

多流体系のジェットの分裂および液滴の生成

埼玉大学・工学部応用化学科 本間 俊司 (Shunji Homma)

Department of Applied Chemistry,
Saitama University

概要

層流軸対称のジェットが静止流体中で液滴へと分裂する現象について、数値流体力学により研究した。固定スタッガード格子上で有限差分近似した非圧縮性ニュートン流体の支配方程式は MAC 法で解き、ジェットと外側流体との界面の非定常運動は、Front-Tracking 法で追跡した。可視化された分裂の様子、特に液滴径およびジェットの長さに注目し、この現象を物理的に考察した。4つの無次元数 (Reynolds 数、Weber 数、Froude 数、粘度比) の組合せによる系統的な数値実験の結果から、Weber 数がジェットの長さに最も影響する無次元数であることがわかった。また、生成した液滴は、ノーマルモードの整数倍の体積で分布していることがわかった。最後に、ピンチオフ付近で界面が自己相似的に運動することを、あらかじめ伸張させた液滴の分裂実験で確認した。

1 はじめに

ノズルより生成したジェットが液滴へと分裂する現象は、Rayleigh の線形安定解析 [20] 以来、理論的な研究が多くなされてきた [2, など]。この現象が非線形波動現象として非常に興味深いだけでなく、生成する液滴の大きさが、燃焼、噴霧乾燥、混合、液々抽出など、工学的な装置設計に対し大変重要な因子であることも、この種の研究が盛んに行われた理由である。インクジェット印刷も、この種の現象のマイクروسケールでの応用である。

本研究では、ノズルから生成する層流軸対称のジェットがそれとは別の混じりあわない静止流体中で液滴へと分裂する現象について、数値流体力学により分裂の様子を可視化し、液滴径およびジェットの長さに注目し、この現象を物理的に考察する。

ジェット外側の流体がジェットの分裂に影響を及ぼす場合の線形安定解析は、Tomotika [27] によって行われた。しかしながら、Tomotika が提案した分散関係式は、当時解析的に解くことができず、両流体に Stokes 近似を適用した場合のみ解が示された。その後、数値的に解が求められ [15]、液滴径およびジェットの長さの推算式の基本とされてきた [5, 13, 16, 17]。

一方、液-液系のジェットの生成とその分裂に関する実験的な研究も数多くなされてきたが [1, 4, 10, 13, 16, 17]、Tomotika の線形安定解析で予測される液滴径およびジェットの長さは、限定された条件でのみ実験と一致することは明らかであり [13]、理論の修正が

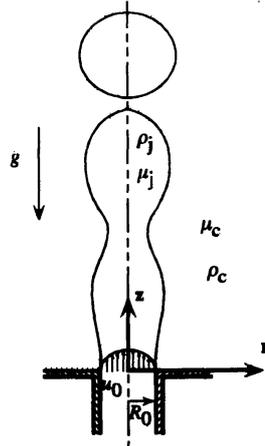


図 1: The geometry of the breakup of an axisymmetric jet into drops.

行われてきた [1, 5, 16, 17]。しかしながら、広い操作範囲における完全な理論の構築には至っていない。

最近、VOF (*Volume of Fluid*) 法 [9] を界面の非定常運動の追跡に用いた直接数値シミュレーションによる液-液系のジェット生成とその分裂に関する研究が行われた [21, 22, 23]。シミュレーションの結果は、これまでに報告された実験結果とほぼ一致し、直接シミュレーションがこの種の研究に非常に有効であることが示された。しかしながら、系統的な数値実験はこれまで、Xiaoguang[29] による低 Reynolds 数の場合が報告されているのみである。

そこで本研究では、低～中 Reynolds 数の範囲で系統的な数値実験を実施し、液-液系におけるジェットの生成およびその液滴への分裂に及ぼす無次元数の影響について検討した。また、液滴径の分布より分裂機構についても考察した。本報は以下の構成とする。まず、支配方程式および数値解法について述べる。ここでは、本研究で採用した Front-Tracking 法を中心に説明する。次に、系統的な数値実験の結果を示し、分裂機構等を考察する。最後に、最近話題となっているピンチオフのスケールリング則についてレビューし、液滴分裂直前の界面形状が、自己相似的に変化することを示す。

2 数値解析

2.1 支配方程式

図 1 に示すように、内径 R_0 のノズルから密度 ρ_j 、粘度 μ_j の流体を、それとは混じりあわない密度 ρ_c 、粘度 μ_c の静止流体中へ平均速度 u_0 で注入する。両流体を非圧縮性のニュートン流体とし、界面を境に密度および粘度が異なる一流体と考えれば、支配方程式は、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

