
(2) 全ての $\delta \in M \cap b$ に対し，$D(\delta)$ は $M \cap [\min(a), \delta)_{ON}$ で共終部分集合である．

定義 8.5. a を区間とし，θ を十分大きな正則基数とする．$a \subseteq H(\theta)$ とし，μ を無限基数とする．そして $\mathfrak{D}$ を集合とする．$M \prec H(\theta)$ が $\mathfrak{D}$-良モデルとは，$|M| \leq \mu$ で a 上 M を特徴づける関数 $D_M \in \mathfrak{D}$ が存在する事である．

Lemma 6.2.3 in [1]. 定義 *8.5* の条件下で下記が成立する．
$|\{M \cap \sup(a) : M$ は $\mathfrak{D}$-良モデル $\}| \leq |\min(a)|^\mu \cdot |a|^\mu \cdot |\mathfrak{D}|$

注意. $D_M \in \mathfrak{D}$ をとり，

$$g(M \cap \sup(a)) = (M \cap \min(a), M \cap a, D_M)$$

と g を定義すると，g は単射.

Theorem 6.2.4 in [1]. a を $|a| < \min(a)$ となる区間とする．μ を無限基数とし，$\min(a)$ を μ-*strong* とする．この時，

$$\sup(pcf_\mu(a)) = (\sup(a))^\mu$$

となる．

証明. $\kappa = |a|^+, \lambda = \min(a)$ と置く．λ は μ-strong だから $|a| < \min(a) = \lambda$ より，$|[a]^{\leq\mu}| = |a|^\mu < \lambda$ となる．

θ を十分大きな正則基数とし，$\mathfrak{D}$ をうまく作って

全ての $x \in [\sup(a)]^\mu$ に対し，$x \subseteq M \prec H(\theta)$ となる $\mathfrak{D}$-良モデル M が存在するようにする．すると，

$(\sup(a))^\mu = |[\sup(a)]^\mu| \leq 2^\mu \cdot |\{M \cap \sup(a) : M$ は $\mathfrak{D}$-良モデル $\}|$
$\leq |\min(a)|^\mu \cdot |a|^\mu \cdot |\mathfrak{D}| \leq \lambda \cdot |\mathfrak{D}|$ となる．

主張 8.6. $|\mathfrak{D}| \leq \sup(pcf_\mu(a))$ となる $\mathfrak{D}$ を取る．

証明. $\bar{h}$ を a と全ての $\nu \in (|a|, \min(a))_{reg}$ に対する特殊列とし，定義 8.3 より $F = < F_b : b \subseteq a >$ が定義できる．

$$F'_b = \{f \in F_b : \forall \nu \in b(cf(f(\nu)) = \kappa)\}$$

と置き，

$$G = \bigcup\{F'_A : A \in [a]^{\leq\mu}\}$$

とおく．Lemma 6.1.4 より $|G| \leq \sup(pcf_\mu(a))$ となる．

$\alpha \in \lim(\sup(a))$ で $cf(\alpha) = \kappa$ を取る．すると，非有界閉集合 $C_\alpha \subseteq \alpha$ で $otp(C_\alpha) = \kappa$ となる物が取れる．$f \in G$ に対し，

$$\mathfrak{D}_f = \{< D_\nu : \nu \in dom(f) >: \forall \nu \in dom(f)(D_\nu \in [C_{f(\nu)}]^{\leq\omega}\}$$

と置く．そして，

$$\mathfrak{D} = \bigcup\{\mathfrak{D}_f : f \in G\}$$

と置く．ところで，
$|\mathfrak{D}_f| \leq |\{\phi \mid \phi : dom(f) \to [\bigcup\{C_{f(\nu)} : \nu \in dom(f)\}^{\leq\omega}\}| \leq |^\mu([\kappa]^{\leq\omega})| < \lambda$
よって $|\mathfrak{D}| \leq \sup(pcf_\nu(a))$ がいえる． □

以下 $\mathfrak{D}$ が求める性質を持つ事を示す.

$x \in [\sup(a)]^{\mu}$ を固定し, $x \subseteq M \sim \mu$ となる $\mathfrak{D}$-良モデルを作る. この為に (1),(2) を満たす $N \prec H(\theta)$ を作る.

(1) 連続的初等的鎖 $< N_i : i < \kappa >$ が存在して $N = \bigcup_{i<\kappa} N_i$ で
$\forall j < \kappa (< N_i : i < j > \in N)$

(2) $x \cup a \cup [a]^{\leq \mu} \cup \{\bar{h}, a\} \subseteq N_0$ で $\forall i < \kappa (|N_i| = \kappa)$

明らかに, $\chi_N | A \in F_A$ となるから, $\chi_N | A \in F'_A$ となる. そして $\nu \in a$ に対し, $\chi_N(\nu)$ 上の非有界閉集合 $C^*_\nu \subseteq N \cap \nu$ で $otp(C^*_\nu) = \kappa$ が取れる. ここで, $C^*_\nu \subseteq C_{\chi_N(\nu)}$ としても一般性は失われない.

次に, 帰納法で N の初等的部分モデルの列 $< M_n : n < \omega >$ を作る.

M_0 は $x \subseteq M_0 \prec N$ で $|M_0| = \mu$ となるもの.

M_n が定義されたとして M_{n+1} の定義.

