数理解析研究所講究録 1306 巻 2003 年 125-132

品質低下と不足を考慮した在庫補充問題について

大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1 Introduction

1958年 Wagner and Whitin [22] によりEOQモデルが世間に広められて以来、EOQモデルに関連して数多くの研究がなされている。不足を持たないEOQモデルは1915年に確立されているが、不規則な需要に対しては確立されておらず、動的計画法を使ってでさえ長い計算時間を要していた。その後の発展では補充量の替わりに補充サイクルについて解析がなされた。Donaldson [6] は在庫補充最適時刻を決定するために簡単な計算手法を確立した。彼は”補充点での発注量は現在の瞬時の需要率と最後の補充からの経過時間の積である”という最適補充パターンの重要な性質を確立するのに微積分学を用いた。また、与えられたパターンと計画期間に対して与えられた補充回数の最適発注時刻を決めるためにこの性質を使った。Silver [19] はDonaldsonの問題に対して初めの補充期間上で単位時間当たりのコストを最小にするためにSilver-Meal法を適用した。Ghare and Schrader [7] は初めて有限水準上で一定の品質低下率をもつEOQモデルを展開した。Shah [18] は不足を許し、一般的品質低下関数をもつEOQモデルを扱った。この種の研究も盛んに行われており、最近の研究では、Teng [20] が不足が許される在庫補充問題において新しい最適化法を提案した。Chakrabarti and Chaudhuri [2] は有限計画水準上で線形的に変化する需要率と一定の品質低下率および不足をもつ在庫モデルについて研究した。また、Teng, Chern, Yang, Wang [21] はEOQモデルにおいて変動する需要に対する品質低下と不足を許したモデルに拡張した。Papachristos and Skouri [14] は有限計画水準上において一定の品質低下率、時刻変化需要率、時刻依存部分バックログをもつEOQ在庫モデルを展開した。

これらの研究ではいずれも製品を貯蔵する倉庫が1箇所であると仮定されていた。Hartely [11] は2レベルの貯蔵をもつモデルを初めて提案した。Sarma [17] は2レベルの貯蔵（所有の倉庫とレンタル倉庫）をもつ確定的在庫モデルを線形傾向の需要において研究した。彼らは輸送費用が輸送量と独立で固定された定数であると仮定した。Goswami and Chaudhuri [8] はこの費用を量に依存すると仮定し、不足なしとありの場合を扱った。

我々は2レベルの貯蔵での線形傾向の需要における確定的在庫モデルを展開する。各倉庫において品質低下が起こり、販売に直結している倉庫において不足が許されると仮定する。

2 モデル

計画期間Tにおいて2レベルの貯蔵をもつ確定的在庫モデルが展開される。期首に量Qだけ製品が発注され、倉庫1と倉庫2の在庫レベルはそれぞれ貯蔵最大容量のZ, Wとなる。前期での不足に対して量Sがバックオーダーされたとすると、システム全体でのロットサイズQは

$$Q = W + Z + S$$

で表せる。客の需要はすべて倉庫2から満たされる。時刻tでの需要率は線形的な関数$f(t) = a + bt$ $(a, b$ は定数) で与えられている。一定の間隔$\bar{T}$で倉庫1から倉庫2へ製品の補充が起こり、倉庫2の在庫レベルは再びWに戻る。つまり、時刻$i\bar{T}$, $i = 1, \ldots, n-1$には倉庫2の在庫レベルは$W - Q_i$になっており、倉庫1から倉庫2へQ_i単位が補充され、在庫レベルはもとのWに戻る。倉庫1での在庫レベルは連続的

な品質低下による劣化と離散的な倉庫２への補充により減少する。倉庫２での在庫レベルは製品を保持している状態には劣化および需要により減少し、品切れの状態では需要のみにより減少する。θ_1, θ_2を倉庫１，２で維持している在庫に対する一定の品質低下率とする。倉庫１の在庫がすべて消費されるまでこの過程が固定された間隔$\bar{T}$で繰り返される。不足は倉庫２でのみ許され、最後の補充以降でのみ起こるものと仮定する。時刻$n\bar{T}$に最後の補充がされるが、一般的には量Q_nを補充しても在庫レベルはWには達しない。t_sを在庫レベルが0に達する時刻とすると、時刻$n\bar{T}$に倉庫２で維持している製品は期間$[n\bar{T}, t_s]$に消費される。期間$[t_s, T]$中に不足する総量はSである。時刻Tまでに満たされなかった未納量Sは次のサイクルのはじめに満たされる。

