

非局所的な非線形シュレーディンガー方程式の零分散極限での解の挙動

山口大工学部 松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

1. 概要

深い成層流体中を伝播する内部波の変調の時間発展を支配するモデル方程式として以下の非局所的な非線形シュレーディンガー方程式を考える [1,2] :

$$iu_t = u_{xx} + iu(1 - iH)(|u|^2)_x. \tag{1}$$

ここで $u = u(x, t)$ は波の包絡線を表す複素関数, H は $Hf(x) = (1/\pi)P \int_{-\infty}^{\infty} f(y)/(y-x)dy$ で定義されるヒルベルト変換である. 方程式 (1) は浅水波の非線形変調を記述する非線形シュレーディンガー方程式の深い流体系での対応物である. (1) は完全可積分と考えられているが, その Lax 対は以下で与えられる [3] :

$$i\phi_x + p\phi + u\psi^+ = 0, \tag{2a}$$

$$\psi^+ - q\psi^- + u^*\phi = 0, \tag{2b}$$

$$i\phi_t - 2ip\phi_x + \phi_{xx} - 2iu_x\psi^+ = 0, \tag{3a}$$

$$i\psi_t^\pm - 2ip\psi_x^\pm + \psi_{xx}^\pm + [(\pm i + H)(|u|^2)_x]\psi^\pm = 0. \tag{3b}$$

ここで p, q はスペクトルパラメータ, ϕ , 及び $\psi^\pm (\equiv \pm(1/2)(1 \mp iH)\psi \equiv \pm P_\pm\psi)$ は Jost 関数, u^* は u の複素共役を表す. 方程式 (2), (3) のスペクトル解析に関しては文献 [4,5] で幾つかの結果が得られている.

本稿の目的は方程式 (1) の初期値問題の解析である. 特にここで興味があるのは非線形効果に比べて分散効果が極めて小さいときの解の漸近的な振る舞いにある. 零分散極限ではあるクラスの初期値は有限時間内で特異点を発生し, それ以降は解は多価関数となる

ことが示される. ここで述べた現象は波の崩壊と呼ばれることがある. この非物理的な状況を回避するために, 解の多価領域を方程式 (1) の周期解で置き換える. ただし, 波の波数や振動数は緩やかに変化すると考え, その時間発展を Whitham の変調理論 [6] に基づいて導出する. 方程式 (1) の多重周期波解はすでに得られているが [4], 特にここでは簡単ではあるが最も重要な 1 周期波解に限定して議論を行う. 以下での主要結果は波のパラメータに関する非線形方程式系である Whitham の変調方程式が完全に分離でき, Hopf 方程式に還元できることである. これを用い, 方程式 (1) の零分散極限での初期値問題の解を構成する方法を展開する.

2. 波の崩壊

波の崩壊現象を説明するために (1) の解を極表示する:

$$u = \sqrt{r}e^{i\phi}. \quad (4)$$

ここで, $r = r(x, t) (> 0)$, 及び $\phi = \phi(x, t)$ は実関数である. (4) を (1) へ代入すると r と ϕ に対する以下の非線形方程式系が得られる.

$$r_t = 2rr_x + 2r_x\phi_x + 2r\phi_{xx}, \quad (5a)$$

$$\phi_t = \phi_x^2 - \frac{r_{xx}}{2r} + \frac{r_x^2}{4r^2} - Hr_x. \quad (5b)$$

(5) の零分散極限は形式的に微分 $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$ を各々 $\epsilon\partial/\partial t$, 及び $\epsilon\partial/\partial x$ で置き換え, その後 ϵ を零とすると導かれる. その結果は以下の方程式系となる.

$$r_t = (r^2 + 2rw)_x, \quad (6a)$$

$$w_t = (w^2)_x. \quad (6b)$$

ここで, $w = \phi_x$ と置いた. (6a) と (6b) を加えると

$$(r+w)_t = 2(r+w)(r+w)_x. \quad (7)$$

こうして $r+w$ と w の方程式は Hopf 方程式の形に還元でき, 解は $w(x, t) = w_0(x+2w(x, t)t)$ のように陰的に求められる. ここで w_0 は w の初期値である. よく知られているように, ある

クラスの初期値に対しては (6), (7) の解は多価関数となる. ここでの基本的なアプローチは多価領域を方程式 (1) の変調を受けた周期波で置き換えることである. この方法は KdV 方程式や非線形シュレーディンガー方程式の零分散極限の解析で用いられていることに注意する [7,8].

