

アフィンワイル群のミヌスクル元

HAGIWARA Manabu

Institute of Industrial Science, University of Tokyo

e-mail: manau@imailab.iis.u-tokyo.ac.jp

. $A = (a_{i,j})$ を symmetrizable G.C.M. とし, そのディンキン図形を Γ とする. また, 対応するウェイトラティスを P , Kac-Moody ワイル群を W とする.

インテグラルウェイト λ に対し, $w \in W$ が λ -ミヌスクル元であるとは

$$s_{i_j} s_{i_{j+1}} \dots s_{i_r} \lambda = s_{i_{j+1}} \dots s_{i_r} \lambda - \alpha_{i_j} \quad (1 \leq j \leq r)$$

が成り立つ最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_r}$ が存在することをいう, ここで α_{i_j} は生成元 s_{i_j} に対応するシンプルルートである. また, $w \in W$ が適当な λ によって λ -ミヌスクル元であるとき, 単にミヌスクル元と呼ぶ. R. Proctor や J. Stembridge 達によると, λ -ミヌスクル元は 1980 年代に D. Peterson によって定義されたと言われているが, D. Peterson による論文は公開されていない.

ミヌスクル元は完全可換性と呼ばれる性質, つまり一つ最短表示に現れている可換な生成元を交換することで他の最短表示が全て得られるという性質, を持つことが知られている. そして, 完全可換性を持つ Kac-Moody ワイル群の元と関連する対象としてヒープが挙げられる. ヒープの説明のために, Γ -ラベル付半順序集合 (P, \leq, ϕ) を準備する. Γ -ラベル付半順序集合 (P, \leq, ϕ) とは, (P, \leq) が半順序集合であり ϕ は P から $N(\Gamma)(:= \Gamma$ のノード全体) への (特に条件を設けない) 写像の組を意味する. この紙面では P の元は有限個と仮定する. P に線形拡張 (linear extention) を一つ定めれば W の生成元から成るワードが得られる. そのワードが完全可換性を持つ元 w の最短表示であるとき, w の任意の最短表示は P に対する線形拡張から得られる. 特に, 線形拡張と最短表示には一対一対応がある. さらに, 完全可換性を持つ元に関するヒープが一意に定まる. ミヌスクルヒープとはミヌスクル元に対応したヒープと定義する.

Stembridge は Γ -ラベル付半順序集合 (P, \leq, ϕ) がミヌスクルヒープとなる為の必要十分条件を (P, \leq, ϕ) の局所的な構造の条件を用いて表した. この紙面では, Γ が $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{F}, \tilde{G}$ 型であるときのミヌスクルヒープの構造を大域的 (局所的でなく) な特徴付けを説明したい.

この紙面の構成は以下である. まず, このセクションで一般的な用語の説明とそれを表す為用いる記号を述べる. §2 ではミヌスクル元と関連性の高

い話題を簡単に挙げる。§3にて、 \tilde{G}_2 型のミヌスカル元を分類する。このセクションでは、とても具体的にミヌスカルヒープを扱う。ここを読めば、以降のセクションや他の論文を読むのが容易になると期待できる。分類により14種類あることがわかる。§4にてディンキン図形に二本線がある場合のミヌスカルヒープの分類を simply-laced な場合に帰着させる方法を論じる。これにより、(\tilde{G}_2 の場合は三本線があるが、既に §2 で分類済みであるから、) $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$ 型のミヌスカルヒープを分類すれば、アフィンワイル群のミヌスカル元が分類できると結論できる。§§5,6 では \tilde{A}, \tilde{E} 型のミヌスカルヒープの分類がされている論文を紹介する。§7 では \tilde{D} 型のミヌスカルヒープの分類を例をあげて説明する。§8 ではミヌスカルヒープが有限しか存在しないディンキン図形の型について、いままで知られていたものとは異なる系列を与える。

0.1 定義

イントロダクションでも触れたが、Stembridge によるミヌスカルヒープの特徴づけをもってミヌスカルヒープの定義とする。(正確には Stembridge のそれを更に少し言い換えてある。) $p, q \in P$ に対し、 $p < q$ であり $p < x < q$ なる $x \in P$ が存在しないとき $p \rightarrow q$ と書き、 q が p をカバーするという。

Definition. $A = (a_{i,j})$ を Γ に関するカルタン行列とする。 Γ -ラベル付半順序集合 (P, \leq, ϕ) がミヌスカルヒープであるとは、次の条件 (H1-1), (H1-2), (H2a) を満たすことを言う。

(H1-1) $p, q \in P$ に対し、もし $p \rightarrow q$ であれば $\phi(p)$ と $\phi(q)$ は同じであるか Γ 上隣あっている。

(H1-2) $p, q \in P$ に対し、もし $\phi(p), \phi(q)$ が同じであるか Γ 上隣あっていれば、 p, q は比較可能である。

(H2a) $p, q \in P$ に対し、もし $\phi(p) = \phi(q)$ かつ $p \leq q$ の時は $\sum_{x \in [p,q]} a_{\phi(x), \phi(p)} = 2$ が成り立つ。