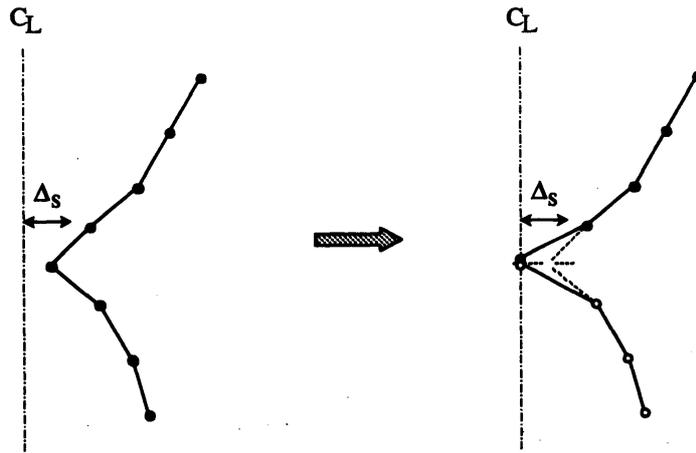


図 2: Illustration of an algorithm for front rupture.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla P + \text{Re}^{-1} \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \text{Fr}^{-1} \rho \mathbf{f} + \text{We}^{-1} \int_f \kappa \mathbf{n}_f \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) dA_f, \quad (2)$$

$$\frac{D}{Dt} \rho = \frac{D}{Dt} \mu = 0 \quad (3)$$

となる。ここに、 \mathbf{u} は速度ベクトル、 P は圧力、 \mathbf{f} は体積力ですべて無次元である。式 (2) は、三つの無次元数を含み、それぞれ Reynolds 数 ($\text{Re} = 2R_0 u_0 \rho_j / \mu_j$)、Weber 数 ($\text{We} = 2R_0 u_0^2 \rho_j / \sigma$; σ : 界面張力)、Froude 数 [$\text{Fr} = u_0^2 / (2R_0 g)$; g : 重力加速度] である。さらに、現象を支配する無次元数として密度比 ($\eta = \rho_c / \rho_j$) および粘度比 ($\lambda = \mu_c / \mu_j$) がある。式 (2) および (3) の ρ および μ はそれぞれ無次元の密度および粘度で、以下のよう

$$\rho, \mu = \begin{cases} 1 & \text{ジェット (分散相)}, \\ \eta, \lambda & \text{ジェット以外 (連続相)}. \end{cases} \quad (4)$$

界面張力は、界面要素 (フロント) の位置から計算される曲率 (κ) および法線ベクトル (\mathbf{n}_f) を用い計算し、界面のみで値を持つように、デルタ関数 [$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f)$; \mathbf{x}_f : 界面位置] を乗じて、局所的にはたらく体積力として考慮されている。なお、ドメイン内の温度勾配はなく、界面に汚染物質等もないものとし、 σ は定数とした。

本研究では軸対称流れを仮定したので、支配方程式は二次元円筒座標上で離散化した。時刻 $t = 0$ において、ドメイン内に流れはなく、 $u = v = 0$ を初期条件とした。ここに、 u および v はそれぞれ、半径方向 (r) および軸方向 (z) の速度成分である。境界条件は、ドメイン左側の中心軸に対称条件、右側およびノズル部より外にすべり壁の条件、ドメイン上部に流出条件 ($u = 0$ および $\partial v / \partial z = 0$) をそれぞれ与えた。ノズル流入部においては、発達したポアズイユ流れの速度分布

$$u = 0, \quad v = 2u_0 \{1 - (r/R_0)^2\} \quad (5)$$

2.2 Front-Tracking 法

ジェットの分裂など自由界面の運動を取り扱うためには、各時刻ごとの界面の位置を追跡する必要がある。本研究では、その位置を陽に追跡できる Front-Tracking 法 [28] を用いた。Front-Tracking 法では、界面を計算格子とは独立の要素として表現する。二次元の場合、点と点を結ぶ線要素の組を用いる。時刻 $t + \Delta t$ の界面位置は、時刻 t の速度から計算される。

$$\mathbf{x}_f^{n+1} = \mathbf{x}_f^n + \mathbf{u}_f^n \Delta t \quad (6)$$

ここに、 $n + 1$ および n は、それぞれ時刻 $t + \Delta t$ および t を表す。また、 \mathbf{u}_f は界面の速度で、界面近傍の計算格子の速度を平均して求められる。

