数理解析研究所講究録 1309 巻 2003 年 1-12

走化性方程式の解の爆発と時間大域的存在について

宮崎大学・工学部　仙葉 隆
Faculty of Engineering, Miyazaki University

1 序

Keller と Segel [11] は、細胞性粘菌が自分自身から生成される化学物質に引き寄せられる事 (**走化性**) によって起きる集中現象を記述する方程式系を導出した。その後、 Nanjundiah [18] によって方程式系の単純化がなされた。それが以下の方程式系であり、我々は以下の方程式系を **Keller-Segel 系**と呼ぶ。

$$
\text{(KS)} \qquad \begin{cases} u_t = \nabla\cdot(\nabla u - u\nabla v), & x\in\Omega,\ t>0, \\ v_t = \Delta v - v + u, & x\in\Omega,\ t>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu} = \dfrac{\partial v}{\partial\nu} = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0, \\ u(\cdot,0)=u_0, \quad v(\cdot,0)=v_0 & x\in\Omega. \end{cases}
$$

ここで、Ω は $\mathbf{R}^N$ $(N=1,2,3,\cdots)$ の中の有界な領域でその境界 $\partial\Omega$ は滑らかとし、ν は境界の外向き単位法線ベクトルとする。u_0 と v_0 は非負で滑らかな関数とする。

$u(x,t)$ と $v(x,t)$ はそれぞれ 場所 x、時刻 t における粘菌の密度と粘菌によって生成される化学物質の濃度を表す。

第１の方程式は粘菌の密度の時間変化を表し、$\mathcal{F}=-\nabla u+u\nabla v$ がその流れを表している。$-\nabla u$ は拡散による流れを表し、$u\nabla v$ は粘菌が化学物質の濃度勾配を感知して濃度の高いほうに移動しようとするために生じる流れを表している。

第２の方程式は化学物質の時間変化を表している。$-v+u$ は化学物質が粘菌によって生成され一定の率で分解している事を表している。

粘菌と化学物質の拡散を無視すれば、他の場所よりわずかに粘菌が多くいる場所に化学物質がたくさん生成され、その場所により多くの粘菌が集まってくる。このことにより最初のわずかな粘菌や化学物質の揺らぎが最終的に大きくなり、方程式の解の振舞いとしては有限時刻爆発を起こすことになる。爆発の定義については次節で述べる。

上記の説明は、粘菌と化学物質の拡散を無視したものであり、実際には拡散と走化性の強さの関係で解が爆発したり大域的に存在したりする。本稿ではこの事に関する解の性質について分かっている事柄を紹介する。特に、

Keller-Segel 系並びに以下の二つの系の解の性質について紹介する。

$$
\text{(JL)} \qquad \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla v) \text{ in } \Omega \times [0,\infty), \\ 0 = \Delta v - \dfrac{\lambda}{|\Omega|} + u \text{ in } \Omega \times [0, T_{max}), \\ \int_\Omega v dx = 0 \text{ in } [0, T_{max}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ in } \Omega \times [0, T_{max}), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ in } \Omega. \end{cases}
$$

(JL) を **Jäger-Luckhaus 系** とよぶ。Jäger-Luckhaus 系は、Jäger と Luckhaus [10] により Keller-Segel 系を単純化することにより導出された方程式系である。また、Nagai [13] は Jäger と Luckhaus とは別の単純化により以下の方程式系を導出した。

$$
\text{(N)} \qquad \begin{cases} u_t = \nabla \cdot (\nabla u - u\nabla v) \text{ in } \Omega \times [0,\infty), \\ 0 = \Delta v - v + u \text{ in } \Omega \times [0, T_{max}), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ in } \Omega \times [0, T_{max}), \\ u(\cdot, 0) = u_0 \text{ in } \Omega. \end{cases}
$$

本稿ではこの系を **Nagai 系**と呼ぶ。[13] の結果については後述する。

3 つの系の第一の方程式と境界条件は同じであり、異なるのは第 2 の方程式である。ただし、Jäger-Luckhaus 系においては v の一意性を得るために第 3 の方程式を付加する必要がある。また、3 つの方程式の第 2 の方程式に対応して v の初期関数の指定が必要かどうかが決まってくる。