このシステムにおいて関連する費用を次のように与える：Kを１回当たりの発注費用、xを１回当たりの補充費用、cを単位当たりの購入費用とする。また、H_1, H_2を倉庫１，２それぞれにおける単位時間単位当たりの在庫維持費用、Pを単位時間単位当たりの不足費用とする。

我々の問題は補充間隔$\bar{T}$, 補充回数n, 品切れ時刻t_s および計画期間T とシステムのコストの最適値を決定することである。最後の補充を除き、補充は常に在庫レベルがいっぱいになるようにされる。

3　解法

倉庫１の在庫は連続的な時刻での品質低下による劣化と離散的な時刻$t_i, i = 1, \ldots, n$での補充により減少する。期間$[0, \bar{T})$における時刻tでの在庫レベル$I_1(t)$は境界条件$I_1(0) = Z$をもつ

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\theta_1 I_1(t), \quad 0 \leq t < \bar{T} \tag{1}$$

で表せる。これを解くと

$$I_1(t) = Z\ \exp\{-\theta_1 t\}, \quad 0 \leq t < \bar{T} \tag{2}$$

を得る。時刻$\bar{T}$には倉庫１から倉庫２へQ_1単位が補充される。そのとき、倉庫１の在庫レベルは$I_1(\bar{T} - 0) - Q_1$となり、倉庫２の在庫レベルはWに戻る。期間$[\bar{T}, 2\bar{T})$における時刻tでの在庫レベル$I_1(t)$は境界条件$I_1(\bar{T}) = Z\ \exp\{-\theta_1 \bar{T}\} - Q_1$をもつ

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\theta_1 I_1(t), \quad \bar{T} \leq t < 2\bar{T} \tag{3}$$

で表せる。これを解くと

$$\begin{aligned} I_1(t) &= (Z\ \exp\{-\theta_1 \bar{T}\} - Q_1)\ \exp\{-\theta_1 (t - \bar{T})\} \\ &= (Z - Q_1\ \exp\{\theta_1 \bar{T}\})\ \exp\{-\theta_1 t\} \end{aligned} \tag{4}$$

を得る。一般に、期間$[i\bar{T}, (i+1)\bar{T}), i = 1, \ldots, n-1$における時刻$t$での在庫レベル$I_1(t)$は境界条件$I_1(i\bar{T}) = Z\ \exp\{-i\theta_1 \bar{T}\} - \sum_{j=1}^{i} Q_j\ \exp\{-(i-j)\theta_1 \bar{T}\}$をもつ

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = -\theta_1 I_1(t), \quad i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T}, \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{5}$$

で表せる。これを解くと

$$I_1(t) = \left(Z - \sum_{j=1}^{i} Q_j\ \exp\{j\theta_1 \bar{T}\} \right)\ \exp\{-\theta_1 t\}, \quad i\bar{T} \leq t < (i+1)\bar{T}, \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{6}$$

を得る。時刻$n\bar{T}$に補充される量Q_nはその時点で倉庫１に残っている量であるので、

$$Q_n = \left(Z - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j\ \exp\{j\theta_1 \bar{T}\} \right)\ \exp\{-n\theta_1 \bar{T}\} \tag{7}$$

と表せる。時刻$n\bar{T}$の補充によりすべての在庫が使い尽くされるので、期間$[n\bar{T}, T]$における在庫量は0である。

ゆえに、倉庫1における累積在庫量は

$$\begin{aligned} I_1^+ &= \int_0^{\bar{T}} Z \exp\{-\theta_1 t\} dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{i\bar{T}}^{(i+1)\bar{T}} \left(Z - \sum_{j=1}^{i} Q_j \exp\{j\theta_1 \bar{T}\} \right) \exp\{-\theta_1 t\}\, dt \\ &= \frac{1}{\theta_1} Z(1 - \exp\{-n\theta_1 \bar{T}\}) - \frac{1}{\theta_1} \sum_{j=1}^{n-1} Q_j (1 - \exp\{-(n-j)\theta_1 \bar{T}\}) \end{aligned} \tag{8}$$