$\nu \in M_n \cap [\min(a), \sup(a))$ を取る. $|M_n| = \mu < \kappa = cf(\chi_N(\nu^+))$ より $\chi_{M_n}(\nu^+) < \chi_N(\nu^+)$ となる. よって,

$$\sigma^n_{\nu^+} = \min\{\alpha \in C^*_{\nu^+} : \chi_{M_n}(\nu) < \alpha\}$$

と定義する.

$$\{\sigma^n_{\nu^+} : \nu \in M_n \cap [\min(a), \sup(a))\} \cup M_n \subseteq M_{n+1} \prec N \text{で} |M_{n+1}| = \mu$$

と定義する. 最後に,

$$M = \bigcup_{n<\omega} M_n$$

と置く.

今, $f = \chi_N | (M \cap a)$ とおくと $f \in F'_{M \cap a} \subseteq G$. $\rho \in M \cap a$ に対し, $\rho = \min(a)$ なら $\Sigma_\rho = \emptyset$. $\rho = \nu^+ (\nu \in [\min(a), \sup(a))$ の時, $\nu \in M$ となる. よって, $\nu \in M_{n_\nu}$ となる $n_\nu < \omega$ が存在する. 従って,

$$\Sigma_\rho = \{\sigma^n_\rho : n_\nu \leq n < \omega\}$$

と定義する. 作り方より, $\Sigma_\rho \subseteq C^*_\rho \subseteq C_{f(\rho)}$ となる.

$$\Sigma = < \Sigma_\rho : \rho \in M \cap a >$$

とおくと, $\Sigma \in \mathfrak{D}_f \subseteq \mathfrak{D}$.

Σ が a 上 M を特徴づけていることを示す. つまり, Σ_ρ が $M \cap [\min(a), \rho)$ で非有界であることをいえばよい.

以下その証明. $\rho = \nu^+ \in M \cap a$ で $\gamma \in M \cap \rho$ とする. $\nu \geq \min(a)$ としてよい. よって, $\nu \in M \cap [\min(a), \rho)$ で $\nu < \chi_{M_{n_\nu}}(\nu^+) < \sigma^{n_\nu}_{\nu^+}$ となる. ところで, $\nu \leq \gamma$ としてよい. 従がって, $\gamma \in M_n \cap [\nu, \nu^+)$ となる $n \geq n_\nu$ が存在する. σ^n_ρ の構成方法より, $\gamma < \sigma^n_\rho$ となり, Σ_ρ は求めるものとなる.

9. あとがき

提出した論文は最初の3ページであった. 研究代表者の 宮元　忠敏 先生から, 大学院生が読めるような論文を書くようにとメールを拝受したのは12月23日であり, 〆切りは1月6日となってしまいました. その為8節が前の節とうまくつながっていないように思えます.

3節から7節までは, [8] の半分の翻訳で学部生でも読めるようになっていると思います.7節の $|pcf(a)| \leq |a|^{+3}$ の証明は, $2^{|a|} < \min(a)$ の条件下で示しているが, これは, 定理5.6の条件から出てくる物である. これを, $|a| < \min(a)$ に変えるには [1] の Theorem 5.2.3 か [8] の 7.9 Theorem を読めばよい. 特に [8] の 7.12 Remark はそのことに関して詳しい解説がある.

さて, 8節に付いてであるが, 証明自体は6節のものと同じであるが, 8節の $\mathfrak{D}$ として6節でどのような物を取ればいいかと, 8節の $\bar{h}$ がどのように Theorem 6.2.4 の証明に使われているか?がこの論文から読み取れることが大学院生レベルでないかと思う. 時間があればこの点に付いて書いてみたかった. 話は戻るが, 最初の3ページも, 結果を認めてしまえば十分に読めるはずである. テクニックのない計算から得られる結果を結果と認めない人もいらっしゃいますが, $|\delta|^{cf(\delta)} < \aleph_\delta$ ならば$\aleph_\delta^{cf(\delta)} < \aleph_{|\delta|^{+4}}$ の $|\delta|^{+4}$ を小さくするのは天才がすればいいのであって, $\aleph_\delta^{cf(\delta)} = |\delta|^{cf(\delta)}$ の時, $|\delta|^{cf(\delta)} = 2^{cf(\delta)}$ と同値な条件を見つける事が現在の私の目標になっている. ちなみに, $\aleph$ の固定点が無きとき, $|\delta|^{cf(\delta)} = 2^{cf(\delta)}$ は成立する. 同値な条件を見つける事は, $|\delta|^{+4}$ を小さくするよりよほど簡単な事だと思う. 同値な条件を見つける事は意味がある. なぜなら, $2^{cf(\delta)}$ は正則基数の冪であり, 取り扱いやすい物である. それに比べ, $|\delta|^{cf(\delta)}$ はどんなものか全くよく分からない.

最後に, この論文を読む大学院生がいることを期待しつつ筆を置きます.

References

1. M.Holz, K.Steffens and E.Weitz, *Intoroduction to Cardinal Arithmetic*, Birkäuser Verlag, 1999.
2. M.Mizoguchi, 特異基数の冪の濃度について, Master thesis (Feb. 1994).
3. 難波 完爾, 集合論, 現代数学への入門 3, サイエンス社, 1975.
4. 西村 敏男 と 難波 完爾, 公理的集合論, 共立講座現代の数学 2, 共立出版株式会社, 1985.
5. S.Shelah, *Cardinal Arithmetic*, Oxford Logic Guides 29, 1994.
6. S.Shelah, *e-mail*, 28 Feb. 2002.
7. 田中 尚夫, 公理的集合論, 現代数学 レクチャーズ B-10, 培風館, 1982.
8. M.R.Burke and M.Magidor, *S.Shelah's pcf theory and its applications*, Ann. Pure. Appl. Logic. 50 (1990), 207–254.