さて, (1) の 1 周期波解は以下のように書ける [9]:

$$u = \rho \frac{e^{-i\theta+\psi} + 1}{e^{-i\theta+\phi} + 1} e^{i\chi+(\phi-\psi)/2}, \quad (8)$$

$$|u|^2 = \rho^2 - \frac{k \sinh \phi}{-\cos \theta + \cosh \phi}, \quad (9)$$

$$\theta = k(x + ct), \quad (c = V - v), \quad (10a)$$

$$\chi = \frac{V}{2} \left(x + \frac{V}{2} t \right), \quad (10b)$$

$$e^{2\phi} = \frac{(v + k + 2\rho^2)(v - k)}{(v - k + 2\rho^2)(v + k)}, \quad (10c)$$

$$e^{\psi} = \frac{v + k}{v - k} e^{\phi}. \quad (10d)$$

ここで c, k, ρ, V は実の波のパラメータである. u は x の複素上半平面で解析的であるから [9], これらのパラメータに対して以下の条件を課す:

$$k > 0, \quad v + k < 0, \quad v - k + 2\rho^2 < 0. \quad (11)$$

方程式 (1) のガリレイ普遍性 $x' = x - Vt, t' = t, u'(x', t') = u(x, t) \exp \left[i \frac{V}{2} \left(x - \frac{V}{2} t \right) \right]$ を利用して (8) では新たなパラメータ V を導入した. 周期波 (9) の振幅を $a = [|u|_{\max}^2 - |u|_{\min}^2]/2$ で定義すると, (9) により $a = k/\sinh \phi$ が得られるが, これは (10c) を用いると

$$a = \frac{1}{2\rho^2} \sqrt{\{(v + 2\rho^2)^2 - k^2\}(v^2 - k^2)}, \quad (12)$$

のように書ける. 従って波の振幅は $v = -k$, あるいは $v = k - 2\rho^2$ のとき零となることがわかる. これらと方程式 $k = 0$ は (k, v) 平面で不等式 (11) で示される領域の境界を表す. Whitham の変調理論の適用の際, (8) に現れる波のパラメータは x と t の緩やかに変化する関数と仮定する. 以下でこれらの時間発展方程式を導く.

3. Whitham 方程式

Whitham 方程式は方程式 (1) の局所的保存則を速い変数に関して平均することにより得られる。現在の問題では未知変数は c, k, v, ρ の 4 つであり、同数の保存則が必要となる。最初に、Lax 対 (2), 及び (3) を用いて保存則を導く。まず, $\bar{\psi}^\pm$ を境界条件 $\bar{\psi}^\pm \rightarrow 1 (|x| \rightarrow \infty)$ を満たす Jost 関数, 対応する $\bar{\phi}$ を $\bar{\phi}$ とする。このとき (2b) は解

$$\bar{\psi}^+ = 1 - P_+(u^* \bar{\phi}), \quad (13)$$

を持つ。これを (2a) に代入すると $\bar{\phi}$ に対する方程式

$$i\bar{\phi}_x + p\bar{\phi} - uP_+(u^* \bar{\phi}) + u = 0, \quad (14)$$

が得られる。(13), 及び (14) を用いると (3a) は

$$i\bar{\phi}_t - \bar{\phi}_{xx} - 2iuP_+(u^* \bar{\phi})_x = 0, \quad (15)$$

のように書きかえられる。最後に, (14), (15) 及び (1) の複素共役より以下の方程式が導かれる。

$$i(u^* \bar{\phi})_t = \left[-(u^* \bar{\phi})_x + 2ipu^* \bar{\phi} + 2i|u|^2 \right]_x - (|u|^2)_x H(u^* \bar{\phi}) - u^* \bar{\phi} H(|u|^2)_x. \quad (16)$$

保存則の陽な表式を得る為に, $\bar{\phi}$ を p の逆幂で $\bar{\phi} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\phi}_n / p^n$ のように展開し, (14), および (16) に代入する。両辺の p^{-n} の係数を比べると以下の漸化式が得られる:

$$\bar{\phi}_1 = -u, \quad \bar{\phi}_{n+1} = -i\bar{\phi}_{n,x} + uP_+(u^* \bar{\phi}_n), \quad n \geq 1, \quad (17)$$

$$i(u^* \bar{\phi}_n)_t = [-(u^* \bar{\phi}_n)_x + 2iu^* \bar{\phi}_{n+1}]_x - (|u|^2)_x H(u^* \bar{\phi}_n) - u^* \bar{\phi}_n H(|u|^2)_x, \quad n \geq 1. \quad (18)$$