特に、 P が空集合の時もミヌスカルヒープとして扱うことにする。ミヌスカル元の完全可換性より、ミヌスカル元とミヌスカルヒープの間には一対一対応ができる。

Γ -ラベル付半順序集合 (P, \leq, ϕ) に対し、 $\text{Im } \phi$ を $\text{supp } P$ で表す。また $v \in N(\Gamma)$ に対し、 $P_v := \{p \in P \mid \phi(p) = v\}$ と定義する。 $v \in N(\Gamma)$ と $p < q$ ($p, q \in P$) に対し、 $[p, q] \cap P_v = \{p, q\}$ が従うとき $[p, q]$ を v -区間と呼ぶ。 (Q, \leq, ψ) も Γ -ラベル付集合とする。 $(P, \leq, \phi), (Q, \leq, \psi)$ が同型であるとは、ある順序同型 $\Phi : P \rightarrow Q$ であって $\phi(p) = \psi(\Phi(p)), \forall p \in P$ が成り立つことを言う。

Γ, Γ' をディンキン図形とし、それらのカルタン行列を $(a_{i,j})_{i,j \in I}, (a'_{i,j})_{i,j \in I'}$ とする。 P, Q をそれぞれ Γ, Γ' -ラベル付半順序集合とする。 P, Q が抽象同型であるとは、順序同型 $\alpha : P \rightarrow Q$ と部分図形同型 $\beta : \text{supp } P \rightarrow \text{supp } Q$ で

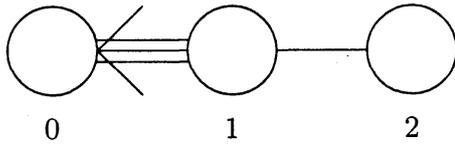


図 1: \tilde{G}_2 型のディンキン図形

あって、任意の $p \in P$ のラベルは β によって $\alpha(p)$ のラベルに写されることを言う。

1 周辺の話題

イントロダクションにて、ミヌスクル元は完全可換性を持つことについて述べた。実は、 Γ が連結でありそのノードが有限である場合、ミヌスクル元であることと完全可換性を持つことが同値である為の必要十分条件として $\Gamma = A$ or \tilde{A} であることが示される。

$\Gamma = A$ or \tilde{A} であるときは、321-avoiding 置換と呼ばれる $W(\Gamma)$ の元と同値であることが知られている。321-avoiding 置換とは、置換群 (対象群) S_n もしくはアフィン置換群 \tilde{S}_n と呼ばれる群上で定義される元のことである。 S_n の元 σ が 321-avoiding 置換であるとは、任意の $1 \leq i < j < k \leq n$ に対し $\sigma(i) > \sigma(j) > \sigma(k)$ とならないことを言う。同様に \tilde{S}_n の元 $\tilde{\sigma}$ が 321-avoiding 置換であるとは、任意の $i < j < k \in \mathbb{Z}$ に対し、 $\tilde{\sigma}(i) > \tilde{\sigma}(j) > \tilde{\sigma}(k)$ とならないことを言う。

λ -ミヌスクル元の λ がドミナントウェイトであるとき対応するミヌスクルヒープは d -完全半順序集合と呼ばれる対象と一致する。 d -完全半順序集合には組み合わせ論的に面白い性質が知られていて、例えばヤング図形でよく知られた性質である“フックの公式”の拡張が d -完全半順序集合上で構成されていることはよく知られた結果である。

2 \tilde{G}_2 の場合

Γ が \tilde{G}_2 型である時、ミヌスクルヒープは (同型を除き) 14 種類しかなく、特別な理論展開を必要とせず分類できる。このセクションにて、実際に分類し、列挙してみる。

いまディンキン図形は図 1 と書かれ、そのカルタン行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \in \{0,1,2\}}$ は

$$A := \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,0} & a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 2.1. Γ が \tilde{G}_2 型とする. Γ -ラベル付半順序集合 (P, \leq, ϕ) がミヌスクルヒープならば 0 または 2 をラベルに持つ元は高々 1 つ.

Proof. (P, \leq, ϕ) を Γ 上のミヌスクルヒープとする. $p, q \in P$ が同じラベル v を持つとき, P には v -区間ができることは明らか. そこで, P には 0-区間と 2-区間の両方が存在しないことを示せば十分.

まず 0-区間が存在しないことを示す. 0-区間 $[p, q]$ が存在するとしよう. P がミヌスクルヒープであるから (H2a) が従う. $\sum_{x \in [p, q]} a_{\phi(x), \phi(p)} = 4 + \sum_{x \in (p, q)} a_{\phi(x), \phi(p)} = 2$ であるから

$$\sum_{x \in (p, q)} a_{\phi(x), \phi(p)} = -2$$

が従う. この式の左辺において, $a_{\phi(x), \phi(p)}$ は 0 もしくは負の値しかとらない. 負の値をとる $x \in (p, q)$ は $\phi(x) = 1$ の時に限る. しかし $a_{1,0} = -3$ であるから, 条件 (H2a) を満たすことはない. よって, 0-区間は P に存在しない.

