

非弾性 Maxwell model の流体力学とその安定性

京都大学大学院人間・環境学研究科 早川尚男¹

1 はじめに

統計力学において気体力学が最も基本的であり重要な役割を果たしたことは論に待たないであろう。ここで粉体気体をより緻密に議論することは粉体の数理的側面を知る上で重要になってくる。また引力相互作用がないために固化していない相は全て気相とみることも可能なのでその意味でも気体分子運動論が重要になる。

さて散逸のない分子気体において重要なのは H 定理の存在とその緩和先である Maxwell-Boltzmann 分布であった。H 定理は単なる安定性の枠を越えて平衡分布に絶対的に緩和するという非常に強い制約を与えている。このような性質は非弾性粒子系ではどうなるのであろうか。

散逸を導入したことで分布関数に大きな変化が見られることは明らかである。例えば速度の大きな (高エネルギーの) 粒子の従う分布は散逸の影響で大きく影響を受ける筈である。特にべき分布のテールを持つようなことがあればその特異性故に高次のモーメントが発散し、統計的性質も平衡のそれとは根本的に異なる筈である。実際粉体系でも Taguchi and Takayasu[1], Ichiki and Hayakawa[2], Brey *et al.*[3] などが巾のテールを報告している。しかし Brey 等はモデルに不備があるとしてこの巾は人工的として後になって自ら自己の結果を否定し、多くの実験、シミュレーション、理論は指数関数的なテールを方向している [4] のでおそらく Taguchi and Takayasu[1] の結果は数値的な誤差のもたらしたものであろう。唯一我々の結果は流体が介在しているという意味で単純な粉体系とは異なり巾分布の実在性に希望を持たしている。

ところがごく最近になって非弾性 Maxwell model という一種の可解モデルが巾のテールを持つことが示された。[5, 6, 7, 8, 9] このことはいくつかの意味で興味深い。例えば巾分布を持つ統計力学、そして流体力学はどのようなものになるか。あるいは後述のようにいろいろ不整合がある粉体気体の理論解析が整合したものになるのではという期待も抱かせる。その結果粉体気体のもつ性質のみならず非弾性系の定常状態の統計力学が明らかになる可能性がある。

2 Model

ここではハードコア系の非弾性 Boltzmann 方程式を紹介し、ついでその問題点をまとめて、最後に非弾性 Maxwell model を紹介しよう。

滑らかな球に対する Inelastic Boltzmann equation は

$$\partial_t f + \mathbf{c} \cdot \nabla f = d^2 \int d\mathbf{c}_1 \int_{\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} < 0} d\mathbf{n} |\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}| \left(\frac{f_1^* f^*}{e^2} - f_1 f \right) \quad (1)$$

で与えられる。ここで

$$\mathbf{g} = \mathbf{c} - \mathbf{c}_1, \quad \mathbf{n} \text{ unit normal from } 1 \quad (2)$$

¹ Hisao HAYAKAWA: Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University, Kyoto 606-8501, JAPAN; E-mail: hisao@yuragi.jinkan.kyoto-u.ac.jp

は衝突の際の相対速度であり、非弾性粒子は衝突ルール

$$(\mathbf{g}' \cdot \mathbf{n}) = -e(\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}) \quad (3)$$

に従うとしよう。簡単のためはねかえり係数 e は定数として接線方向の衝突でエネルギーロスはないものとする。

このモデルの理論解析はその複雑さ故にあまり進んでいない。Boltzmann 方程式でも複雑なのにさらに非弾性を導入したらその困難さは想像がつく。その中で Jenkins and Richman[10] が系統的な解析として知られていたが、その論理的不整合性が Sela and Goldhrisch[11] によって指摘されるようになった。その一方で Sela and Goldhrisch[11] の解析は e を 1 のまわりで展開すると同時に空間揺らぎの効果も同時に摂動論的に扱ったので系統的ではあるが過度に複雑で弾性極限近傍しか議論できないので実用に耐えない。その中で一番実際のでそこそこ論理的なのは Brey *et al.*[12] であり、その結果もシミュレーションと合ってもっともらしい。しかし一様状態の基準解が摂動論的にしか求まらないので場合によって Maxwell 分布を用い、場合によっては摂動解を用いているのがその場しのぎの印象を与えると同時に空間揺らぎを摂動で扱った場合に摂動解を基準解にして計算すると 2 重の意味で摂動を行っており計算の意味が不明確になる、といった欠点が見られる。これらは衝突積分中の相対速度 $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n}$ の効果がある故の複雑さに起因すると言えよう。そこでモデルを