である。

一方、倉庫2の在庫は需要と品質低下により減少し、時刻$i\bar{T}, i = 1, \ldots, n$には補充され、最後の補充を除いて常に倉庫がいっぱいになるように満たされる。期間$[0, \bar{T})$における時刻tでの在庫レベル$I_2(t)$は境界条件$I_2(0) = W$をもつ

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -f(t) - \theta_2 I_2(t), \quad 0 \le t < \bar{T} \tag{9}$$

で表せる。これを解くと

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \exp\{-\theta_2 t\} \left[W - \int_0^t \exp\{\theta_2 u\} f(u) du \right] \\ &= \left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} \right) \exp\{-\theta_2 t\} - \frac{b}{\theta_2} t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \end{aligned} \tag{10}$$

を得る。よって時刻$\bar{T}$での補充量Q_1は

$$\begin{aligned} Q_1 &= W - I_2(\bar{T} - 0) \\ &= \left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} \right) (1 - \exp\{-\theta_2 \bar{T}\}) + \frac{b}{\theta_2} \bar{T} \end{aligned} \tag{11}$$

である。時刻$\bar{T}$には倉庫1より量Q_1が補充され、倉庫2の在庫レベルはWに戻る。期間$[\bar{T}, 2\bar{T})$における時刻tでの在庫レベル$I_2(t)$は境界条件$I_2(\bar{T}) = W$をもつ

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -f(t) - \theta_2 I_2(t), \quad \bar{T} \le t < 2\bar{T} \tag{12}$$

で表せる。これを解くと

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \exp\{-\theta_2 t\} \left[\exp\{\theta_2 \bar{T}\} W - \int_{\bar{T}}^t \exp\{\theta_2 u\} f(u) du \right] \\ &= \left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{b}{\theta_2} \bar{T} \right) \exp\{-\theta_2 (t - \bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2} t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \end{aligned} \tag{13}$$

を得る。よって時刻$2\bar{T}$での補充量Q_2は

$$Q_2 = \left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{b}{\theta_2} \bar{T} \right) (1 - \exp\{-\theta_2 \bar{T}\}) + \frac{b}{\theta_2} \bar{T} \tag{14}$$

である。一般に、期間$[i\bar{T}, (i+1)\bar{T}), i = 1, \ldots, n-1$における時刻$t$での在庫レベル$I_2(t)$は境界条件$I_2(i\bar{T}) = W$をもつ

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -f(t) - \theta_2 I_2(t), \quad i\bar{T} \le t < (i+1)\bar{T}, \quad i = 1, \ldots, n-1 \tag{15}$$

で表せる。これを解くと

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= \exp\{-\theta_2 t\}\left[W\exp\{i\theta_2\bar{T}\} - \int_{i\bar{T}}^{t}\exp\{\theta_2 u\}f(u)du\right] \\
&= (W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{ib}{\theta_2}\bar{T})\exp\{-\theta_2(t - i\bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2}t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

を得る。よって時刻$i\bar{T}$, $i = 2, \ldots, n-1$での補充量Q_iは

$$
\begin{aligned}
Q_i &= W - I_2(i\bar{T} - 0) \\
&= \left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{(i-1)b}{\theta_2}\bar{T}\right)(1 - \exp\{-\theta_2\bar{T}\}) + \frac{b}{\theta_2}\bar{T} \qquad (17)
\end{aligned}
$$

である。

モデルの仮定より、時刻$n\bar{T}$の補充直前では不足を起こしていないので

$$
I_2(n\bar{T} - 0) = \left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{(n-1)b}{\theta_2}\bar{T}\right)\exp\{-\theta_2\bar{T}\} - \frac{nb}{\theta_2}\bar{T} - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \geq 0 \qquad (18)
$$