また, 2-区間が存在しないことを示す. 2-区間 $[p, q]$ が存在すると仮定しよう. 上記と同様の議論をすれば, (p, q) にはラベル 1 をもつ元が二つ必要である. つまり, 1-区間 $[p', q']$ が含まれる. $[p, q]$ が 2-区間であるから, $[p', q']$ にはラベル 2 を持つ元が存在しない. このことから同様の議論によって $[p', q']$ には 0-区間が含まれることがわかるが, 0-区間は存在できない. よって, 2-区間も存在しない. \square

Corollary 2.2. P_1 の元は高々二つである. そして, P_1 の元が二つのときそれらの元なる 1-区間にはラベル 0, 2 の元がそれぞれちょうど一つずつ含まれる.

Proof. 1-区間には, ラベル 0 もしくは 2 の元が合わせてちょうど二つ含まれる. もし, P_1 の元が三つ以上ある時, 1-区間が二つ以上あることになるが上の Proposition から個数の議論ができ, 無理であることは明らか. 同様に個数の議論を用いて, 1-区間にはラベル 0, 2 の元がちょうど一つずつあることになった. \square

(P, \leq, ϕ) を \tilde{G}_2 型の Dynkin 図形 $\Gamma = \Gamma(\tilde{G}_2)$ 上のミヌスクルヒープとする. つぎに, P の元の個数により分類していく.

- $\#P = 0$ のときは $P = \emptyset$ の時に限り, 半順序集合の構造も決まる.
よって, 一通りのミヌスクルヒープが出来た.
- $\#P = 1$ のとき, $P = \{p\}$ と書くとラベル $\phi(p)$ を 0, 1, 2 のどれか勝手に決めるとそれはミヌスクルヒープになっている. また, 半順序集合の構造も決まる.
よって, 三通りのミヌスクルヒープが出来た.

- $\#P = 2$ のとき, $P = \{p, q\}$ と書くと元それぞれのラベルには $0, 1, 2$ のうち同じラベルを持つことはあり得ないが, 異なる二つを任意に選べる. そこで, それらのラベルの差が 1 であるとき, (H1-2) より p, q は比較可能でなければならない. そこで, $p \rightarrow q$ もしくは $q \rightarrow p$ のどちらかの構造を入れれば半順序集合としての構造が定まり, どちらもミヌスクルヒープになっている. 次にラベルの差が 2 のとき, つまり一方が 0 もう一方が 2 であるとする. このとき p, q は一方が一方をカバーできないことは (H1-1) より従う. つまり, p, q は比較不可能である. その時もミヌスクルヒープの条件を満たす.

よって, 五通りのミヌスクルヒープが出来た.

- $\#P = 3$ の時. この場合も同じラベルを持つ元がない. $P = \{p_0, p_1, p_2\}$ と書き, 元それぞれのラベルを添え字が表しているとする. (H1-2) より, p_0 と p_1 は比較可能であり p_1 と p_2 も比較可能である. 実はもっと強いこととして, それぞれカバーの関係にあることが容易にわかる. そこで, どちらがどちらをカバーしているか勝手に決めると半順序集合の構造が決まるが, ミヌスクルヒープの条件を満たしていることも確かめられる.

よって, 四通りのミヌスクルヒープが出来た.

- $\#P = 4$ の時. $P = \{p_0, p_1, p'_1, p_2\}$ と書き, それぞれのラベルを添え字が表しているとする. これ以外にラベルの取り方があり得ないことは, 今までの議論で示している. $[p_1, p'_1]$ が 1 -区間であるとする. この時, P の構造は一意に決まり $p_1 \rightarrow p_0 \rightarrow p'_1, p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p'_1$ である.

よって一通りのミヌスクルヒープができた.

以上の議論から十四通りのミヌスクルヒープに分類された.

3 simply-laced デインキン図形への帰着

ここでは, \tilde{G}_2 を除くアフィンワイル群のミヌスクル元を分類する場合に $\tilde{A}, \tilde{D}, \tilde{E}$ 型の場合に分類すれば十分であることを示す. 詳しく言うと \tilde{B}_n 型は \tilde{D}_{2n} 型の場合に, \tilde{C}_n 型は \tilde{D}_{n+2} 型の場合に, \tilde{F}_4 型は \tilde{E}_7 型の場合にそれぞれ帰着できることがわかる. 実は (このセクションでの同様の議論を用いて), \tilde{G}_2 型は星型の $S(2, 2, 2)$ 型と呼ばれる simply-laced の場合に帰着できるがその話は省略する.

Definition. Π をデインキン図形としグラフ同型写像 Δ が与えられていて, 次の条件 (展 1)-(展 4) を満たしているとする.

(展 1) $\Delta \neq \text{id}$ であり, $\Delta^2 = \text{id}$ である.

(展2) $v, u \in N(\Pi)$ であつて, $\Delta(v) = v, \Delta(u) \neq u$ であるとする. このとき $a_{v,u} = a_{u,v} = -1$ である.