$$\partial_t f + \mathbf{c} \cdot \nabla f = \chi d^2 \sqrt{\frac{T_0}{m}} \int d\mathbf{c}_1 \int d\mathbf{n} \left(\frac{f^*_1 f^*}{e} - f_1 f \right) \quad (4)$$

に置き換えてみよう。 $e = 1$ の場合にはこのモデルは衝突粒子が相対距離 r に対して r^{-4} の斥力相互作用をするモデルになっており Maxwell が導入したことで知られている由緒正しいモデルである。非弾性バージョンのこのモデルは比較的最近に導入された。[5]

3 一様冷却状態のスケーリング解と巾のテール

既に述べたように (4) 式のモデルは巾のテールを持つ。[6, 8] このことを簡単にデモンストレーションしてみよう。そのために 1 次元のモデルを考える。 f の速度空間の Fourier 変換が

$$\hat{f}(k, t) = \phi(v_0(t)k), \quad v_0(t) \text{ thermal velocity} \quad (5)$$

となると仮定しよう。 $\phi(x)$ は

$$-\gamma k \frac{d\phi}{dk} + \phi = \phi(pk)\phi((1-p)k) \quad (6)$$

に従うので $k = 0$ 近傍で

$$\phi(k) = 1 - \frac{k^2}{2} + A|k|^a + \dots \quad (7)$$

となる。その結果指数が

$$a = \frac{1 - p^a - (1-p)^a}{p(1-p)} \Rightarrow a = 3, \quad (8)$$

となり偶巾で展開できない。このことは速度空間で c^{-4} に従うことを意味する。ここでの結果は高次元でも本質的に同等である。違いは case. Differences appear in

- a を決めるために数値計算が必要になること。

- a が e に依存すること.
- a が $e \rightarrow 1$ で発散すること.

等である.

高次元の場合を陽に書くと v^2 のフーリエ変換 ($q = k^2/4$) を

$$\tilde{f}(q, t) = \Phi(e_0(t)q), \quad e_0(t) = v_0^2(t) \quad (9)$$

とすると $\Phi(x)$ は

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{[a]} \frac{\mu_n}{n!} - Ax^a \quad (10)$$

と展開できる. ここでモーメント μ_n は

$$\mu_n = \langle c^{2n} \rangle / (d/2)_n : \quad (d/2)_n = \frac{\Gamma(d/2 + n)}{\Gamma(d/2)}. \quad (11)$$

であり有限であれば解析的に計算できる. 但し $n < [a]$ のときは有限だが $n > a$ ではモーメントは発散する.

4 流体中粒子の定常状態

流体中で粒子は流体からの抵抗力を受ける. その場合 Boltzmann equation は

$$\partial_t f + (\mathbf{c} \cdot \nabla) f = L_{FP} f + J(f, f) \quad (12)$$

に変更される. ここで $Q(f, f)$ は Boltzmann's collisional integral であり $L_{FP} f$ は

$$L_{FP} f = \gamma \nabla_{\mathbf{v}} \cdot [(\mathbf{v} - \mathbf{u})f + T_B/m \nabla_{\mathbf{v}} f]. \quad (13)$$

である. 言うまでもないが第1項は流体との相対速度に比例する drag であり第2項は Brown 運動の効果である. ここで $T_B = 0$ とするといわゆる Gaussian thermostat の系となり、その定常状態は一様冷却状態のスケーリング解と等価であることが知られている.[13]

$T_B \ll T$ としよう. 1次元の場合の結果は図に示すように指数 a が変化する. このように流体中で巾分布をとるという Ichiki and Hayakawa[2] の解析は根拠のあるものだった訳である.