でなければならない。また、時刻$n\bar{T}$においてQ_nの補充をしたとき、倉庫２の在庫量は容量Wを越えることはないので

$$
I_2(n\bar{T}) = I_2(n\bar{T} - 0) + Q_n \leq W \qquad (19)
$$

を満たさなければならない。期間$[n\bar{T}, t_s]$における時刻tでの在庫レベル$I_2(t)$は境界条件$I_2(n\bar{T}) = I_2(n\bar{T} - 0) + Q_n$をもつ

$$
\frac{dI_2(t)}{dt} = -f(t) - \theta_2 I_2(t), \quad n\bar{T} \leq t \leq t_s \qquad (20)
$$

で表せる。これを解くと

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= \exp\{-\theta_2 t\}\left[I_2(n\bar{T})\exp\{n\theta_2\bar{T}\} - \int_{n\bar{T}}^{t}\exp\{\theta_2 u\}f(u)du\right] \\
&= \left(I_2(n\bar{T}) + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{nb}{\theta_2}\bar{T}\right)\exp\{-\theta_2(t - n\bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2}t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \qquad (21)
\end{aligned}
$$

を得る。時刻t_sにおいて在庫量は0となるので、t_sは

$$
I_2(t_s) = 0 \qquad (22)
$$

すなわち

$$
\left(I_2(n\bar{T}) + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{nb}{\theta_2}\bar{T}\right)\exp\{-\theta_2(t_s - n\bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2}t_s - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} = 0 \qquad (23)
$$

を満たす。時刻t_s以降は需要のみによる在庫レベルの低下となるので、期間$(t_s, T]$における時刻tでの在庫レベル$I_2(t)$は境界条件$I_2(t_s) = 0$をもつ

$$
\frac{dI_2(t)}{dt} = -f(t), \quad t_s < t \leq T \qquad (24)
$$

で表せる。これを解くと

$$
I_2(t) = -a(t - t_s) - \frac{b}{2}(t^2 - t_s^2) \qquad (25)
$$

を得る。時刻Tには在庫レベルは$-S$に達するので

$$I_2(T) = -a(T-t_s) - \frac{b}{2}(T^2 - t_s^2) = -S \tag{26}$$

を満たさなければならない。

ゆえに、倉庫２における累積在庫量は

$$\begin{aligned} I_2^+ &= \sum_{j=0}^{n-1}\int_{j\bar{T}}^{(j+1)\bar{T}} \left\{ \left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{jb}{\theta_2}\bar{T} \right) \exp\{-\theta_2(t - j\bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2}t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \right\} dt \\ &\quad + \int_{n\bar{T}}^{t_s} \left\{ \left(I_2(n\bar{T}) + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{nb}{\theta_2}\bar{T} \right) \exp\{-\theta_2(t - n\bar{T})\} - \frac{b}{\theta_2}t - \frac{a}{\theta_2} + \frac{b}{\theta_2^2} \right\} dt \\ &= \frac{n}{\theta_2}\left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{(n-1)b}{2\theta_2}\bar{T} \right)(1 - \exp\{-\theta_2\bar{T}\}) \\ &\quad + \frac{1}{\theta_2}\left(I_2(n\bar{T}) + \frac{a}{\theta_2} - \frac{b}{\theta_2^2} + \frac{nb}{\theta_2}\bar{T} \right)(1 - \exp\{-\theta_2(t_s - n\bar{T})\}) \\ &\quad - \frac{b}{2\theta_2}t_s^2 - \frac{a}{\theta_2}t_s + \frac{b}{\theta_2^2}t_s \end{aligned} \tag{27}$$

である。倉庫１における劣化数は

$$I_1^0 = Z - \sum_{i=1}^{n} Q_i = \theta_1 I_1^+ \tag{28}$$

であり、倉庫２における劣化数は

$$I_2^0 = \int_0^{t_s} \theta_2 I_2(t)dt = \theta_2 I_2^+ \tag{29}$$

である。また、期間$[t_s, T]$におこる不足に対する累積不足量は

$$I_2^- = \int_{t_s}^{T} (T-t)f(t)dt = \frac{a}{2}T^2 + \frac{b}{6}T^3 - at_sT - \frac{b}{2}t_s^2T + \frac{a}{2}t_s^2 + \frac{b}{3}t_s^3 \tag{30}$$