Keller-Segel 系と Nagai 系において解 v は非負であり、Jäger-Luckhaus 系において解 v は非負とは限らない。この様に 3 つの系の解の性質について全く同じと言うわけではないが、本稿においてこれから述べるのは解の大域的存在・爆発、そして爆発解の挙動についてであり、これらの事柄について言えば 3 つの系の解に対して異なった性質は現在まで見つかっていないと思われる。さらに、3 つの系の性質を調べるとき、Jäger-Luckhaus 系、Nagai 系、Keller-Segel 系の順で解析が難しくなる。従って、今まで知られている結果の関係は、

$$
\text{Jäger-Luckhaus 系} \supset \text{Nagai 系} \supset \text{Keller-Segel 系}
$$

となっている。この様に、分かっている結果の包含関係・その解析の容易さの関係から、

『Jäger-Luckhaus 系、 Nagai 系、Keller-Segel 系の順に解析しそれぞれの系で得られた結果を次の系を解析するときの目標とし、解析に成功した手法を次の系の解析に適応できるように改良する。』

と言うような研究の方向になっているように思われる。従って、これから述べる3つの系に関する結果もそのように理解して頂きたい。

2 解の基本的性質・種々の定義

Keller-Segel 系、Nagai 系、Jäger-Luckhaus 系の解について以下が成り立つ。

(i) 唯一つの古典解 (u,v) が時間局所的に存在する。以下、古典解の最大存在時刻を T_{max} と書く。

(ii) 解 (u,v) は $\overline{\Omega}\times(0,T_{max})$ 上で滑らかな関数となり、u はそこで至るところ正となる。

(ii′) Keller-Segel 系と Nagai 系の解 v は $\overline{\Omega}\times(0,T_{max})$ 上で至るところ正となる。

(iii) 任意の $t\in[0,T_{max})$ に対して $\|u(\cdot,t)\|_1=\|u_0\|_1$ が 成り立つ。

ここで、任意の $1\leqq p\leqq\infty$ に対して $\|\cdot\|_p$ を L^p ノルムとする。

また、(u,v) を Keller-Segel 系、Nagai 系、Jäger-Luckhaus 系のいずれかの解であるとする。そのとき、$T_{max}<\infty$ であるならば

$$\lim_{t\to T_{max}}\|u(\cdot,t)\|_\infty=\lim_{t\to T_{max}}\|v(\cdot,t)\|_\infty=\infty$$

が成り立つ。ここで

$$\limsup_{t\to T}\|u(\cdot,t)\|_\infty=\infty$$

である時、時刻 T で解が **爆発** すると言う。つまり、T_{max} は古典解の最大存在時刻であるが、$T_{max}<\infty$ のときは爆発時刻にもなっている。そして、

$$\lim_{n\to\infty}(q_n,t_n)=(q,T_{max}),\quad \lim_{n\to\infty}u(q_n,t_n)=+\infty$$

を満たす二つの数列 $\{q_n\}\subset\overline{\Omega}$、$\{t_n\}\subset[0,T_{max})$ が存在するとき、$q\in\overline{\Omega}$ は (u の) **爆発点** であると言う。さらに爆発点全体を $\mathcal{B}$ で表す。

3 2次元に特化する理由と2次元固有の問題

本稿で扱っている3つの方程式系の解について今まで研究されている結果の多くは領域 Ω が2次元の場合であり、本稿でも次節において2次元の場合に焦点を絞る。本節ではその理由を述べ、2次元の場合で特に何が問題となるのかを説明する。

Keller と Segel は方程式系の定数定常解の不安定性を示すことにより彼らの導出したモデル方程式の正当性を主張した。その後、Childress [3] と Childress と Percus [4] によって Keller-Segel 系の解の性質として以下が予想された。

- $N=1$ の場合、爆発は起こらない。
- $N=2$ の場合、以下を満たす正定数 λ_* が存在する。
  - **(i)** $\|u_0\|_1 < \lambda_*$ ならば解は時間大域的に存在する。
  - **(ii)** $\|u_0\|_1 > \lambda_*$ ならば爆発する可能性がある。つまり、任意の $\lambda > \lambda_*$ に対して $\|u(\cdot,t)\|_1 = \lambda$ を満たす爆発解がある。さらに、爆発解は爆発時刻においてデルタ関数的な特異点を持つ。
- $N \geqq 3$ の場合、どんな小さな正の値 λ に対しても $\|u(\cdot,t)\|_1 = \lambda$ を満たす様な爆発解がある。

