数理解析研究所講究録 1305 巻 2003 年 39-50

弾塑性体の離散要素モデルおよび連続体モデルにおける内部応力

鳥取大・工 応用数理　大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)
Dept. Applied Mathematics & Physics, Tottori Univ.

京大・基研*　関本 謙 (Ken SEKIMOTO)
Yukawa Inst. Theor. Phys., Kyoto Univ.

1 はじめに

粉体のような、静止摩擦に支配される系では、静止状態で非自明な応力が残留する。たとえ実質的に 1 つしか自由度がない場合でも、静止摩擦の存在は、静止状態に非常に大きな非一意性をもたらす [1]。粉体のような多自由度の系ではなおさらである。

静止摩擦の連続体力学版として、塑性流動を考える。本講演では、ある種の弾塑性的な多自由度系 [2] を例題として、塑性流動による内部応力の生成を扱うための枠組を提示する。考えるべき問題を、大きく 2 つに分ける:

1. 内部応力は、どのように時間発展するか?
2. 内部応力の存在を、系の状態のスナップショットから示すには、どうしたら良いか?

結晶物質においては、2 番目の問題に対する答えとして、転位論 [3] が既に確立されている。本講演の目標のひとつは、結晶以外の物質に適用できるように、転位論を拡張することである。もう一つの目標は、塑性流動則が与えられたとして、これを用いて 1 番目の問題 (内部応力の時間発展) に答えることである。

まず第 2 章で離散要素モデルを構築し、そこでのフラストレーション (内部応力) の存在を第 3 章で示す。続いて、第 4 章で連続体の方程式を示し、内部応力についての理論を第 5 章で展開する。内部応力の存在は h という量によって示され、その流れを示す $\mathbf{I}$ という量が塑性流動則によって与えられる。第 6 章では内部ひずみを主役として理論を再構築し、第 7 章ではより一般的な問題への展開を検討する。

2 離散的な弾性 Bingham モデル

2.1 形式的定義

力学変数として、M 個のスカラー座標 $\{\zeta\} = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M) \in \mathbf{R}^M$ を用意し、これらを「サイト」に配置する。近接するサイトの間には、「ボンド」であらわされる 2 体相互作用が存在する。サイトおよびボンドは必ずしも規則的に配置されているとは限らない。

一般に、j 番目のサイトの近傍サイトの集合を N_j とする。もし $i \in N_j$ ならば $j \in N_i$ である。運動方程式は

$$m\ddot{\zeta}_j = \sum_{i \in N_j} f_{i \to j} + f_j^{(\mathrm{ex})} \qquad (j = 1, 2, \dots, M) \tag{1a}$$

*2003 年より Strasbourg 大学 (フランス)

と書けて、ここで $f_j^{(\mathrm{ex})}$ は (与えられた) 外力であり、また

$$f_{i\to j} = -f_{j\to i} = -\hat{S}^{-1}\varepsilon_{ij}. \tag{1b}$$

は相互作用をあらわす。変数 ε_{ij} は、次の式により "勾配" $\zeta_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \zeta_j - \zeta_i$ と関係づけられる:

$$\varepsilon_{ij} = \zeta_{ij} - \beta_{ij} = \zeta_j - \zeta_i - \beta_{ij}. \tag{1c}$$

この式に含まれる β_{ij} という変数の時間発展は、Bingham 流体的な「塑性流動則」に従う:

$$-\hat{\eta}\,\dot{\beta}_{ij} = \begin{cases} 0 & \left(|f_{i\to j}| < f_*\right) \\ f_{i\to j} - f_*\,\mathrm{sgn}\, f_{i\to j} & \left(|f_{i\to j}| > f_*\right) \end{cases}. \tag{2}$$

方程式 (1) および (2) が、系の支配方程式である。具体的な問題設定には、さらにボンドの配置および境界条件を指定する必要がある (§3.2 の例を参照)。

2.2 物理的解釈: 割箸モデル

この系は、質量を担う棒状の要素の束と見ることができる [2]。サイトは質量要素 (「割箸」) をあらわし、ボンドは「ゴムひも」を通じた相互作用をあらわす。この「割箸」は、z 軸に平行に置かれた無限に長い剛体棒であり、z 軸にそって摩擦なしに滑ることができるが、それ以外の運動はできないように拘束されている。

この描像で、それぞれの変数は次のように解釈できる:

- $\zeta_j = j$ 番目の「割箸」の z 方向の変位
- $\varepsilon_{ij} = i$ 番目と j 番目の棒を結ぶ「ゴムひも」の傾斜角 (に比例する変数)
- $\partial_t\beta_{ij} =$ 「ゴムひも」の端の滑り

3 離散モデルにおける内部応力

3.1 塑性的発展と非塑性的発展

変数 β_{ij} は、「滑り」の積算量。すなわち塑性流動の履歴を示す。これと $f_{i\to j}$ の関係を見るため、式 (1c) を式 (1b) に代入して得られる式を考えよう:

$$f_{i\to j} = -\hat{S}^{-1}\left(\zeta_{ij} - \beta_{ij}\right), \qquad \zeta_{ij} = \zeta_j - \zeta_i. \tag{3}$$