以上の準備の下で Whitham 方程式を導く。最初に任意の周期 2π の関数 $f(\theta)$ に対して

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \quad (19)$$

で平均値を定義する。これに従って (18) を平均すると

$$I_{n,t} = 2I_{n+1,x}, \quad I_n \equiv \langle u^* \bar{\phi}_n \rangle, \quad n \geq 1, \quad (20)$$

を得る. ここで関係式 $\langle fHg + gHf \rangle = 0$ を用いた. (17) から導かれる最初の5つの保存則を平均すると以下のようになる:

$$I_1 = -\langle r \rangle, \quad (21a)$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \langle r^2 + s \rangle, \quad (21b)$$

$$I_3 = \langle -\frac{1}{3}r^3 - \frac{s}{2}r + \frac{1}{2}rHr_x - u_x^*u_x \rangle, \quad (21c)$$

$$I_4 = \langle -\frac{1}{4}r^4 + \frac{1}{2}sr^2 + \frac{3}{4}r^2Hr_x - \frac{1}{2}r_x^2 - \frac{3}{2}u_x^*u_xr + \frac{3}{4}sHr_x - \frac{i}{2}(u_{xx}^*u_x - u_{xx}u_x^*) \rangle, \quad (21d)$$

$$I_5 = \langle -\frac{1}{5}r^5 - \frac{1}{2}sr^3 + \frac{2}{3}r^3Hr_x - \frac{5}{4}u_x^*u_xr^2 - \frac{27}{16}rr_x^2 - \frac{3}{16}s^2r + srHr_x + \frac{1}{2}r^2Hs_x + \frac{1}{4}r^2H(r^2)_x - \frac{1}{2}r(Hr_x)^2 + \frac{1}{2}sr_{xx} - i(u_{xx}^*u - u_{xx}u^*)r + 2u_x^*u_xHr_x - \frac{3}{4}r_{xx}Hr_x + \frac{1}{4}sHs_x - u_{xx}^*u_{xx} \rangle. \quad (21e)$$

ここで簡単のため $r = |u|^2$, $s = i(u_x^*u - u_xu^*)$ と置いた. (8), (9) を (21) へ代入し, θ に関する積分を行うと保存則は波のパラメータの関数として以下のように表せる:

$$I_1 = -\rho^2 + k, \quad (22a)$$

$$I_2 = -\frac{1}{2}(\rho^4 + \rho^2V) + \frac{1}{2}ck, \quad (22b)$$

$$I_3 = -\left(\frac{1}{3}\rho^6 + \frac{1}{2}\rho^4V + \frac{1}{4}\rho^2V^2\right) + \frac{1}{12}k(k^2 + 3c^2), \quad (22c)$$

$$I_4 = -\left(\frac{1}{4}\rho^8 + \frac{1}{2}\rho^6V + \frac{3}{8}\rho^4V^2 + \frac{1}{8}\rho^2V^3\right) + \frac{1}{8}kc(c^2 + k^2), \quad (22d)$$

$$I_5 = -\left(\frac{1}{5}\rho^{10} + \frac{1}{2}\rho^8V + \frac{1}{2}\rho^6V^2 + \frac{1}{4}\rho^4V^3 + \frac{1}{16}\rho^2V^4\right) + \frac{1}{16}k\left(c^4 + 2k^2c^2 + \frac{1}{4}k^4\right). \quad (22e)$$

ここで新たな変数 P, Q, U, W を関係式

$$P = \frac{1}{2}(c+k), \quad Q = \frac{1}{2}(c-k), \quad U = \rho^2 + \frac{V}{2}, \quad W = \frac{V}{2}. \quad (23)$$

で定義すると, I_n は次のように簡潔に表せる:

$$I_n = \frac{1}{n}(P^n - Q^n - U^n + W^n), \quad (n = 1, 2, \dots, 5). \quad (24)$$

最後に, (24) を (20) へ代入すると, P, Q, U, W に対する変調方程式が得られる. 条件 $P \neq Q \neq U \neq W$ の下でこれらの変数に対する方程式系は完全に分離でき, 以下のように書ける:

$$P_t - 2PP_x = 0, \quad (25a)$$

$$Q_t - 2QQ_x = 0, \quad (25b)$$

$$U_t - 2UU_x = 0, \quad (25c)$$

$$W_t - 2WW_x = 0. \quad (25d)$$

不等式 (11) を (23) で導入した変数で書き換えると

$$W < Q < P < U, \quad (26)$$

となり, 上記の条件は自動的に満たされることに注意する. Whitham 方程式 (25) は Hopf 方程式と同じ形をしており, 適当な初期条件の下で厳密に解くことが可能である.