ここで、解が爆発時刻でデルタ関数的な特異点を持つ事を **chemotactic collapse** と言う。

1 次元の場合、つまり領域 Ω が $\mathbf{R}$ 内の有界な開区間とするとき、Keller-Segel 系、Nagai 系、Jäger-Luckhaus 系のいづれの解も時間大域的に存在し有界となる。従って、1 次元の場合は爆発しない。

一方、3 次元以上の場合については以下の結果が知られている。

以下の定理は Nagai [13] の結果の一部である。

定理 A $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^N \mid |x| < L\}$ *(*$N \geqq 3,\ 0 < L < \infty$*)* とする。任意の $\lambda > 0$ に対し、$\|u(\cdot,t)\|_1 = \lambda$ を満たし有限時刻で爆発する *Nagai* 系の球対称解がある。

この定理は 3 次元以上の場合の Childress と Percus の予想を Nagai 系の解に対して示している。そして、これらの結果と 2 次元における Childress と Percus の予想と比較すると 3 次元以上の場合は 2 次元の場合に比べて解が爆発しやすいと言える。

以下の 2 つの定理は Herrero, Medina と Velázquez [6] において示された結果である。

定理 B $L \in (0,\infty)$、$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid |x| < L\}$ とせよ。そのとき、任意の $\lambda > 0$ に対して以下を満たす *Jäger-Luckhaus* 系の 球対称解 u と $T_{\max} \in (0,\infty)$ がある。

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \to \infty \ \ as\ t \to T_{max},$$
$$u(\cdot,t) \rightharpoonup \lambda\delta_0 + f \ \ as\ t \to T_{max}.$$

ただし、f は球対称であり $f \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$ を満たす。

定理 C $L \in (0,\infty)$、$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^3 |\ |x| < L\}$ とせよ。そのとき、以下を満たす *Jäger-Luckhaus* 系の球対称解 u と $T_{\max} \in (0,\infty)$ がある。

$$\begin{aligned} \|u(\cdot,t)\|_\infty \to \infty \ as\ t \to T_{max}, \\ u(\cdot,t) \rightharpoonup u_* \ as\ t \to T_{max}. \end{aligned}$$

ここで

$$u_*(x) \sim \frac{C}{|x|^2} \ as\ x \sim 0 \quad (C\text{は正定数}).$$

定理 B と定理 C より、Jäger-Luckhaus 系の解は 3 次元以上の場合は爆発点における特異性が少なくとも 2 種類ある事を示している。さらに、Childress と Percus の 2 次元の場合の予想が正しいとすると球対称性を仮定しない場合は上記の定理にある特異性と 2 次元的な爆発解 ($N-2$ 次元方向が定数である爆発解) が持つ特異性も現れることがわかる。これらのことから、3 次元以上の Jäger-Luckhaus 系の爆発解はいろいろな特異性を持ちうると予想される。また、これらの結果・考察により、Keller-Segel 系や Nagai 系の爆発解もいろいろな特異性を持つと予想される。

以上のように 1 次元の場合は解の爆発という観点では興味がない。3 次元以上の場合は解は爆発しやすくこの事が解の爆発条件の解析を困難にすると予想される。また、爆発解に対していろいろな特異性が現れると予想されるのでそれらの特異性を解析するためには 2 次元の爆発解に現れる特異性の解析が先決であると思われる。

一方 2 次元の場合は Childress と Percus の予想が正しければ、爆発条件に関しては解の L^1 ノルムと λ_* との関係が重要であると予想される。我々は λ_* を **閾値** と呼ぶことにする。また、解が持っている特異性もデルタ関数的なものに限られると予想される。

このように 2 次元の場合は、解の爆発という問題に関しては "自明ではない最も簡単な場合" と予想され、他の次元の爆発解を研究する前に最初に研究すべきであると考えられる。

4 2 次元の場合の結果

前節で述べたようにこの節では領域 Ω が 2 次元の有界領域である場合に限って知られている結果を紹介する。

さらに、前章で述べた Childress と Percus の予想にある閾値 λ_* と chemotactic collapse に注目する。

4.1 閾値に関する結果

前述した通り Nagai [13] は Keller-Segel 系を単純化する事により Nagai 系を導出し、Nagai 系に対して Childress と Percus の予想の閾値に関する部分