式 (3) は、自然長 $x^\natural$ のバネの方程式と比較することができる:

$$f = -K\left(x - x^\natural\right). \tag{4}$$

式 (3) と式 (4) の対応は明らかであるが、そこには一つの重要な違いがある。それは、$x^\natural$ は定数であるのに対し、β_{ij} は式 (2) に従って変化し得るということである。ただし、$|f_{i\to j}|$ が降伏値以下にとどまる限り、β_{ij} は $x^\natural$ と同じく定数としてふるまう。

以下、$\{\beta\}$ が時間変化するか否かによって、2 種類の時間発展を区別する:

- 塑性的発展: β が時間変化する
- 非塑性的 (弾性的) 発展: β は一定に保たれる

どちらの発展が実現するかは、式 (2) に応じて決まる。降伏条件を満たすような大きな応力が存在するときには、系の時間発展は塑性的になる。

3.2 フラストレーション

一般に $\{\beta\}$ は、定数ではなく、式 (2) に従って時間発展する定数である。その値は発展の履歴によって決定され、一般にはゼロに等しいとは限らない。

第 1 章で述べたように、問題を 2 つに分ける。第 1 の問題はより困難であるので、後回しにしよう。第 2 の問題に答えるために、我々は、既に $\{\beta\}$ が (おそらく勝手に) 与えられているとし、その条件下で弾性エネルギーを最小化する問題を考える。式で書くと、

$$U = U(\{\beta\}, \{\zeta\}) = \sum \frac{1}{2} \hat{S}^{-1} \left(\beta_{ij} + \zeta_i - \zeta_j\right)^2 \tag{5}$$

の $\{\zeta\}$ に関する最小化である。スピン系で言えば、基底状態を求める問題に相当する。

弾性エネルギー U の最小化は、連立方程式

$$\sum_{i \in N_j} f_{i \to j} = 0 \quad \text{for } {}^\forall j \tag{6}$$

を解くこと、すなわち、方程式 (1a) で $\{\ddot{\zeta}\} = 0$ かつ $\{f^{(\mathrm{ex})}\} = 0$ とした場合の解を求めることと同じである。ここで、$f_{i \to j}$ は 式 (3) で与えられる。以下、我々は、基底状態においても (きわめて特殊な場合を除いて) $\{f_{i \to j}\}$ はゼロにならないことを示す。この意味で、我々は「フラストレーション」という語を用いる。これはスピングラス (特にゲージグラス) の用語にならったものである。

3.2.1 単一の列から成る配置

最も簡単な場合として、M 本の棒が一列に並んだ配置を考えよう。運動方程式は

$$m\ddot{\zeta}_i = f_{i-1 \to i} + f_{i+1 \to i} + f_i^{(\mathrm{ex})} \tag{7}$$

と書けて、両端では $f_{0 \to 1} = f_{m+1 \to m} = 0$ が成り立つ。

基底状態を求めるために $\{\ddot{\zeta}\} = \{f^{(\mathrm{ex})}\} = 0$ と置き。境界条件 $f_{0 \to 1} = 0$ を考慮すると

$$f_{1 \to 2} = f_{2 \to 3} = \cdots = f_{i-1 \to i} = \cdots = 0 \tag{8}$$

となる。すなわち、基底状態では $\{f\}$ はすべてゼロになる。

3.2.2 環状配置

一列の配置の両端をつないだ、環状の配置を考えよう。運動方程式は式 (7) と同じであるが、こんどは式 (8) の代わりに周期的境界条件が適用される。基底状態では

$$f_{1 \to 2} = f_{2 \to 3} = \cdots = f_{i-1 \to i} = \cdots = \text{const.} = F^{(0)}$$

が成り立ち、したがって

$$\sum_{\text{loop}} f_{i \to i+1} = f_{1 \to 2} + f_{2 \to 3} + \cdots + f_{M \to 1} = MF^{(0)}.$$

となる。左辺は、式 (3) を代入し、さらに周期境界条件を考慮することにより、β と関係づけられる。最も単純な $M = 3$ の場合には、

$$\text{LHS} = f_{1 \to 2} + f_{2 \to 3} + f_{3 \to 1} = -\hat{S}^{-1} \sum_{i=1,2,3} (\zeta_{i+1} - \zeta_i - \beta_{i,i+1}) = \hat{S}^{-1} \sum_{\text{loop}} \beta_{i,i+1}$$

となる。一般に $\sum_{\rm loop}\beta_{i,i+1}$ はゼロになるとは限らず、したがって $f^{(0)}\neq 0$ が結論される。

一般に、ボンドの数がサイトの数ひく1よりも大きいときには、基底状態でゼロと異なる $\{f_{i\to j}\}$ が残留する。フラストレーションを特徴づけるのは、(「結合定数」β の和がゼロにならないような) ループの存在である。余分なボンドの数は、独立なループの数に等しく、さらに、それは $N_{\rm loop}=N-M+1$ に等しい。また、ボンド配置が平面グラフとして実現できる場合には、Euler の多面体定理により、$N_{\rm loop}$ は ボンドで囲まれた有界領域の数に等しくなる。

3.2.3 二列から成る配置

多数のループを含む例として、二つの列が並んだ配置 (はしご配列) を考えよう:

$$m\ddot{\zeta}_{(i,1)} = f_{(i-1,1)\to(i,1)} + f_{(i+1,1)\to(i,1)} + f_{(i,2)\to(i,1)} \tag{9a}$$

$$m\ddot{\zeta}_{(i,2)} = f_{(i-1,2)\to(i,2)} + f_{(i+1,2)\to(i,2)} + f_{(i,1)\to(i,2)}. \tag{9b}$$