5 Hydrodynamics of inelastic Maxwell model

さていよいよ Chapman-Enskog (CE) 法に基づき流体力学方程式を導出してみよう. 詳細は原論文 [14] に譲るとして概略を掴んで貰えればいい. 方法論自体は Brey *et al.*[12] に平行であるが前節で見たように一様解がはっきり分かっているだけにより系統的な計算が可能になる.

ここで拘束条件は

$$\int d\mathbf{c} \begin{pmatrix} 1 \\ m\mathbf{c} \\ \frac{1}{2}m\mathbf{c}^2 \end{pmatrix} J(f, f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1 - e^2)\omega[f, f] \end{pmatrix} \quad (14)$$

である. 但し

$$\omega(f, f) = \frac{\pi\chi\sqrt{mT_0}\sigma^2}{6} \int d\mathbf{v}_1 \int d\mathbf{v}_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) \quad (15)$$

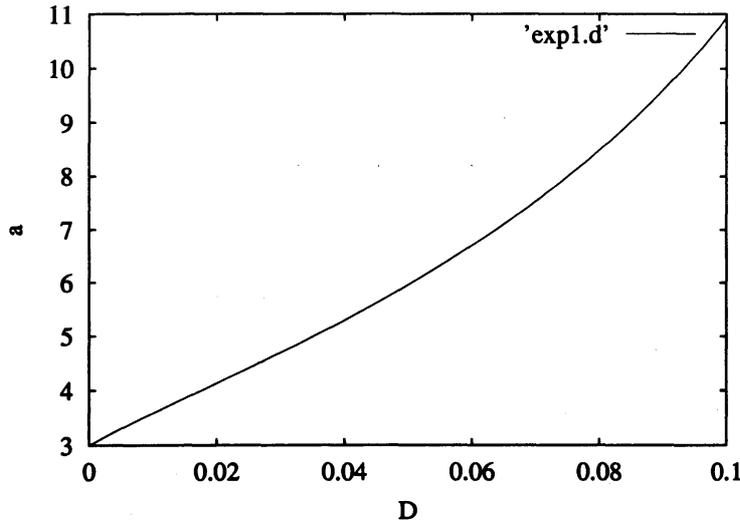


図 1: The exponent of a for 1D granular particles in fluids as a function of $D = T_m/m$.

である。

粉体流体は一般に質量保存

$$D_t n + n \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (16)$$

運動量保存

$$D_t u_i + (mn)^{-1} \nabla_j P_{ij} = 0. \quad (17)$$

に従う。またエネルギーも同様に流体変数とみて

$$D_t T + \frac{2}{3n} (P_{ij} \nabla_j u_i + \nabla \cdot \mathbf{q}) + T \zeta = 0. \quad (18)$$

も導出できる。ここで $\zeta[f] = (1 - e^2) \frac{2}{3nT} \omega[f, f]$ でありストレステンソルは

$$P_{ij} = nT \delta_{ij} + m \int d\mathbf{c} (v_i v_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) f \quad (19)$$

である。また \mathbf{v} は速度揺らぎであり

$$\mathbf{q} = \left(\frac{m}{2} v^2 - \frac{5}{2} T \right) \mathbf{v} \quad (20)$$

は熱流である。

Maxwell model の Chapman-Enskog method は通常の場合とあまり変わらない。分布関数を空間微分で展開する。

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad (21)$$

ここで $f^{(0)}$ は一様解である。

一次摂動から一般に

$$P_{ij}^{(1)} = -\eta (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (22)$$

$$\mathbf{q}^{(1)} = -\kappa \nabla T - \mu \nabla n. \quad (23)$$

となり、輸送係数 η , μ and κ が導入できる。これらの輸送係数は CE 法で計算できる。その結果のみを記すと

$$\zeta^* \equiv \frac{\zeta}{\nu_0} = (1 - e^2) \frac{5}{6} \quad (24)$$

および

$$\eta^* \equiv \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{4}{(1 + e)^2} \quad (25)$$