を肯定的に解決した。以下がその定理である。

定理 1 領域 Ω を原点を中心とする有界な開円盤とし、u_0 が球対称であるとせよ。そのとき以下が成立する。

もし $\|u_0\|_1 < 8\pi$ ならば *Nagai* 系の解は時間大域的に存在し、有界となる。

もし $\|u_0\|_1 > 8\pi$、そして $\int_\Omega |x|^2 u_0(x)dx \ll 1$ ならば解は有限時刻で爆発する。

このことから球対称な場合の閾値は 8π であることが Nagai 系についてわかった。このことより、Keller-Segel 系についての閾値も 8π であることが予想できる。

以上の結果は Childress と Percus の予想の肯定的証拠のように思われる。しかしながら、Childress と Percus が予想を導き出すために用いた考察や前述した結果は球対称性を仮定した状況でのものであり、領域や解に対称性を仮定しない場合は予想がそのまま成り立つとは限らない。以下の定理は Nagai, Senba と Yoshida [17] によって得られたものであるが、Biler [1]、Gajewski と Zacharias [5] によっても独立に類似の結果が得られている。

定理 2 以下の *(i)* または *(ii)* を仮定する。
(i) $\int_\Omega u_0 dx < 4\pi$.
(ii) Ω は原点を中心とする有界な開円盤とし u_0 と v_0 は原点に関して球対称で $\int_\Omega u_0 dx < 8\pi$ をみたす。

そのとき、*Keller-Segel* 系の解は時間大域的に存在し有界である。

上記の結果は、球対称性を仮定しない場合の閾値は球対称性を仮定した場合のそれの半分になっている事を示唆していて、単に技術的な理由によるものではないと思われる。この事は以下で述べる chemotactic collapse についての結果からも予想されることである。

4.2 Chemotactic collapse に関係する結果

Chemotactic collapse に関しては、Herrero と Velázquez [8] が以下のことを示した。

定理 3 (Herrero-Velázquez [8]) Ω を原点を中心とする開円盤とする。そのとき、以下を満たす球対称な *Keller-Segel* 系の解が存在する。

$$u \rightharpoonup 8\pi\delta_0 + f \quad as\ t \to T_{max}(< \infty).$$

ただし、上記の収束は測度の意味であり

$$f \geqq 0,\ f \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}\backslash\{0\})$$

定理 3 におけるデルタ関数の重さと球対称性を仮定した場合の閾値が一致している。

定理 4 $T_{max} < \infty$ とせよ。そのとき、以下の事が成立する。

$$\lim_{t \to T_{max}} \int_\Omega u \log u dx = \lim_{t \to T_{max}} \int_\Omega e^{av} dx = \infty.$$

ただし、*Keller-Segel* 系の場合は $a > 1$、*Nagai* 系と *Jäger-Luckhaus* 系の場合は $a > 1/2$ となる。

定理 4 より、$\mu = w^* - \lim_{t \to T_{max}} u(\cdot, t)$ とおくと、$\mu(\overline{\Omega}) = \lambda$、$\mu \notin L^p(\Omega)$ for $\forall p > 1$ となることがわかる。このことより μ はデルタ関数的な特異性を持つことが予想される。つまり、全ての爆発解がデルタ関数的な特異性を持っていると予想される。

4.3 閾値と chemotactic collapse との関係

Childress と Percus の予想、特に chemotactic collapse の予想と前節で紹介した二つの結果を考え合わせると次のような事が予想される。

球対称性を仮定した場合は、領域の中心で爆発しその点に 8π の L^1 量が集中し、結果的に爆発時刻でその点がデルタ関数的な特異点を持つことになる。一方、球対称性を仮定しない場合は、境界上に一定の L^1 量が集まる場合があり、そのときは爆発時刻で境界上にデルタ関数的な特異点が現れることになる。その点への L^1 量の集中にあわせて特異点の近傍を拡大すると境界は最終的に線分に収束する。この事と境界条件を考え合わせ、境界で爆発する解を特異点の近傍で境界に関して折り返すとそれは内部で爆発している解と同様に見える。つまり、このとき境界上に 4π の L^1 量が集まる。これらをまとめると、爆発解に関して以下の事が予想される。