単純な粗視化は危険である。式 (9a) と式 (9b) を足して 2 で割れば、平均化された方程式が得られるが、これは本質的には式 (7) にほかならない。この方法では、フラストレーションの情報が完全に抜け落ちてしまう。

割箸モデルのフラストレーションをとらえるには、空間的な勾配を利用するのが良い。このことは、式 (9) を加えるのではなく両者の差をとることによってフラストレーションの情報が抽出できることから示唆される。

4 連続体モデル

ボンドの配置の詳細によらない一般的な性質を抽出するため、連続体記述に移行しよう。いったん連続体の構成方程式が得られれば、その後の議論はすべて連続体ベースで展開することができる。

4.1 運動学

離散モデルの座標変数 $\{\zeta_i\}$ を、Lagrange 変数から Euler 変数への写像で置き換える:

$$\mathbf{a}=(X,Y,Z)\ \mapsto\ \mathbf{x}=(x,y,z)=(X,Y,Z+\zeta). \tag{10}$$

ここで ζ は (x,y) および t にのみ依存し、z には依存しない。ラベリング空間 $\{\mathbf{a}\}$ は、自然に、$\{(x,y)\}$ と $\{z\}$ の直和と見なされる (これはファイバー束の最も単純な例である)。

速度場は次の式で与えられる:

$$\mathbf{v}\stackrel{\rm def}{=}\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right)_{\mathbf{a}}=(0,0,w),\qquad w=\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{\mathbf{a}}=\dot{\zeta}. \tag{11}$$

4.2 連続体の運動方程式

応力テンソル $\overleftrightarrow{\tau}$ の代わりに、「応力ベクトル」 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_x,\tau_y)$ を導入しよう。これは、z 方向の運動量の、(x,y) 面内における輸送をあらわすベクトルである。

運動量 (z 成分) の収支釣り合いの式は

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial\tau_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_y}{\partial y}+f^{(\rm ex)}. \tag{12}$$

と書ける。本来、応力はテンソルであり、速度はベクトルであるが、ここでは応力は2次元ベクトルに、速度はスカラーになるので、数学的な扱いは大幅に簡単化される。

4.3 構成方程式

割箸モデル系において、場の変数がゆるやかに変化するという意味で「流体力学」が存在するとしよう。導出の詳細 [2] は省略し、結果のみを示す。

応力ベクトル $\boldsymbol{\tau}$ の支配方程式は

$$S\partial_t \boldsymbol{\tau} + \Phi(\boldsymbol{\tau}) = \mathrm{grad}\, w \tag{13a}$$

となり、ここで $\Phi(\boldsymbol{\tau})$ は

$$\Phi(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{0} & (|\boldsymbol{\tau}| < \tau_*) \\ \eta^{-1}(\boldsymbol{\tau} - \tau_* \mathbf{e}) & (|\boldsymbol{\tau}| > \tau_*) \end{cases} \qquad \left(\text{ただし}\ \ |\boldsymbol{\tau}| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \quad \mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{|\boldsymbol{\tau}|} \right) \tag{13b}$$

で定義される。運動方程式は

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \mathrm{div}\, \boldsymbol{\tau}, \tag{13c}$$

となり、これは式 (12) で $f^{(\mathrm{cx})} = 0$ としたものにほかならない。

5 内部応力の連続体記述

第3章の議論は、離散要素モデルに基づく、一種の転位論であった。これは、最初に述べた第2の問題の答えではあるが、第1の問題に対しては答えになっていない。すなわち、フラストレーションの存在を述べているだけで、その生成や変化については ほとんど何も言っていない。

この章では、我々は、連続体モデルの支配方程式 (13) を出発点として、議論を組み立て直す。内部応力 (すなわちフラストレーション) の存在を示す量として、h という量を定義し、その時間変化を論じることにする。さきほどの第1の問題に対する答として、我々は、h の時間変化を記述する方程式を導く。これは、第3章の離散モデルの転位理論では得られなかった結果である。

5.1 応力渦度

内部応力を局所的にあらわす量として、

$$\mathbf{h} = h\mathbf{e}_z \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\tau}. \tag{14}$$

という量を導入する。これは、離散モデル (第3章) における $-\sum_{\mathrm{loop}} f_{i\to j}$ に対応する。流体力学における渦度との類似により、h を「応力渦度」と呼ぶことにしよう。

もしも時間発展が弾性的 $(\Phi = 0)$ であれば、構成方程式 (13a) から

$$\partial_t \mathbf{h} = \mathbf{0} \tag{15}$$

となる。すなわち、塑性流動が生じない限り、h は時間に関して定数となる[1]。

初期状態 $(t = 0)$ で $h \neq 0$ だったとしよう。その後、いかなる弾性的発展が生じたとしても、h はゼロとは異なる一定値にとどまる。つまり、初期に $h \neq 0$ であれば、弾性発展のみで完全除荷状態 (いたるところで $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$) に到達することはできないことが分かる。