(展3) Δ で不動なノードを N_Δ とする. Π から N_Δ を除いたノードに制限してできる部分ディンキン図形を Γ_Δ と書くことにする. その時, 各 $u \in N(\Pi) \setminus N_\Delta$ は $\Delta(u)$ と異なるだけでなく, Π_Δ 上異なる連結成分に写る.

このようなディンキン図形 Π とグラフ同型写像 Δ に対し, Π を Δ 展開されたディンキン図形 Π と呼ぶ. また, Δ を展開同型と呼ぶことにする.

Example 3.1. \tilde{A}_5 型のディンキン図形 Π において, グラフ同型 Δ_1 を

$$\Delta_1(0) = 0, \Delta_1(i) := 6 - i \text{ for } 1 \leq i \leq 5$$

と定義する. この時, Δ は展開同型になっている.

また, Π において, グラフ同型 Δ_2 を

$$\Delta_2(0) = 5, \Delta_2(i) := i - 1 \text{ for } 1 \leq i \leq 5$$

と定義する. この時, Δ は展開同型になっていない. 実際, (展3) を満たしていない.

Δ 展開された Π に関して, (展3) により Π_Δ は偶数個の連結成分より成っている. 一つの連結成分 Π_i は Δ によって別の連結成分 Π'_i に写る. また, Π'_i は Δ によって Π_i に写る. この意味で Π は

$$\Pi = \Pi_\Delta \cup \Pi_1 \cup \Delta(\Pi_1) \cup \cdots \cup \Pi_r \cup \Delta(\Pi_r)$$

と書き表せる. ここで, Π から別のディンキン図形 Γ を作る. Γ は Π を $\Pi_\Delta \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \cdots \cup \Pi_r$ に制限し, $v \in N(\Pi_\Delta)$ と $u \in N(\Pi_i)$ for some $1 \leq i \leq r$ であつて $a_{v,u} = -1$ となっている時に $a_{u,v} = -1, a_{v,u} = -2$ と置き換えたものである. つまり,

$$N(\Gamma) := N(\Pi_\Delta) \cup N(\Pi_1) \cup N(\Pi_2) \cup \cdots \cup N(\Pi_r)$$

$$a_{u,v} = \begin{cases} -2 & \text{if } v \in N(\Pi_\Delta), u \in N(\Pi_i) \text{ with } a_{v,u} \neq 0 \\ a_{u,v} & \text{otherwise} \end{cases}$$

以上で与えられた組 Δ, Π, Γ を, Π は Γ を Δ 展開したディンキン図形と呼ぶことにする.

Example 3.2. $\Pi := \tilde{B}_n, \Gamma := \tilde{D}_{2n}$ とし, $N(\Gamma) := \{0, 1, 2, \dots, 2n\}$ の番号付けを [7] の通りとする. $\Delta(i) := 2n - i$ と定義すればこれはグラフ同型を与え, この組は上で与えられた条件を満たしている. (図 2 参照.)

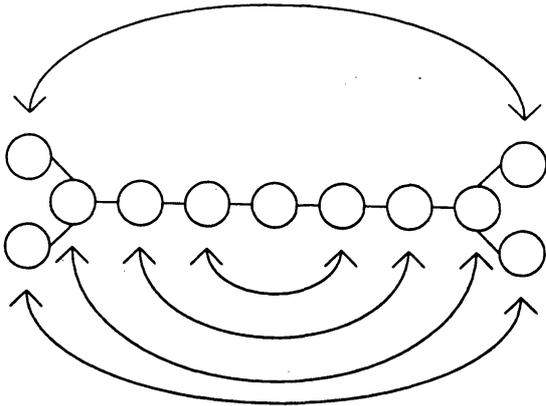


図 2: \tilde{D}_{10} 型のディンキン図形上のグラフ同型写像

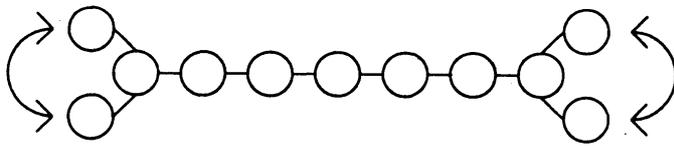


図 3: \tilde{D}_{10} 型のディンキン図形上のグラフ同型写像

Example 3.3. $\Pi := \tilde{C}_n, \Gamma := \tilde{D}_{n+2}$ とし, $N(\Gamma) := \{0, 1, 2, \dots, n+2\}$ の番号付けを [7] の通りとする. $\Delta(0) := 1, \Delta(1) := 0, \Delta(n+1) := n+2, \Delta(n+2) := n+1, \Delta(i) := i$ for $2 \leq i \leq n$ と定義すればこれはグラフ同型を与え, この組は上で与えられた条件を満たしている. (図 3 参照.)

Example 3.4. $\Pi := \tilde{F}_4, \Gamma := \tilde{E}_7$ とし, $N(\Gamma) := \{0, 1, 2, \dots, 7\}$ の番号付けを図 4 の通りとする. $\Delta(3) := 3, \Delta(4) := 4, \Delta(i) := 7 - i$ (otherwise) と定義すればこれはグラフ同型を与え, この組は上で与えられた条件を満たしている. (図 4 参照.)