最後に, ここで導いた変調方程式の意味について簡単に議論する. まず, (25a), (25b) より

$$k_t - \omega_x = 0, \quad (\omega = ck), \quad (27)$$

が出る. k を波の密度, ω を波の流束と解釈すると, (27) は波数の保存を表す. これはまた (10a) から導かれる方程式 $\theta_t = kc$, $\theta_x = k$ の無矛盾条件に他ならない. 他方, (10b) で定義される関数 χ に関しては, $\chi_t = V^2/4$, $\chi_x = V/2$ と書けるが, これらより (25d) が従う.

4. 初期値問題

ここでは方程式 (1) の零分散極限での解の挙動を, Whitham の変調理論に基づいて解析する. 発展の初期段階では分散効果は無視でき, 系は Hopf 方程式

$$R_{+,t} = 2R_+R_{+,x}, \quad (28a)$$

$$R_{-,t} = 2R_-R_{-,x}, \quad (28b)$$

で記述される. ここで, $R_+ = r + w$, $R_- = w$ は Riemann の不変量である (方程式 (6b), および (7) を参照). 時間の経過と共にこれら方程式の解は空間に特異点を生じ, その後多価関数に発展する. この状況を図 1 に示す. 図中 x_{\pm} は, 曲線 R_+ 上で微分 $R_{+,x}$ が無限大となる点を表す.

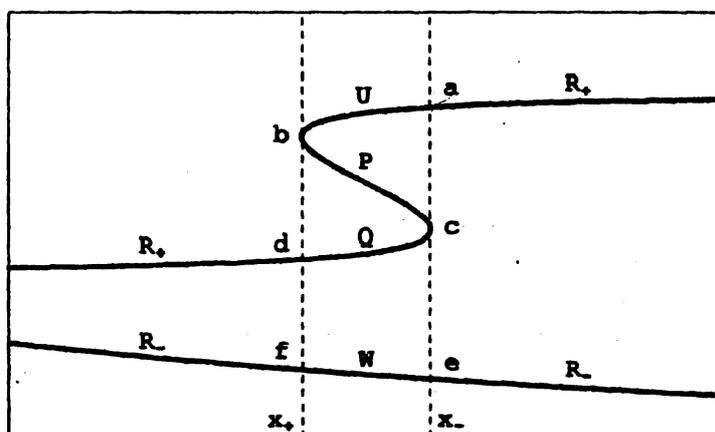


図 1 : x の関数としての Riemann 不変量

先に述べたように, 多価領域 $x_+ < x < x_-$ はゆっくりとした変調を受けた周期解 (8) で置き換えられるが, 境界 x_{\pm} では変調方程式の解を R_{\pm} に対する Hopf 方程式 (28) の解と滑らかに接続する. 接続条件は図 1 に示すように Riemann 不変量を割り当てると満足できることが示される. このとき境界条件は以下ようになる:

$$R_+ = Q, R_- = W, U = P, \text{ at } x = x_+, \quad (29a)$$

$$R_+ = U, R_- = W, P = Q, \text{ at } x = x_-. \quad (29b)$$

条件 $U = P$ は (12), (23) により $a = 0$ を意味するが, これは図 1 の点 b において小振幅の振動が始まることを示す. 他方, 条件 $P = Q$ は $k = 0$ と同等であり, 点 c は暗いソリトンの前面に対応している. 実際, $k \rightarrow 0$ の極限では, 周期波 (9) は代数型の暗いソリトン

$$|u|^2 = \rho^2 - \frac{2a}{a^2(x+ct)^2 + 1}, \quad (30)$$

に還元する. ここで $c = V - v$ で, 波の速度 v は 2 次方程式 $v^2 + 2\rho^2 v + 2\rho^2 a = 0$ を解くことにより決定される ((12) を参照).