[1]この定数の値は、場所ごとに異なっていてもよい。つまり、弾性的発展において、h は 各点ごとの保存量である。

5.2 整合的な応力

単連結領域 D のなかの至るところで $h = 0$ だとしよう。このことは、

$$\boldsymbol{\tau} = S^{-1}\,\mathrm{grad}\,\zeta_{\mathrm{E}} \tag{16}$$

を満たす ζ_{E} が存在することを意味する。式 (16) の形に書ける $\boldsymbol{\tau}$ を「整合的 (compatible) な応力」と呼び、対応するひずみ $\boldsymbol{\varepsilon} = s\boldsymbol{\tau}$ を「整合的なひずみ」と呼ぶことにしよう。

もし、系が $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ の状態から時間発展を開始し、そのあと弾性的な発展のみをおこなうならば、生じる応力場は、つねに整合的である。すべての応力場が整合的だとは限らない。特に、もし $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ であれば、その応力場は非整合的である。既に示したとおり、非整合的な応力場は、$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ への弾性的発展による到達を許さない。

5.3 応力渦度の時間発展

応力渦度の存在は、非整合的な応力を意味することが分かった。それでは、応力渦度の時間変化は、どのような式に従うのだろうか。

まず、構成方程式 (13a) に rot(·) を作用させる:

$$\partial_t \mathbf{h} = -S^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Phi}. \tag{17}$$

この式の両辺に $\int_d d^2\mathbf{r}$ を作用させ、Stokes の定理を用いると

$$S\frac{d}{dt}\int_D h\,d^2\mathbf{r} = -\oint_C \boldsymbol{\Phi}\cdot d\mathbf{r}. \tag{18}$$

となる。式 (18) の右辺は、境界 $C\ (=\partial D)$ 上の値だけで決まる。このことは、保存則の存在を示唆する。実際、流束 $\mathbf{I}$ を

$$\mathbf{I} \stackrel{\mathrm{def}}{=} S^{-1}\begin{bmatrix} +\Phi_y \\ -\Phi_x \end{bmatrix},$$

で定義することにより、式 (17) は次の形に書き直される:

$$\partial_t h + \mathrm{div}\,\mathbf{I} = 0, \tag{19}$$

これは、応力渦度の保存則にほかならない。この議論は、$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})$ の関数形の詳細には依存しないことに注意しておく。

5.4 転位論との関係

流体力学における渦度と循環の関係との類推により、応力循環 H を次のように定義する:

$$H[C] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \oint_C \boldsymbol{\tau}\cdot d\mathbf{r}. \tag{20}$$

特定の状況では、応力循環 $H\ (\neq 0)$ は、ループに囲まれた「転位」の総量を示すという、Burgers ベクトルの役割を演じる。ただし、格子が存在しないので、ここでいう「転位」は、式 (16) におけるポテンシャル ζ_{E} の多価性を意味するものと解釈する。ここで、Burgers ベクトルと応力渦度との定義における考え方の違いを強調しておく。Burgers ベクトルの定義は結晶構造に密接に関係

しているが、H の背後にあるのは結晶構造ではなく連続的な応力場である。したがって、H の定義は、結晶構造がない物質でも通用する。

式 (16) は、応力渦度がゼロでない場所では適用できない。たとえ ζ_{E} に多価性を認めてもだめである。ただし、式 (16) の拡張として、Clebsch 表示

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \xi_i \nabla \Theta_i$$

が利用できる可能性がある。特に、もしも多価ポテンシャル Θ_i の特異点がすべて陽に求められれば、応力場のトポロジーを調べるうえで有用である。残念ながら、これらの特異点を求めることは必ずしも容易ではないし、(ξ, Θ) の時間発展を書き下すことさえ難しい。

多価ポテンシャルにこだわるよりも、むしろ、式 (19) による h の時間発展の記述に着目しよう。もし $C = \partial D$ とすると

$$H[C] = \int_D h\, d^2\mathbf{r},$$

が成り立ち、また H は「『転位』の総量」に相当する量だから、h は「『転移』の密度」と解釈できる。したがって、$\mathbf{I}$ は、「『転位』の流れ」に相当する。もちろん、h と同じく、$\mathbf{I}$ も結晶構造によらずに定義された量である。以上の議論を一般化して言えば、格子の存在を前提としなくても、内部応力や内部ひずみの存在および発展を論じる枠組が構築できるということになる。

6 内部ひずみ

我々の考えている系では、h は「転位」の密度に対応し、その発展は、式 (19) を通じて、最終的には塑性流動則 $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})$ で定められる。しかし、h と $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau})$ のつながりは、どちらかと言えば間接的である。

我々の枠組を他の問題に応用できるようにする見通しを得るため、$\boldsymbol{\Phi}$ に より密着した量を用いて、話全体を書き直してみよう。言い替えれば。次の関係式を満たすような「内部ひずみ」を考え、この量を主役とした記述を考える:

$$\frac{d}{dt}[\text{内部ひずみ}] = [\text{塑性流動}].$$

我々のモデルでは、右辺は $\boldsymbol{\Phi}$ である。モデルの構築の過程で、我々は既に左辺が $\partial_t \boldsymbol{\beta}$ に等しいことを知っているので。「内部ひずみ」は $\boldsymbol{\beta}$ のことだろうという見当がつく。問題は、連続体の支配方程式 (13) が出発点として与えられたとして、これから $\boldsymbol{\beta}$ を再構築することである。

あとで示すように、$\boldsymbol{\beta}$ を用いた記述には、ゲージ変換の自由度が存在する。このことを利用し、応力渦度とか整合的なひずみとかいった概念を、ゲージ同値性を用いて表現することができる。