このセクションの目標を如何に定める.

Theorem 3.5. Π をディンキン図形 Γ を Δ 展開して得られたディンキン図形とする. このとき, Π 上のミヌスクルヒープで Δ 不変なものとは Γ 上のミヌスクルヒープには一対一対応がある.

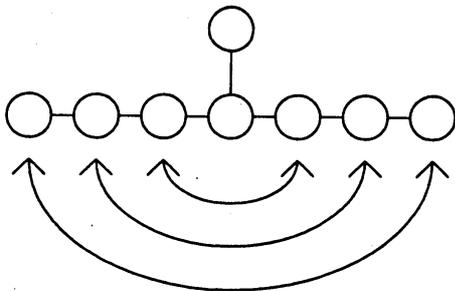


図 4: \tilde{E}_7 型のディンキン図形上のグラフ同型写像

この定理と今までの例を合わせることで、このセクションの冒頭で述べた、simply-laced の場合に帰着できることがわかった。

Proof. (P, \leq, ϕ) を Π 上のミナスクルヒープとし、 Δ 不変であるとする。いま、 $\Pi = \Pi_{\Delta} \cup \Pi_1 \cup \Delta(\Pi_1) \cup \cdots \cup \Pi_r \cup \Delta(\Pi_r)$ と書ける。そこで、 P の元をラベルが $\Pi_{\Delta} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \cdots \cup \Pi_r$ 上にある点だけに制限する。このとき、 ϕ は自然に Γ への写像とみなせる。これを ψ と書こう。この様に定義された Γ -ラベル付半順序集合を (Q, \preceq, ψ) とする。

まず、この (Q, \preceq, ψ) が Γ 上のミナスクルヒープであることを示そう。

(H1-1) について、 Q は P の部分半順序集合であるから満たしている。

(H1-2) について、 $p, q \in Q$ について $\phi(p), \phi(q)$ が Γ 上同じか隣であるとする。このとき、 p, q は P 上で比較可能である。そこで、 P 上で $p <_P q$ と一般性を失うことなく仮定できる。いま P 上にて p から q へのカバーによる列を取る。つまり、

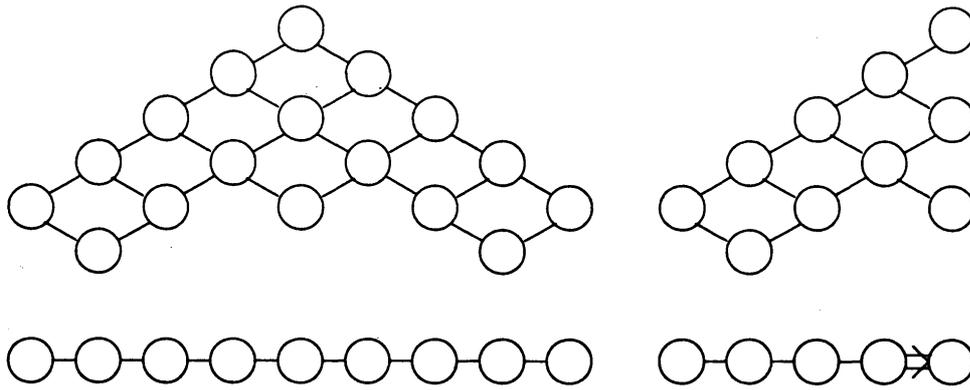
$$p = p_0 \rightarrow_P p_1 \rightarrow_P \cdots \rightarrow_P p_r = q$$

を取る。この列のうち、ラベルが Γ 上にない部分列 p_i, p_{i+1}, \dots, p_j があるとする。なければ (H1-2) が成り立っている。もしあれば、その部分列をできるだけ長く取ることによって p_{i-1}, p_{j+1} は Γ 上にラベルをもつと言える。 P は Δ 不変であるから $p_{i-1} \rightarrow q_i \rightarrow q_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow q_j \rightarrow p_{j+1}$ であって $\phi(q_h) = \Delta(\phi(p_h))$ となるように別の列が取れる。ここで q_h は Γ 上にラベルをもつから、新しい列は Q の元でできている。これを繰り返すことで、 Q 上でカバーされている列が取れる。よって (H1-2) が成り立つ。

(H2a) いま、 $v, u \in N(Q)$ は $v, u \in N(P)$ とみなせるがカルタン行列の値 $a_{v,u}$ は Γ 上の値と Π 上の値が異なる場合がある。そこで、前者を $a_{v,u,\Gamma}$ と書き、後者を $a_{v,u,\Pi}$ と書き分けよう。 $v \in N(\Gamma)$ とし、 $p, q \in Q_v$ であって $p < q$ かつ $[p, q] \cap Q_v = \emptyset$ とする。

v が $N(\Gamma_{\Delta})$ の元に含まれていないとき、 $[p, q]$ のうち $a_{\psi(x),v,\Gamma} < 0$ となる $x \in [p, q]$ に関して、値 $a_{\psi(x),v,\Gamma}$ が Π 上のカルタン行列での値 $a_{\phi(x),v,\Pi}$ と同じである。よって、 $\sum_{\psi(x) \in [p, q]} a_{x,v,\Gamma} = \sum_{x \in [p, q]} a_{\phi(x),v,\Pi} = 2$ である。