具体例としてステップ型の初期条件 $r(x, 0) = 1/2 (x \leq 0)$, $r(x, 0) = 1 (x > 0)$, $\phi(x, 0)$

$= 0 (-\infty < x < \infty)$ を考える. この場合. 波の崩壊は $t = 0$ において原点 $x = 0$ で発生する. 境界条件 (29) の下で方程式 (25) を解くと次の解が得られる :

$$x_+ = -2t, \quad x_- = -t, \quad (31a)$$

$$c = \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{t} + 1 \right), \quad k = -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} + 1 \right), \quad \rho = 1, \quad V = 0, \quad (-2t < x < -t), \quad (31b)$$

$$\theta = -\frac{t}{4} \left(\frac{x}{t} + 1 \right)^2, \quad (-2t < x < -t), \quad (31c)$$

$$|u|^2 = 1 - \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x}{t} + 1 \right)^2}{-\sqrt{-\frac{x}{t} \left(\frac{x}{t} + 2 \right)} \cos \theta + 1}, \quad (-2t < x < -t), \quad (31d)$$

$$R_+ = 1, \quad R_- = 0, \quad |u|^2 = 1, \quad (x \geq -t), \quad (31e)$$

$$R_+ = \frac{1}{2}, \quad R_- = 0, \quad |u|^2 = \frac{1}{2}, \quad (x \leq -2t). \quad (31f)$$

$t = 200$ における $r = |u(x, t)|^2$ のプロファイルを x の関数として図 2 に示す. 多価領域は (30) で表される暗いソリトンの列で置き代わっているのが観察される.

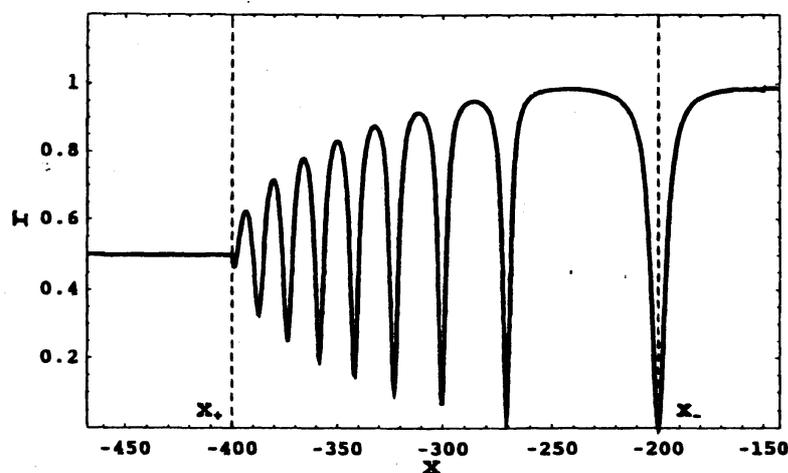


図 2 : ステップ型の初期条件に対する漸近解のプロファイル

5. おわりに

本報告における新しい側面は, 方程式 (1) に関連した Whitham の変調方程式の構造が極めて単純で, その積分が直ちに実行できることにある. この点は非線形シュレーディンガー方程式の対応する変調方程式が, 複雑に結合した非線形方程式系であるのとは対照的

である [10,11]. 結果はむしろ Benjamin-Ono 方程式の対応する変調方程式と類似している [12-14]. 本解析においては零分散極限で3価関数に発展するような初期値に限定したが, 多重周期波解を用いるとより一般の初期値についても同様な議論が可能である.

参考文献

- [1] D. Pelinovsky, *Phys. Lett.* **A197**(1995) 401.
- [2] C. Sulem, P.L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation*, Springer, New York, 1999, p. 201.
- [3] D.E. Pelinovsky, R.H.J. Grimshaw, *J. Math. Phys.* **36**(1995) 4203.
- [4] Y. Matsuno, *Phys. Lett.* **285** (2001) 286.
- [5] Y. Matsuno, *Inv. Problems*, **18** (2002) 1101.
- [6] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.
- [7] A.V. Gurevich, L.P. Pitaevsky, *Sov. Phys. JETP* **38** (1974) 291.
- [8] A.V. Gurevich, A.L. Krylov, *Sov. Phys. JETP* **65** (1987) 944.
- [9] Y. Matsuno, *Phys. Lett.* **A278** (2000) 53.
- [10] M.G. Forest, J.E. Lee, in: C. Dafermos et al. (Eds.), *Oscillation Theory, Computation, and Methods of Compensated Compactness*, IMA Volumes on Mathematics and its Applications **2**, Springer, New York, 1986, p. 35.
- [11] M.V. Pavlov, *Theor. Math. Phys.* **71** (1987) 584.
- [12] S. Yu. Dobrokhotov, I.M. Krichever, *Math. Notes* **49** (1991) 583.
- [13] Y. Matsuno, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** (1998) 1814.
- [14] Y. Matsuno, *Phys. Rev.* **E58** (1998) 7934.