6.1 ポテンシャルを用いた支配方程式の書き換え

連続体の支配方程式 (13) から出発する。場の変数は $(\boldsymbol{\tau}, w)$ である。

問題は、$(\boldsymbol{\tau}, w)$ が与えられたとして、これから $\boldsymbol{\beta}$ を再導入することである。そのために、

$$\boldsymbol{\beta} = \operatorname{grad} \zeta - S\boldsymbol{\tau} \tag{21}$$

を、連続体における $\boldsymbol{\beta}$ の「定義」と見なすことにする。右辺には ζ が現れているが、これは w を時間で積分すれば得られる。物理的な描像としては、マーカーを用いた実験を想定すればよい。

さて、(τ, w) の代わりに「ポテンシャル」 (β, ζ) を用いて、支配方程式 (13) を書き直そう。結果は、次の方程式系となる:

$$\partial_t \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\tau}), \tag{22a}$$

$$\left(\nabla^2 - c^2 \partial_t^2\right) \zeta = \operatorname{div} \boldsymbol{\beta}. \tag{22b}$$

このとき、$\boldsymbol{\tau}$ および w は

$$\boldsymbol{\tau} = S^{-1} \left(\operatorname{grad} \zeta - \boldsymbol{\beta}\right) \tag{23}$$

$$w = \partial_t \zeta. \tag{24}$$

で与えられる。式 (22a) から明らかに分かるとおり、β は 系の塑性的発展の履歴をあらわしている。式 (23) は、局所的な弾塑性分解である。

6.2 ゲージ変換と応力渦度

「ポテンシャル」(β, ζ) を用いた記述には、Lagrange 変数のラベル貼り替えに相当する冗長性があり、そのためにゲージ変換が存在する。容易に確認できるとおり、

$$(\zeta, \boldsymbol{\beta}) \to (\zeta', \boldsymbol{\beta}') = (\zeta + \phi,\ \boldsymbol{\beta} + \operatorname{grad} \phi), \tag{25}$$

に対して、方程式系 (22) は不変である。ただし、$\phi = \phi(x, y)$ である (t には依存しない)。

ゲージ変換に関連して、ゲージ同値性を

$$\boldsymbol{\beta}_1 \overset{\mathrm{G}}{\sim} \boldsymbol{\beta}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_1 + \operatorname{grad} \zeta_{12} \quad \text{for } {}^{\exists}\zeta_{12}. \tag{26}$$

で定義する。式 (23) から、$S\boldsymbol{\tau} \overset{\mathrm{G}}{\sim} -\boldsymbol{\beta}$ となることが分かる。必ずしも $\boldsymbol{\beta} \overset{\mathrm{G}}{\sim} \mathbf{0}$ とは限らない。式 (16) で定められる整合的なひずみの場合に限って

$$\boldsymbol{\beta} \overset{\mathrm{G}}{\sim} \mathbf{0}. \tag{27}$$

が成り立つ。逆に言えば、式 (27) が整合性の条件にほかならない。

内部ひずみは、β そのものではなく、$\overset{\mathrm{G}}{\sim}$ に関する同値類だと見るべきである。ゲージ同値性のための条件は

$$\beta_1 \overset{\mathrm{G}}{\sim} \beta_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}_1 = \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}_2, \tag{28}$$

となり、ここで $\mathbf{h} = -S^{-1} \operatorname{rot} \beta$ を考慮すると、$h_1(x, y) = h_2(x, y)$ がゲージ同値性の条件にほかならないことが分かる。こうして、$\mathbf{h}$ は β の各同値類を示す量であるという結論を得る。

7 一般化に向けて

7.1 他の塑性流動則への拡張

応力渦度の輸送をあらわす式 (19) は、関数 Φ の形によらず成立する。たまたま今のモデルでは、Φ として式 (13b) のような Bingham 塑性を仮定しているが、これを他の塑性流動則におきかえて理論を拡張することは可能である。たとえば、Φ の微係数は降伏値以下では突然ゼロになるが、これを変更して徐々にゼロに漸近するようにすれば、内部応力の非常に遅い解放が生じるようになるだろう。もしもペーストの加齢現象 [4] が巨視的な塑性法則に由来する現象だとすれば、このようなアプローチには一定の有効性が期待できる。

7.2 Eshelby の不整合テンソル

Eshelby[5] は、3 次元の弾性体における内部応力について考察した。この理論では、3 次元弾性体の内部ひずみは、不整合テンソル $\mathcal{S}_{\mu\nu}$ によって記述される。Eshelby の不整合テンソルは、応力場の 2 階微分から成る。これは、3 次元の応力場の幾何学と「割箸モデル」との大きな違いである。後者の場合、不整合テンソルに相当する役割を担うのは応力渦度 h であり、これは応力の 2 階微分ではなく 1 階微分だからである、

もうひとつの重要な違いは、Eshelby の理論には時間発展が含まれていないことである。大雑把に言えば、我々の理論の h に相当するものの理論であって、I に相当するものは見出されていない。この意味では、まだ研究の余地があるように思われる。

Eshelby の理論を簡単に説明しよう。まず、Lagrange 変数から Euler 変数への写像を

$$\mathbf{a} = (X, Y, Z) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{a} + \tilde{\mathbf{u}} \tag{29}$$