$v \in N(\Gamma_{\Delta})$ のとき、 $[p, q]_Q$ のうち $a_{\psi(x),v,\Gamma} < 0$ となる $x \in [p, q]$ に関して、 $a_{\phi(x),v,\Pi}$ の値によって場合わけして考える。ちなみに、 $a_{\psi(x),v,\Gamma} < 0 \iff a_{\phi(x),v,\Pi} < 0$ であることを注意しておく。いま $\sum_{x \in (p, q)_P} a_{\phi(x),v,\Pi} = -2$ であることから、 $a_{\phi(x),v,\Pi} < 0$ なる値は -2 が一回でてくる場合と、 -1 が二回出てくる場合の二通りしかない。まず -2 が出てくるとき、他の $x \neq y \in (p, q)_Q$ に対して $a_{\phi(x),v,\Pi} = 0$ であり、 $a_{\phi(x),v,\Pi} = a_{\psi(x),v,\Gamma} = -2$ であるから (H2a) が成立する。また -1 が二回でてくる場合、 $x, x' \in (p, q)_P$ によって $a_{\phi(x),v,\Pi} = a_{\phi(x'),v,\Pi} = -1$ となる。そこで $x' \in (p, q)_Q$ の場合、 $\phi(x), \phi(x') \in N(\Gamma_{\Delta})$ であることがわかり、 $a_{\phi(x),v,\Gamma} = a_{\phi(x'),v,\Gamma} = a_{\psi(x),v,\Pi} = a_{\psi(x'),v,\Pi} = -1$ が従う。もし、 $\phi(x), \phi(x')$ が $N(\Gamma_{\Delta})$ に含まれないならば P の Δ 不変性より他の $y \in [p, q]$ で $\Delta(\phi(y)) = \phi(x)$ なる元が存在し、 P が (H2a) を満たすこ

A₉ 型B₅ 型図 5: A₉ 型と B₅ 型のマイナスクルヒープの対応

とに矛盾する. よって, $a_{\phi(x),v,\Pi} = a_{\psi(x),v,\Gamma} = -2$ であるから (H2a) が成立する. 最後に x' が $(p, q)_Q$ に含まれない場合について議論する. つまり, $\phi(x') \in N(\Delta(\Gamma_j))$ である. ところで P の Δ 不変性より, P に Δ を作用させたとき x' と対応する y であって $y \neq x'$ が存在する. いま, $a_{\phi(y),v,\Pi} < 0$ であるがそのような元は x, x' だけであるから $y = x$ でなければならない. ところで, $\phi(x)$ は v と Π 上隣り合っている. よって, $a_{\psi(x),v,\Gamma} = -2$ である. 以上から, $a_{\psi(z),v,\Gamma} < 0$ なる $z \in (p, q)_Q$ は x だけであり, いままでの議論から (H2a) を満たすことがわかった. \square

Example 3.6. Γ を B_5 型, Π を A_9 型のディンキン図形とする. Π 上のマイナスクルヒープ (P, \leq, ϕ) を図 5 の左側のように定義する. この図では上に半順序集合のハッセ図, その下にディンキン図形を描いてある. また, 半順序集合の各元が持つラベルはその元の下方向にあるノードと対応している. 同様に Γ 上のマイナスクルヒープ (Q, \leq, ψ) を図の右側のように定義する.

これらは上の定理で与えた対応になっている.

4 \tilde{A} 型のディンキン図形上のマイナスクルヒープ

この分類は [5] に詳しく書かれている. また, 321-avoiding permutation との同値性についての証明も書かれている.

5 \tilde{E} 型のディンキン図形上のマイナスクルヒープ

この分類は [6] の結果に含まれている. その結果を \tilde{F}_4 型のディンキン図形上のマイナスクルヒープに応用すると, 同型を除き有限個しかないことがわ

6 \tilde{D} 型のディンキン図形上のミヌスクルヒープ

この分類が書かれているものはまだないと思われる。ちなみに、 \tilde{D} 型のディンキン図形 Γ 上のミヌスクルヒープはランク半順序集合になる為、分類しやすい。

実際分類すると、大きく分けて三つのタイプに分類される。

6.1 タイプ1, 階段型

図6の様に、ディンキン図の端側からもう一方の端へと交互にラベルを動いていくタイプの Γ -ラベル付半順序集合である。図で描かれているハッセ図は無限に続くように構成できるが、このうちの有限で連結な部分半順序集合を取ればそれがミヌスクルヒープとなっている。