予想 $T_{max} < \infty$ とせよ。そのとき以下の事が成立する。

$$u(\cdot, t) \rightharpoonup \sum_{q \in \mathcal{B}} m^*(q) \delta_q + f \quad \text{in } \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \quad \text{as } t \to T_{max},$$

ただし、δ_q は $q \in \overline{\Omega}$ にサポートを持つデルタ関数、つまり $\int_\Omega \delta_q \varphi dx = \varphi(q)$ $(\varphi \in C(\overline{\Omega}))$、$f$ は $f \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \mathcal{B})$ をみたす非負関数、そして

$$m^*(q) = \begin{cases} 8\pi & \text{if} \quad q \in \Omega, \\ 4\pi & \text{if} \quad q \in \partial\Omega. \end{cases}$$

我々は、これが球対称性を仮定しない場合に現れる 4π が球対称性を仮定した場合に現れる 8π の半分である理由と考える。この予想が正しければ定

理 2 に現れる値が最良であることが予想される。また、この予想は閾値と chemotactic collapse に密接な関係がある事を示唆している。

この予想の肯定的証拠として以下の結果を紹介する。

定理 5 (Nagai-S.-Suzuki [16]) $T_{max} < \infty$ とし、全ての爆発点が孤立点であると仮定する。そのとき、*Keller-Segel* 系の解 (u,v) に対して以下の事が成立する。

$$u(\cdot,t) \rightharpoonup \sum_{q\in\mathcal{B}} m(q)\delta_q + f \quad in\ \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \quad as\ t \to T_{max},$$

ただし、f は $f \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}\backslash\mathcal{B})$ をみたす非負関数、そして $m(q) \geqq m^*(q)$。

この定理は爆発点が孤立点である事を仮定しているが、予想が正しければその事を仮定する必要はない。しかし、Nagai 系の爆発解については爆発点が孤立している事がわかる。我々は、Keller-Segel 系の解と Nagai 系の解の性質には共通するものが多いと考えている。従って、以下の結果は Keller-Segel 系の爆発点の孤立性の肯定的な証拠になると考えられる。

定理 6 (S.-Suzuki [20]) $T_{max} < \infty$ とせよ。そのとき *Nagai* 系の解の全ての爆発点は孤立点である。

定理 5 は Nagai 系の解に対しても成り立つ事が分かるので 定理6 より Nagai 系の解も定理 5 と同様の事が成り立つ。

また、これらの定理では、デルタ関数の重さ $m(q)$ が予想で述べた $m^*(q)$ と一致するかどうか分からない。 $m(q) = m^*(q)$ を実現する例としては、Herrero と Velázquez [8] の結果がある。それ以外にデルタ関数の重さが確定できる結果は知られていないように思われる。しかし、爆発の速さについて仮定をすれば $m(q) = m_*(q)$ が成り立つことが分かる。

$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < L\}$ $(L \in (0,\infty))$、u、v は球対称とし、$T_{max} < \infty$ とするとき、爆発点は原点のみとなることが分かる。この状況の下で、以下のように変数変換をする。

$$\begin{cases} y = x/\sqrt{T_{max}-t}, & s = -\log(T_{max}-t), \\ z(y,s) = (T_{max}-t)u(x,t), & w(y,s) = v(x,t). \end{cases}$$

(z,w) を **リスケーリングされた解** と呼ぶ。$t \in [0, T_{max})$ は $s \in [-\log T_{max}, \infty)$ にうつるから、リスケーリングされた解は有限時刻では爆発しない。また、リスケーリングの仕方より $s = \infty$ で z の L^∞ ノルムが発散するかどうかも明らかではない。

定理 7 (S.-Suzuki [23]) Ω、u、v を球対称とし、$T_{max} < \infty$ とする。*Jäger-Luckhaus* 系のリスケーリングされた解 z が $\limsup_{s\to\infty} \|z(\cdot,s)\|_\infty = \infty$ を満たすとせよ。そのとき、*Jäger-Luckhaus* 系の爆発解 u は以下を満たす。

$$u(\cdot,t) \rightharpoonup 8\pi\delta_0 + f \quad in\ \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \quad as\ t \to T_{max}.$$