と書く。単純化のため、変位 $\tilde{u}$ は微小であるとし、2 次の項を無視する (有限のひずみへの一般化は容易である)。整合的なひずみ $\overleftrightarrow{e} = \overleftrightarrow{e}^{(c)}$ を、$\tilde{u}$ の導関数で次の形に書けるものと定義する:

$$2\overleftrightarrow{e} = 2\overleftrightarrow{e}^{(c)} = \sum_{\kappa} \frac{\partial x_\kappa}{\partial \mathbf{a}} \otimes \frac{\partial x_\kappa}{\partial \mathbf{a}} - \mathbb{1} = 2\,\mathrm{sym}\,\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{a}} \qquad \text{すなわち} \qquad 2e_{\mu\nu}{}^{(c)} = \partial_\mu \tilde{u}_\nu + \partial_\nu \tilde{u}_\mu \tag{30}$$

式 (30) は、内部ひずみがない場合に成り立つ式である。

さて、逆の問題を考えよう: 先に $\overleftrightarrow{\tau}$ が与えられたとして、対応する変位 $\tilde{u}$ を決定できるだろうか? ひずみの決定だけなら、Hooke の法則を使えば何の困難もない:

$$2e_{\mu\nu} = S\tau_{\mu\nu} + S'\tau_{\kappa\kappa}\delta_{\mu\nu}. \tag{31}$$

問題は、式 (30) に $\overleftrightarrow{e}^{(c)} = \overleftrightarrow{e}$ を代入した式が、$\tilde{u}$ に関して可解かどうかである。Eshelby によると、可解条件は $\overleftrightarrow{\mathcal{S}} = 0$ で与えられ、ここで $\overleftrightarrow{\mathcal{S}}$ は

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\mu\kappa\lambda}\varepsilon_{\nu\rho\sigma}\partial_\kappa\partial_\rho e_{\lambda\sigma}; \tag{32}$$

で定められる「(Eshelby の) 不整合テンソル」である。もし $\mathcal{S} \neq 0$ なら、$e_{\mu\nu}$ は $\tilde{u}$ に還元できないような内部ひずみを含んでいる。

不整合テンソル $\mathcal{S}$ は、ひずみの不整合成分 (すなわち内部ひずみ) のソース項であることが分かっている。与えられた $\mathcal{S}$ に対し、ひずみテンソル $\overleftrightarrow{e}$ は 次のように決まる:

$$e_{\mu\nu} = e^{(c)}_{\mu\nu} + \int \mathcal{S}_{\kappa\lambda}(\mathbf{r}')\,\mathcal{G}_{\kappa\lambda\mu\nu}(\mathbf{r}', \mathbf{r})\,d^3\mathbf{r}'\,, \tag{33a}$$

$$\mathcal{G}_{\kappa\lambda\mu\nu}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\delta_{\kappa\mu}\delta_{\lambda\nu} - \delta_{\kappa\lambda}\delta_{\mu\nu}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \tag{33b}$$

ここで $\overleftrightarrow{e}^{(c)}$ は式 (30) で与えられる整合ひずみである。Green 関数 $\mathcal{G}_{\kappa\lambda\mu\nu}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ は、単一の線欠陥によって作られるひずみであると解釈できる。

7.3 不整合テンソルと応力渦度の対応

さて、Eshelby の理論と我々の理論の対応をつけよう。最初に、ふたつの運動学的な式、すなわち我々の式 (10) と 3 次元の式 (29) が対応する。式 (10) は、式 (29) に

$$\tilde{\mathbf{u}} = (0, 0, \zeta), \qquad \zeta = \zeta(X, Y). \tag{34}$$

という制限を課したものである。この制約は、かなり大きな違いをもたらす。Eshelby の理論では 2 階微分が必要なのに、我々の系では 1 階微分だけで話が済んでしまう。

Hooke の法則で定まるひずみを $\varepsilon = S\tau$ としよう。整合的なひずみは、$\varepsilon^{(c)} = \mathrm{grad}\,\zeta$ という式で与えられる。内部ひずみがない場合は、$\varepsilon = \varepsilon^{(c)}$ とすることができる (ただし ζ の原点を調整する必要があるかもしれないが)。内部ひずみがある場合は、ε を $\varepsilon^{(c)}$ と等しくすることはできない。

与えられた τ に対し、Hooke の法則を用いて、対応するひずみ ε を決めることは常に可能である。問題は、式 (30) が ζ に関して可解かどうか、すなわち式 (16) を満たす ζ_{E} が存在するか否かである。第 5 章で説明したように、可解条件は $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ で与えられる。

応力渦度 h は、ひずみの不整合な部分に対するソース項となる:

$$\varepsilon = S\tau \overset{\mathrm{G}}{\sim} -\beta = \int h(\mathbf{r}')\,\mathcal{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\,d^2\mathbf{r}'. \tag{35}$$

Green 関数 $\mathcal{G}(\mathbf{r}',\mathbf{r})$ は、螺旋転位のまわりのひずみ場を記述する。式 (35) は、Eshelby の理論における式 (33) に対応する。

さて、$\mathbf{h}$ と $\mathcal{S}$ の具体的な関係を見るために、関係式 (34) を用いて $\mathcal{S}$ を計算してみよう。長いけれども単純な計算によって。$\overleftrightarrow{S} = 0$ は

$$\partial_x\left(\partial_x\tau_y - \partial_y\tau_x\right) = \partial_y\left(\partial_x\tau_y - \partial_y\tau_x\right) = 0. \tag{36}$$