である。ここで $\nu_0 = 3A_m n \sigma^2 \sqrt{T_0/m}$ および $\eta_0 = \sqrt{2m/T_0} T / (3A_m \sigma^2)$ である。また η^* は $e = 1/4$ で発散することに注意されたい。

同様に κ と μ も解析的に計算できるがやや複雑であるので図に結果を示すだけにしよう。ここで μ^* は μ_2 を含み、 μ_2 は $e = 0.145123$ で発散するのでそれ以下の e での値は無意味であると思われる。

6 Hydrodynamics of inelastic Maxwell model

これまでの流体力学の議論をさらに進めて一様状態の線形安定性を議論することも可能である。その目的のためには ζ の 2 次補正 (1 次補正は消える) の

$$\zeta^{(2)} = \zeta_1 \nabla^2 T + \zeta_2 \nabla^2 n \quad (26)$$

を計算する必要があるが前節と同様に計算可能である。尚、 ζ_1 と ζ_2 はそれぞれ $e = 0.721667$ と 0.783145 で発散する。

線形安定性を特徴づける固有値のうちずりモードは

$$s_{\perp}(k) = \zeta^* - \frac{\eta^*}{2} k^2 \quad (27)$$

に従い他の 3 つのモードは

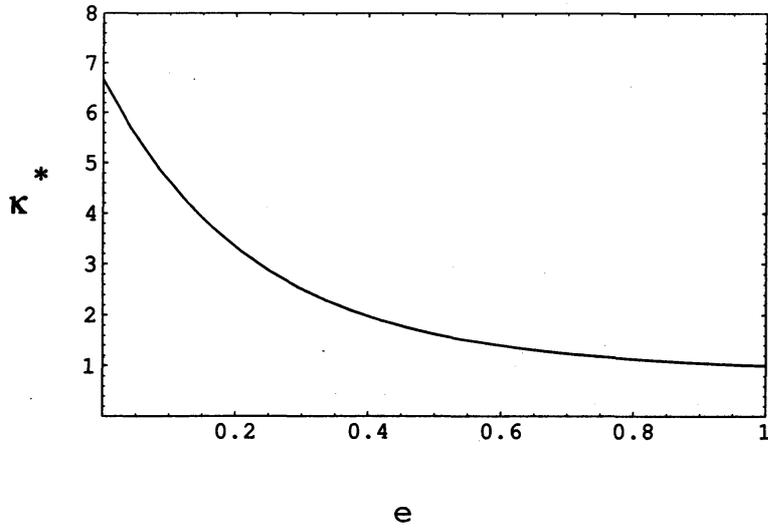
$$\begin{aligned} s^3 &+ \left[\frac{2}{3} \eta^* k^2 - \zeta^* + \frac{5}{4} k^2 (\kappa^* - \zeta_1^*) \right] s^2 \\ &+ \frac{5}{12} k^2 [4 + (2\eta^* k^2 - 3\zeta^*) (\kappa^* - \zeta_1^*)] s \\ &- k^2 [2\zeta^* - \frac{5}{4} (\kappa^* - \mu^* - \zeta_1^* + \zeta_2^*)] = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