ただし、f は球対称で、$f \geqq 0,\ f \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ を満たす。

この定理は、解の爆発速度が速ければ $m(q) = m_*(q)$ であることを示している。どんな条件の下で解が速く爆発するのか、または常に解は速く爆発するのかは明らかになっていない。

4.4 解の爆発の十分条件

前小節まで述べた事柄は、"$T_{max} < \infty$ ならば解はどのような挙動を示すか。" と言う問題とそれに対する解答であった。この小節では、解が爆発する条件について述べる。特に、解が爆発するための初期値の条件について考える。

その一つが、Nagai [13] の仕事である。つまり Nagai は、Nagai 系の球対称解が爆発する十分条件を初期値の L^1 ノルムと原点に関するモーメントの言葉で求めた。さらに Nagai [14] は、この結果を対称性の仮定がない場合に拡張した。この結果と Senba と Suzuki [22] より、以下の定理が成立する。

定理 8 *Nagai* 系の解に対して以下の事が成り立つ。

(i) $q \in \Omega$ のとき、十分小さな正の数 R に対して

$$\int_{|x-q|<R} u_0(x)dx > 8\pi, \quad \frac{1}{R^2}\int_{|x-q|<R} u_0(x)|x-q|^2 dx < \eta$$

が成り立つならば $T_{max} < \infty$ となる。ただし、η は $\|u_0\|_1$ と $\int_{|x-q|<R} u_0(x)dx - 8\pi$ のみに依存する数である。

(ii) $q \in \partial\Omega$ のとき、q の近傍で領域が凸、または q の近傍で境界が等角写像によって線分に写るとする。そのとき、十分小さな正の数 R に対して

$$\int_{\{|x-q|<R\}\cap\Omega} u_0(x)dx > 4\pi, \quad \frac{1}{R^2}\int_{\{|x-q|<R\}\cap\Omega} u_0(x)|x-q|^2 dx < \eta$$

が成り立つならば $T_{max} < \infty$ となる。ただし、η は $\|u_0\|_1$ と $\int_{\{|x-q|<R\}\cap\Omega} u_0(x)dx - 4\pi$ のみに依存する数である。

また Horstmann と Wang [9] による以下の **Lyapunov 関数** W を用いた爆発条件が知られている。

Keller-Segel 系の解 (u, v) に対して

$$W(u,v) = \int_\Omega \left(u\log u - uv + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{1}{2}v^2 \right) dx \tag{1}$$

とおくとき

$$\frac{d}{dt}W(u,v) + \int_\Omega |v_t|^2 dx + \int_\Omega u|\nabla(\log u - v)|^2 dx = 0 \tag{2}$$

が成立する。また、Nagai 系の解に対しては (2) において $\int_\Omega |v_t|^2 dx$ を取り除いた式が成立する。また、[19] より以下の事がわかる。

$\lambda \notin 4\pi\mathcal{N}$ とし、$\mathcal{S}_\lambda$ を $\|u(\cdot,t)\|_1 = \lambda$ となる Keller-Segel 系の定常解全体とする。そのとき、

$$\omega_\lambda \equiv \inf\{W(u,v) \mid (u,v) \in \mathcal{S}_\lambda\} > -\infty \tag{3}$$

が成立する。

このとき、以下の事が成立する。

定理 9 (Horstmann-Wang [9]) (u_0, v_0) が $\|u_0\|_1 = \lambda$ そして $W(u_0, v_0) < \omega_\lambda$ を満たすとせよ。そのとき *Keller-Segel* 系の解は爆発する。そして、定理 *4* と同様のノルムの挙動を満たす。ただし、$T_{max} < \infty$ または $T_{max} = \infty$。

つまり、T_{max} が有限の値か無限大か判定できないが $\lim_{t\to T_{max}} \|u(\cdot,t)\|_\infty = \infty$ が成立する。

ここで、定理 9 は Nagai 系の解に対しても成立する。ただしこのとき、v_0 は $-\triangle v_0 + v_0 = u_0$ in Ω with $\partial v_0/\partial\nu = 0$ on $\partial\Omega$ の解とする。