と同値であることが分かる。応力渦度 $\mathbf{h}$ が恒等的にゼロになる場合には、式 (36) は確かに満たされる。

ただし、$\mathbf{h}$ が ゼロでない定数になる場合については、特別に注目する価値がある。その場合、$\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ であるにもかかわらず式 (36) が成立し、したがって $\overleftrightarrow{S}$ はゼロとなる。そのような事態が生じるのは、ひずみが

$$2\overleftrightarrow{e} = S\overleftrightarrow{\tau} = \frac{Sh}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & +x \\ -y & +x & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

となる場合である。実際、このひずみは、式 (30) に次のような変位を代入すれば得られる:

$$\tilde{\mathbf{u}} = (-hyz,\ +hxz,\ 0). \tag{38}$$

これは z 軸まわりのねじりを示す変形である。しかし、割箸モデルの制限のもとでは、このようなねじりを伴う変形は禁止されているので、式 (37) によって与えられる変形は、内部ひずみをもつ状態と解釈される。したがって、$\overleftrightarrow{S} = 0$ と $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ というふたつの基準のあいだには、何の矛盾もないことが分かる。

7.4 内部ひずみの微分幾何

既に考察したように、$\beta \neq 0$ が直ちに内部ひずみの存在を意味するわけではない。内部ひずみを決めるのは、β ではなく $\mathrm{rot}\,\beta\,(= -S\mathrm{h})$ である。この状況は、微分幾何学を用いて定式化できる。ここで、$\mathrm{rot}\,\beta$ は β の 1 階微分なので、2 つの観点が可能である。ひとつは、β を計量とみなし、$\mathrm{rot}\,\beta$ を接続と見なす見方で、もう一つは、β を接続 $\mathrm{rot}\,\beta$ を曲率と見なす見方である。

Eshelby の理論 [5] の観点からすれば、β は、自然計量 $g^{\cdot}_{ij}$ の特別な場合である。Lagrange 座標のメッシュによって定義される、小さいサイコロ状の要素を考えよう。メッシュの刻幅を Δa^1, Δa^2, Δa^3 とする[2]。このような小片を孤立させる (局所除荷する) と、それは自分の「自然な」形

[2]微分幾何学の慣例に従い、上付き添字を用いた

をとるだろう。メッシュ幅 Δa^μ が小さい極限で、この「自然な形」は、微小な平行 6 面体となる。この平行 6 面体の形は、3 つの辺をあらわすベクトルの、Euclid 空間での内積によって定められる:

$$g^\natural_{\mu\nu}\Delta a^\mu \Delta a^\nu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\partial_\mu \mathbf{x}^\natural\right)\Delta a^\mu \cdot \left(\partial_\nu \mathbf{x}^\natural\right)\Delta a^\nu. \tag{39}$$

この $g^\natural_{\mu\nu}$ は、弾性体の Riemann 幾何学 [5, 6] を定める計量で、ここではこれを自然計量と呼ぶことにする。弧長 $\Delta s^\natural$ は、式 (39) の左辺の平方根によって与えられ、$\mathbf{a}$ および $\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}$ に対応する 2 つの点の「自然な距離」を定める。

なお、$\partial_\mu \mathbf{x}^\natural$ はサイコロごとに別々に定められるということを強調しておく。有限の領域で $\mathbf{x}^\natural$ が整合的に定義されることは、一般には期待できない。大域的な $g^\natural_{\mu\nu}$ の整合性 (すなわち有限領域における $\mathbf{x}^\natural$ の存在) を調べるには、多数の小さなサイコロを個別に除荷し、これらを並べてみればよい。無限小のサイコロを集めて小さいけれども有限のサイコロ (もどき) を作り、小さなサイコロをさらに互いにつなげていく。この過程で、サイコロの形は、寸法 Δa^μ に比例して平行 6 面体からずれてくる。このずれは、g の 1 階微分のある組み合わせで示すことができる:

$$\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} g^\natural_{\kappa\lambda} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g^\natural_{\nu\lambda} + \partial_\nu g^\natural_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g^\natural_{\mu\nu}\right). \tag{40}$$

式 (40) の 係数 $\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}$ は、Levi-Civita 接続 [7, §7] として知られている。接続係数がゼロとならない場合、個々の「サイコロ」は曲がった形をもつことになる、これは、必ずしも内部ひずみのために起きるとは限らず、Lagrange 変数の設定によって生じることもある。後者の場合は、曲がったサイコロ同志を整合的に並べることができるが、前者の場合は不整合性が現れる。この不整合性を示すのが、Riemann 曲率 [8, p.80]

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}\partial_\kappa = \left(\nabla_\mu\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\mu\right)\partial_\lambda; \tag{41}$$

である。ここで ∇_μ は共変微分で、$\Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}$ を用いて次の式で定義される;

$$\nabla_\mu\left(V^\kappa\partial_\kappa\right) = \left(\partial_\nu V^\kappa\right)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu}V^\nu\partial_\kappa \quad \text{for } {}^\forall V^\kappa\partial_\kappa.$$

3 次元の場合、$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$ の独立な成分は 6 つで、それらはあたかも 2 階の対称テンソルであるかのようにふるまう。ここで $g^\natural_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + 2\overleftrightarrow{e}$ と置いて、Eshelby の公式 (32) を得る。