の解となる。 $e = 0.9$ の場合の分散関係は図に示す通りであり、ずりモードが最安定という訳でもなくハードコア系と違う特徴をもっている。

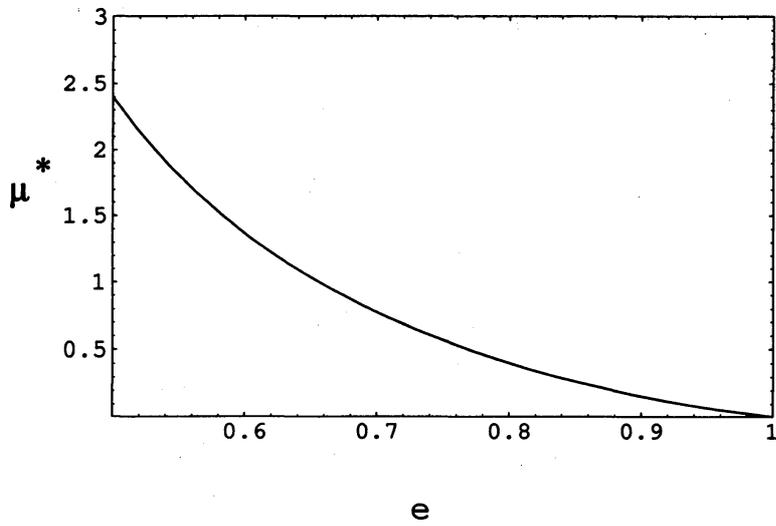
7 まとめ

本講演では非弾性 Maxwell model を用いて Chapman-Enskog 法に基づいて流体力学を系統的に導出する方法を紹介した。非弾性衝突のために失われたものとそのまま保たれているものせめぎあい興味深い。

尚、本研究は論文 [14] としてまとめられたが投稿後に極めて似た論文 [15] があることが指摘されたので改めて紹介しておく。



⊠ 2: κ/κ_0 as a function of e .



⊠ 3: $n\mu/(\kappa_0 T)$ as a function of e .

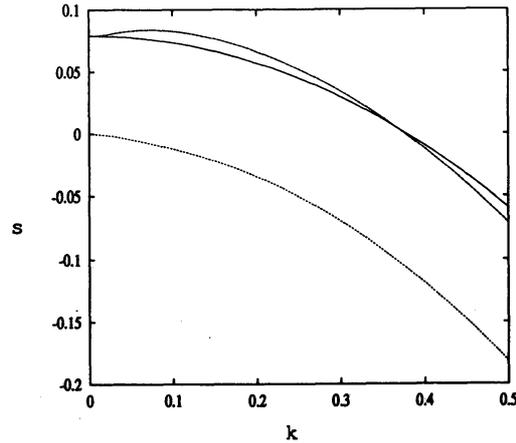


图 4: The dispersion relation as a function of dimensionless k at $e = 0.9$.

参考文献

- [1] Y-h. Taguchi and H. Takayasu, *Europhys. Lett.* **30**, 499 (1995).
- [2] K. Ichiki and H. Hayakawa, *Phys. Rev. E* **52**, 658 (1995).
- [3] J. J. Brey, F. Moreno and J. W. Dufty, *Phys. Rev. E* **54**, 445 (1996).
- [4] see e.g., T.P. Nojie and M. H. Ernst, *Granular Matter* **1**, 57 (1998).
- [5] A. V. Bobylev, J. A. Carrillo, and I. M. Gamba, *J. Stat. Phys.* **98**, 743 (2000)
- [6] M. H. Ernst and R. Brito, *Europhys. Lett.* **58**, 182 (2002).
- [7] M. H. Ernst and R. Brito, cond-mat/0112417.
- [8] P. Krapivsky and E. Ben-Naim, cond-mat/0111093.
- [9] A. Baldassarri, U. M. B. Marconi and A. Puglisi, *Europhys. Lett.* **58**, 14 (2002).
- [10] J. T. Jenkins and M. W. Richman, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **87**, 355 (1985); *Phys. Fluids* **28**, 3485 (1985).
- [11] N. Sela and I. Goldhrisch, *J. Fluid Mech.* **361**, 41 (1998).
- [12] J. J. Brey, J. W. Dufty, C. S. Kim and A. Santos, *Phys. Rev. E* **58**, 4638 (1999).
- [13] M. H. Ernst and R. Brito, *Phys. Rev. E* **65**, 040301 (2002).
- [14] H. Hayakawa, cond-mat/0209630.
- [15] A. Santos, to be published in *Physica A*.