また $\lambda > 4\pi$ のとき、定理の仮定を満たす初期値が存在することもわかる。

本小節では 2 種類の判定条件を述べたが、どちらも十分条件でありそれらの間の関係も明らかではない。特に、定理 9 に関しては T_{max} が有限かどうか判定できない。ただし、Nagai 系の解に対しては定理 9 で得られた爆発解が $T_{max} < \infty$ の場合は定理 6 より、$T_{max} = \infty$ の場合は以下の定理より、chemotactic collapse を起こすことが分かる。

定理 10 *Nagai* 系の解が $T_{max} = \infty$、$\limsup_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_\infty = \infty$ を満たすとせよ。そのとき、$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ を満たす数列 $\{t_n\} \subset [0,\infty)$、有限個の点 q_1、q_2、$\cdots$、q_I、そして $f \in L^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega} \setminus \{q_i\}_{i=1}^I)$ となる非負関数 f があって以下を満たす。

$$u(\cdot,t_n) \rightharpoonup \sum_{i=1}^{I} m^*(q_i)\delta_{q_i} + f \quad \text{in } \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \quad \text{as } n \to \infty.$$

参考文献

[1] P. Biler, *Local and global solvability of some parabolic systems modelling chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. **8** (1998) 715-743.

[2] S.Y.A. Chang and P.C. Yang, *Conformal deformation of metrices on* S^2, J. Differential Geom. **27** (1988) 259-296.

[3] S. Childress, *Chemotactic collapse in two dimensions*, Lecture Notes in Biomath. **55**, Springer, Berlin, 1984, pp. 61-66.

[4] S. Childress and J.K. Percus, *Nonlinear aspects of chemotaxis*, Math. Biosci. **56** (1981) 217-237.

[5] H. Gajewski and K. Zacharias, *Global behaviour of a reaction - diffusion system modelling chemotaxis*, Math. Nachr. **195** (1998) 77-114.

[6] M.A. Herrero, E. Meina and J.J.L. Velázquez, *Analysis of a model of chemotactic aggregation*, preprint.

[7] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, *Singularity patterns in a chemotaxis model*, Math. Ann. **306** (1996) 583-623.

[8] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa IV **35** (1997) 633-683.

[9] D. Horstmann and G. Wang, *Blowup in a chemotaxis model without symmetry assumptions*, preprint

[10] W. Jäger and S. Luckhaus, *On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis*, Trans. Amer. Math. Soc. **329** (1992) 819-824.

[11] E.F. Keller and L.A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewd as an instability*, J. Theor. Biol. **26** (1970) 399-415.

[12] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1971) 1077-1092.

[13] T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995) 581-601.

[14] T. Nagai, *Blowup of nonradial solutions to a parabolic-elliptic system modelling chemotaxis in two-dimensional domain*, to appear in; J. Inequal. Appl..

[15] T. Nagai, *Behavior of solutions to a parabolic-elliptic system modelling chemotaxis*, preprint.

[16] T. Nagai, T, Senba, and T. Suzuki, *Chemotacitc collapse in a parabolic system of chemotaxis*, to appear in; Hiroshima Math. J..

[17] T. Nagai, T. Senba, and K. Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funckcial. Ekvac. **40** (1997) 411-433.

[18] V. Nanjundiah, *Chemotaxis, signal relaying, and aggregation morphology*, J. Theor. Biol. **42** (1973) 63-105.

[19] T. Senba and T. Suzuki, *Some structures of the solution set for a stationary system of chemotaxis*, Adv. Math. Sci. Appl. **10** (2000) 191-224.

[20] T. Senba and T. Suzuki, *Chemotactic collapse in a parabolic-elliptic system of mathematical biology*, to appear in; Adv. Differential Equations.

[21] T. Senba and T. Suzuki, *Local and norm behavior of blowup solutions to a parabolic system of chemotaxis*, to appear in; J. Korean Math. Soc..

[22] T. Senba and T. Suzuki, *Blowup criteria for solutions of a parabolic system of chemotaxis*, to appear in; Proceedings of the conference in Hong Kong.

[23] T. Suzuki, *A note on the stability of stationary solutions to a system of chemotaxis*, Comm. Contemporary Math. **2** (2000) 373-383.

[24] A. Yagi, *Norm behavior of solutions to the parabolic system of chemotaxis*, Math. Japonica **45** (1997) 241-265.