である。

このシステムでは、発注、在庫維持、不足損失、劣化による損失、輸送に関する費用を伴う。(8), (27), (28), (29), (30) よりシステム全体にかかる平均費用は

$$C = \frac{1}{T}\{K + nx + (H_1 + \theta_1 c)I_1^+ + (H_2 + \theta_2 c)I_2^+ + PI_2^-\} \tag{31}$$

となる。

Cは３つの変数$n, \bar{T}, T$の関数であり、$\bar{T}, T$は連続型変数、nは離散型変数である。与えられたnに対してCを最小にする必要条件は

$$\frac{\partial C}{\partial \bar{T}} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial T} = 0 \tag{32}$$

である。(32) の初めの式は

$$(H_1 + \theta_1 c)\frac{\partial I_1^+}{\partial \bar{T}} + (H_2 + \theta_2 c)\frac{\partial I_2^+}{\partial \bar{T}} + P\frac{\partial I_2^-}{\partial \bar{T}} = 0 \tag{33}$$

となる。そこで

$$\frac{\partial I_1^+}{\partial \bar{T}} = nZ\exp\{-n\theta_1\bar{T}\} - \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)Q_j \exp\{-(n-j)\theta_1\bar{T}\}$$

$$-\frac{1}{\theta_1}\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\left(\theta_2 W + a - \frac{jb}{\theta_2} + (j-1)b\bar{T}\right)\ \exp\{-\theta_2\bar{T}\} + \frac{jb}{\theta_2}\right\}(1-\exp\{-(n-j)\theta_1\bar{T}\})\quad(34)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_2^+}{\partial \bar{T}} &= n\left(W + \frac{a}{\theta_2} - \frac{(n+1)b}{2\theta_2^2} + \frac{(n-1)b}{2\theta_2}\bar{T}\right)\ \exp\{-\theta_2\bar{T}\} - \frac{nb}{\theta_2}t_s - \frac{na}{\theta_2} + \frac{n(n+1)b}{2\theta_2^2}\\ &\quad + \frac{1}{\theta_2}\left(\frac{\partial I_2(n\bar{T})}{\partial \bar{T}} + \frac{nb}{\theta_2}\right)(1-\exp\{-\theta_2(t_s - n\bar{T})\})\end{aligned}\quad(35)$$

$$\frac{\partial I_2^-}{\partial \bar{T}} = -(T-t_s)\left\{\left(\frac{\partial I_2(n\bar{T})}{\partial \bar{T}} + \frac{nb}{\theta_2}\right)\ \exp\{-\theta_2(t_s - n\bar{T})\} + nbt_s + na - \frac{nb}{\theta_2}\right\}\quad(36)$$

である。また、Q_jは(17)より得られ、

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_2(n\bar{T})}{\partial \bar{T}} &= \frac{(n-1)b}{\theta_2}\exp\{-\theta_2\bar{T}\} - \left(\theta_2 W + a - \frac{b}{\theta_2} + (n-1)b\bar{T}\right)\exp\{-\theta_2\bar{T}\} - \frac{nb}{\theta_2} - n\theta_1 Z\\ &\quad - \sum_{j=1}^{n-1}\left\{\left(\theta_2 W + a - \frac{jb}{\theta_2} + (j-1)b\bar{T}\right)\exp\{-\theta_2\bar{T}\} + \frac{jb}{\theta_2}\right\}\exp\{-(n-j)\theta_1\bar{T}\}\\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\theta_1 Q_j \exp\{-(n-j)\theta_1\bar{T}\}\end{aligned}\quad(37)$$

である。(32)の２番目の式は

$$-C + P\left\{a(T-t_s) + \frac{b}{2}(T^2 - t_s^2)\right\} = 0\quad(38)$$

となる。

(33)と(38)は非線形方程式であり、$n = 1, 2, \ldots$に対してこれらを解くと最適値$\bar{T}, T$が得られる。最適費用は(31)から得られ、これらの値の比較により補充回数nの最適値が決定する。また、t_sの最適値は(23)から得られる。