このタイプのミヌスクルヒープが構成できることから、 \tilde{D} 型のディンキン図形上のミヌスクルヒープは無限通り存在することがわかった。

6.2 タイプ2, 網型

図7の様に、びっちりつまった感じのする Γ -ラベル付半順序集合である。このタイプのミヌスクルヒープも無限に構成できる。

6.3 タイプ3, DAD型

D 型ディンキン図形上のミヌスクルヒープ二つが、 A 型のディンキン図形上のミヌスクルヒープ一つを挟んでいる形になっている。図8では、上に左から D 型, A 型, D 型のミヌスクルヒープの例をあげ、その下側にそれらがくっついた \tilde{D} 型のミヌスクルヒープが描かれている。

7 有限性

前のセクションにて \tilde{D} 型のミヌスクルヒープが無限通り構成できることがわかった。つまり \tilde{D} 型のアフィンワイル群において、ミヌスクル元が無限通り構成できる。実は、アフィンワイル群でミヌスクル元が有限個である型は $\tilde{E}_8, \tilde{F}_4, \tilde{G}_2$ 型の三つに限られる。

[12]では、完全可換性を持つ元が有限個となる Coxeter 群の型を全て分類している。 \tilde{E}_8, \tilde{F}_4 型はその有限な型になっているから、そこから直ちに導かれると言ってよい。しかし、完全可換性を持つ元が無限個あってもミヌスクル元が有限である型もある。