我々の理論に現れる $\boldsymbol{\beta}$ を 自然計量 $g^\natural_{\mu\nu}$ と関係づけるため、Lagrangian 空間の 2 点

$$\mathbf{a} = (X, Y, Z), \qquad \mathbf{a}+\Delta\mathbf{a} = (X+\Delta X,\ Y+\Delta Y,\ Z+\Delta Z)$$

のあいだの「自然距離」を計算しよう。実空間 (Euler 変数) での相対ベクトルは

$$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z) = (\Delta X,\ \Delta Y,\ \Delta Z + \Delta\zeta)$$

である、局所除荷された (すなわち「自然な」) 状態においては、$\zeta = \zeta^\natural$ で、かつ

$$\operatorname{grad}\zeta^\natural = \boldsymbol{\beta} + O(\ell) \qquad (\text{ここで } \ell = \text{小片の寸法})$$

が成立するから、これから

$$\Delta z^\natural = \Delta Z + \Delta\zeta^\natural = \Delta Z + \boldsymbol{\beta}\cdot\Delta\mathbf{r} \qquad \left(\text{ただし } \Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y)\right) \tag{42}$$

を得る。ここで $|\boldsymbol{\beta}|$ は小さいと仮定し、「自然距離」を計算すると

$$\left(\Delta s^\natural\right)^2 = \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right)\Big|_{\Delta\mathbf{x}=\Delta\mathbf{x}^\natural} = g^\natural_{\mu\nu}\Delta a^\mu \Delta a^\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta_x \\ 0 & 1 & \beta_y \\ \beta_x & \beta_y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \tag{43}$$

となる。計量 (43) に対する Levi-Civita 接続を計算すると[3]、$\Gamma^{\kappa}{}_{3\lambda}$ には応力渦度が現れる:

$$\Gamma^2{}_{31} = -\Gamma^1{}_{32} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\beta} \propto h. \tag{44}$$

一般には、内部ひずみの存在を決めるのは接続ではなく Riemann 曲率である (なぜなら、「曲がったサイコロ」であっても整合的に並べられる可能性があるから)。けれども、我々が考えている系では、$\tilde{u} = (0, 0, \zeta)$ という制約があるので、「サイコロ」が z 軸に対して曲がることは許されない。したがって、 $\Gamma^2{}_{31} \neq 0$ が判明した時点で内部ひずみの存在が決まることになる。

上記の議論では、$\boldsymbol{\beta}$ を曲率と見なしているが、これとは別に、h を曲率と見なし $\boldsymbol{\beta}$ を接続と見なす定式化が可能である。固定された $\boldsymbol{\beta}$ に対し、式 (23) は ζ の勾配を用いて $\boldsymbol{\tau}$ を定めている。ここで、勝手な定数 K を用いて、式 (23) を形式的に

$$S\boldsymbol{\tau} = e^{-K\zeta}K^{-1}\tilde{\nabla}e^{K\zeta}, \qquad \tilde{\nabla} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{grad} - K\boldsymbol{\beta} \tag{45}$$

のように書き直すことができる。これから、「曲率」を $\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y - \tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X$ で定義する。 計算してみると、これは応力渦度にほかならない。なお、K を純虚数とした場合、この定式化は、電磁気学のゲージ理論に非常に似た形になる。

内部ひずみが 1 階微分だけで書けるのは、我々が考えている系の著しい性質である。これは、一見、特定の系の特殊事情に見える。しかし、我々の問題はスピングラスという非常に重要な系とつながっている。実際、式 (5) の弾性エネルギー U は、ゲージグラスのスピン波近似とほとんど同じである。違いは、ゲージグラスでは $\{\beta_{ij}\}$ はランダムに固定されているのに対し、我々の系では $\{\beta_{ij}\}$ もまた動的な変数であって、塑性流動則に従って発展するという点にある。塑性体とスピングラスに共通する性質を考えるうえで、この割箸モデルが役立つ部分は少なくないと思われる。

参考文献

[1] J. Duran. 粉粒体の物理学. 吉岡書店, 2002. 中西 秀, 奥村 剛 訳.

[2] OOSHIDA Takeshi & K. Sekimoto. 弾塑性体の剪断変形に伴う残留応力のミニマルモデル. 研究集会「流体現象と非線形現象論」, No. 13ME-S6 in Reports of RIAM Symposium, pp. 13–29. 九州大学応用力学研究所, 2002.

[3] L. Landau & Y. Lifshits. 弾性理論. 東京図書, 増補新版, 1989. 佐藤 常三, 石橋 善弘 訳.

[4] D. A. Weitz. Memories of paste. Nature, Vol. 410, pp. 32–33, 2001.

[5] J. S. Eshelby. The continuum theory of lattice defects. In D. T. Frederick Seitz, editor, Solid State Physics, Vol. 3, p. 79. Academic Press Inc., New York, 1956.

[6] C. Eckart. Phys. Rev., Vol. 73, p. 373, 1948.

[7] M. Nakahara. Geometry, Topology, And Physics. Institute of Physics Publishing, 1990.

[8] J. E. Marsden & T. J. Hughes. Mathematical Foundations of Elasticity. Dover Publications, 1994. publised originally by Prentice-Hall, 1983.

[3]ただし、o^2 程度の付加項は無視する。