4　最後に

本稿では２レベルの貯蔵において品質低下が起こり、販売に直結している倉庫においてのみ不足が許され、線形傾向の需要をもつ確定的在庫モデルについて定式化し、最適解を得るための必要条件を導いた。実際、最適解を得るには、最適解を求めるための必要条件が非線形方程式であるので、数値的な近似解法に頼らざるおえないであろう。本稿では、倉庫２において補充終了後にのみ不足が許されるというモデルについての解析を行ったが、パラメータの値によっては補充終了前に不足が生じるケースも存在する。これらについては今後の研究課題とする。

参考文献

[1] R.E.Bellman (1957) Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[2] T.Chakrabarti and K.S.Chaudhuri (1997) An EOQ model for deteriorating items with a linear trend in demand and shortages in all cycles, Int. J. Prod. Econom., Vol.49, 205-213.

[3] U.Dave and L.K.Patel (1981) (T, S_i) policy inventory model for deteriorating items with time proportional demand, Journal of the Operational Research Society, Vol.32, 137-142.

 131

[4] U.Dave (1989) On a heuristic inventory-replenishment rule for items with a linearly increasing demand inxorporating shortages, Journal of the Operational Research Society, Vol.40, No.9, 827-830.

[5] M.Deb and K.Chaudhuri (1987) A note on the heuristic for replenishment of trended inventories considering shortages, Journal of the Operational Reesearch Society, Vol.38, No.5, 459-463.

[6] W.A.Donaldson (1977) Inventory replenishment policy for a linear trend in demand — An analytical solution, Operational Research Quarterly, Vol.28, No.3, 663-670.

[7] P.M.Ghare and G.F.Schrader (1963) A model for exponentially decaying inventories. J.ind. Engng, Vol.14, 238-243.

[8] A.Goswami and K.S.Chaudhuri (1992) An economic order quantity model for items with two levels of storage for a linear trend in demand, J. of the Operational Research Society, Vol.43, No.2, 157-167.

[9] M.Hariga (1995) An EOQ model for deteriorating items with shortages and time-varying demand, Journal of the Operational Research Society, Vol.46, 398-404.

[10] F.Harris (1913) How many parts to make at once, Factory, The Magazine of Management, Vol.10, 135-136, 152.

[11] R.V.Hartely (1976) Operations Research - A Managerial Emphasis, Good Year Publishing Company, California 315-317.

[12] A.Mitra, J.F.Cox and R.R.Jesse JR (1984) A note on determining order quantities with a linear trend in demand, Journal of the Operational Research Society, Vol.35, No.2, 141-144.

[13] T.M.Murdeshwar (1988) Inventory replenishment policy for linearly increasing demand consider shortages — An optimal solution, Journal of the Operational Research Society, Vol.39, No.7, 687-692.

[14] S. Papachristos and K. Skouri (2000) An optimal replenishment policy for deteriorating items with time-varying demand and partial - exponential type - backlogging, Operations Research Letters, Vol.27, 175-184.

[15] R.I.Phelps (1980) Optimal inventory rule for a linear trend in demand with a constant replenishment period, Journal of the Operational Research Society, Vol.31, 439-442.

[16] R.S.Sachan (1984) On (T, S_i) policy inventory model for deteriorating items with time proportional demand, Journal of the Operational Research Society, Vol.35, No.11, 1013-1019.

[17] K.V.S.Sarma (1983) A deterministic inventory model with two levels of storage and an optimum release rule, Opsearch, Vol.20, 175-180.

[18] Y.K.Shah (1977) An order-level lot-size inventory model for deteriorating items. Am. Inst. Ind. Engng Trans. Vol.9, 108-112.

[19] E.A.Silver (1979) A simple inventory replenishment decision rule for a linear trend in demand, J. of the Operational Research Society, Vol.30, No.1, 71-75.

[20] J.T.Teng (1996) A deterministic inventory replenishment model with a linear trend in demand, Operations Research Letters, Vol.19, 33-41.

[21] J.T.Teng, M.S.Chern, H.L.Yang and Y.J.Wang (1999) Deterministic lot-size inventory models with shortages and deterioration for fluctuating demand, Operations Research Letters, Vol.24, 65-72.

[22] H.M.Wagner and T.M.Whitin (1958) Dynamic version of the economic lot size model. Management Science, Vol.5, 89-96.