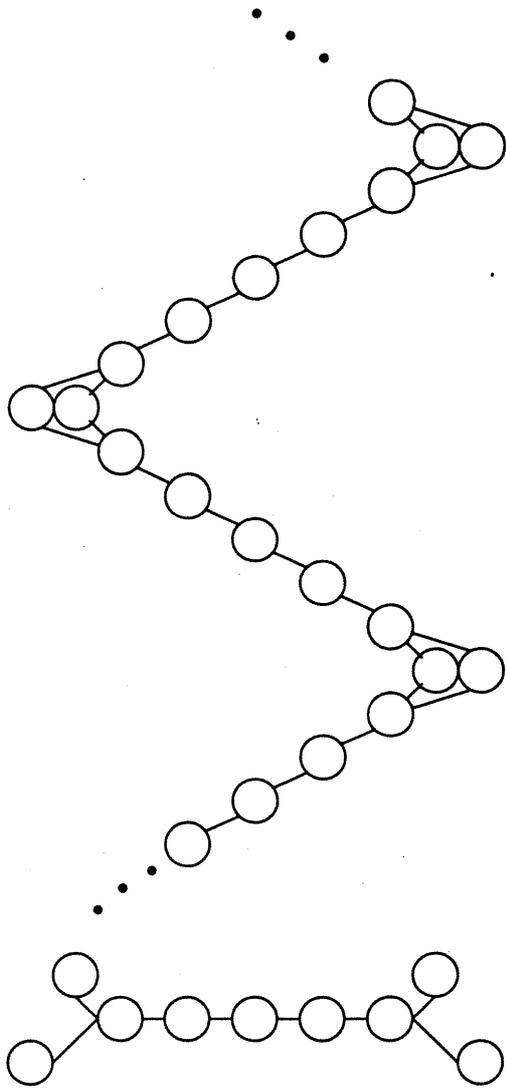


图 6: 阶段型

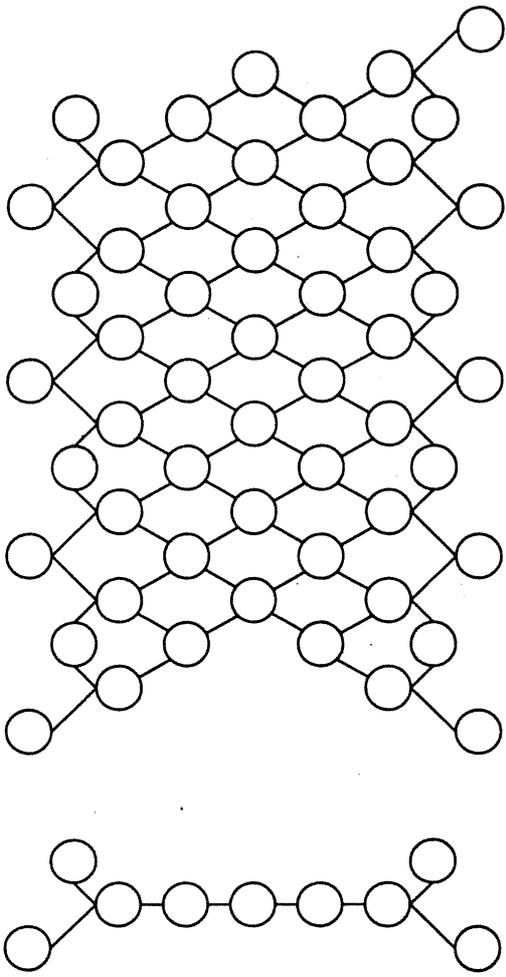


图 7: 網型

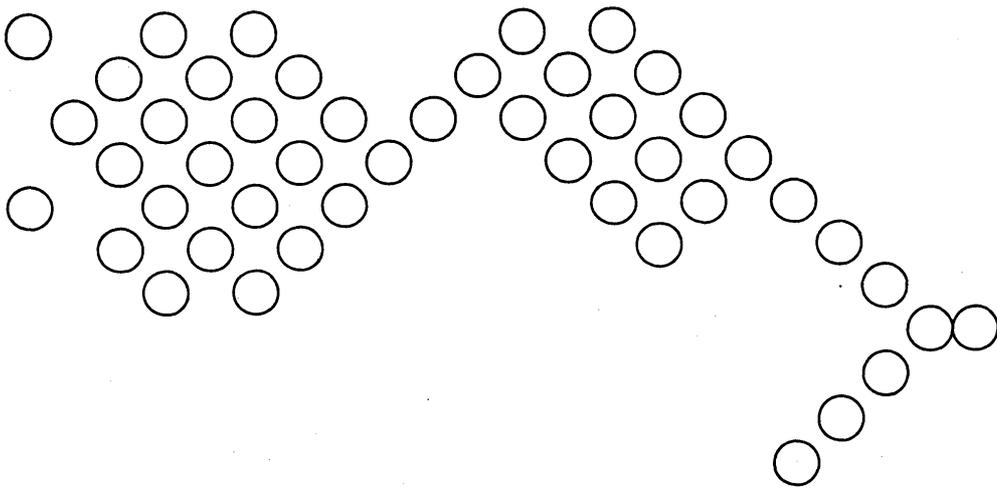
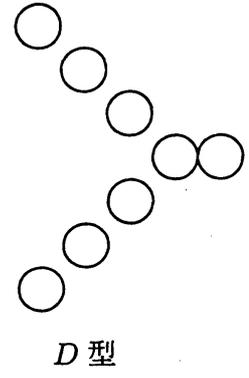
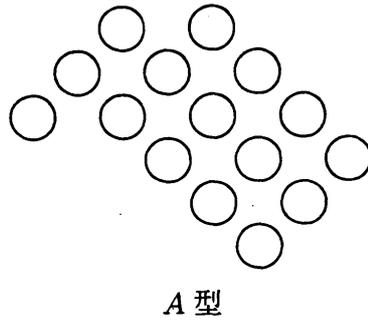
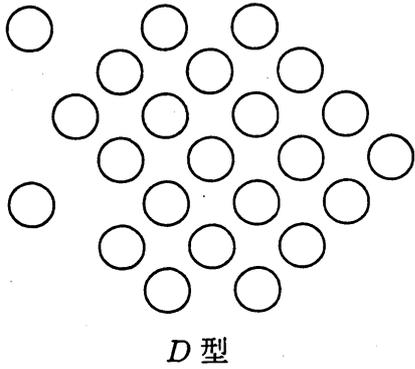


图 8: DAD 型



図 9: ミナスクル元が有限個である型のディンキン図形

Theorem 7.1. 図 9 で与えるディンキン図形に関して、ミナスクル元は有限しか構成できない。

Proof. Theorem 3.5 から、その図で与えられるディンキン図形上のミナスクルヒープは星型で枝が三本である場合に帰着できる。[6] によると、そのようなミナスクルヒープの分類は D -行列と呼ばれる行列によって分類される。Theorem 3.5 による対称性を考慮すると、有限個の D -行列しか構成できないことは容易にわかる。□

参考文献

- [1] S. Billey, W. Jockusch and R. Stanley, Some combinatorial properties of Schubert polynomials, *J. Algebraic Combinatorics*, 2, 1993, 345-374
- [2] A. Björner and F. Brenti, Affine Permutations of Type A, *The electronic journal of combinatorics* 3 (2) (1996), #R18.
- [3] V. V. Deodhar, Some Characterizations of Bruhat Ordering on a Coxeter Group and Determination of the Relative Möbius Function, *Inventiones mathematicae* 39, 1997, 187-198
- [4] C. K. Fan, A Hecke Algebra Quotient and Properties of Commutative Elements of a Weyl Group, Ph.D. thesis, MIT, 1995.
- [5] HAGIWARA Manabu, Minuscule heaps over Dynkin diagrams of type \tilde{A} , preprint.
- [6] HAGIWARA Manabu, Minuscule heaps over simply-laced, star-shaped Dynkin diagrams, preprint.
- [7] J. Humphreys, "Reflection groups and Coxeter groups," Cambridge Univ. Press, 1990.
- [8] V. G. Kac, "Infinite Dimensional Lie Algebras," Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [9] Robert A. Proctor, Dynkin Diagram Classification of λ -Minuscule Bruhat Lattices and of d -Complete Posets, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 9, 1999, 61-94.

- [10] Robert A. Proctor, Minuscule elements of Weyl groups, the numbers game, and d-complete posets, *J. Algebra*, 213, 1999, 272-303
- [11] John R. Stembridge, Minuscule Elements of Weyl Groups, *J. Algebra*, 235, 2001, 722-743.
- [12] John R. Stembridge, On the Fully Commutative Elements of Coxeter Groups, *J. Algebraic Combinatorics*, 5, 1996, 353-385.