Δt 後の密度および粘度は、式 (3) を直接解くかわりに、界面位置の情報から決定する。密度（粘度）差は界面上にのみ存在するので、

$$\nabla \rho = \int_f \Delta \rho \mathbf{n}_f \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) dA_f. \quad (7)$$

ここに、 $\Delta \rho$ は密度差である。発散をとれば、次のポアソン方程式

$$\nabla^2 \rho = \nabla \cdot \nabla \rho \quad (8)$$

が得られる。これを差分近似した離散化方程式を SOR 法で解き、ドメイン全体の密度分布を得た。粘度は、密度分布から次式で計算した。

$$\mu = \frac{1}{\Delta \rho} (|\rho_j - \rho| \mu_c + |\rho_c - \rho| \mu_j). \quad (9)$$

以上の手順で界面位置、密度および粘度が得られ、圧力および速度は、通常の粘性流体の数値解法で求めることができる。本研究では、MAC 法を用いた。なお、式 (1) および (2) は空間に対して二次、時間に対して一次精度の差分近似を用いた。

ジェットの分裂を取り扱うために、Front-Tracking 法のアルゴリズム [28] にいくつかの修正を加えた。ジェットが液滴へと分裂する場合、あるいは液滴がさらに小さな液滴へと分裂する場合、フロントを二つに分離する必要がある。本研究では、図 2 に示すような、単純な分裂アルゴリズムを採用した。軸対称流れを仮定した場合、界面の分裂は主に中心軸上で起こるため、界面要素を結ぶある点が、中心軸からの距離 Δs 以内に到達した場合分裂したと判断し、その点を中心軸まで移動し、二つの独立したフロントへと分離させた。 Δs は物性値等の条件によって異なると予想されるが、最小格子間隔の 1/2 程度を採用すれば、分裂後の流動状態に大きな影響を与えないことを確認した。なお、液滴の合一および一旦分裂した液滴のジェットとの再合一は考慮しない*1。

*1 液滴どうしの衝突によって、それらは合一または反発する。これは、非常に重要で興味深い問題であるが、合一するか反発するかを左右する条件を一意的に決定することは現時点で困難であると思われる [8, 19]。

ジェットの分裂を引き起こすための人工的な摂動は与えなかった。ただし、ジェット生成の初期段階において、ノズル近傍に界面の振動が誘起され、その後も非常に小さな振動が続くことを確認しており、これがジェットの分裂を引き起こす摂動となっていると考えられる。

計算コードの妥当性は、実験結果と比較することによって検証した。ジェットの分裂の様子は、Bright の実験結果 [1] と、ジェットの長さおよび分裂した液滴の大きさは、Kitamura らの実験結果 [13] と、それぞれ比較した。本計算コードによるシミュレーション結果は、これらの実験結果とよく一致した。結果の詳細は、既報の文献 [11] を参照されたい。なお、液-液系軸対称流れのジェットの分裂については、気-液系とは異なり、界面の運動の時間変化を詳細に記録したデータが少ない。本計算コードのより詳しい検証は、Song らが高速カメラで撮影したジェットの分裂実験 [24] との比較にて実施しており、現時点で非常に良い結果を得ている。特に、Dripping Mode^{*2}の界面の運動については、シミュレーション結果と実験結果とが極めて良く一致している^{*3}。

3 結果および考察

3.1 ジェットの長さとな次元数との関係

ジェットの長さが、Reynolds 数、Weber 数、Froude 数、粘度比によってどのように変化するかを数値実験の結果から考察する。数値実験は、 $Re = 80, 160, 320$; $We = 2, 5, 8$; $Fr = 4, 8, 32, \infty$; $\lambda = 0.2, 1.0, 10.0$ の組合せで実施した。密度比は、水-油系を想定すればほとんど一定とみなしてよく、 $\eta (= 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} / 800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}) = 1.25$ を採用した。

図 3 に、 $Re = 160$ および $\lambda = 1.0$ におけるジェットの長さの時間変化を示す。Weber 数が増加するにつれて [(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c)] ジェットが長くなることがわかる。これは、Weber 数の増加がジェットの流入速度に比例していることから理解できる。また、どの Weber 数においても、ジェットの長さに対する Froude 数の影響は小さいことがわかる。

図 4(a) に、 $We = 2, Fr = 4$ および図 4(b) に、 $We = 8, Fr = 32$ におけるジェットの長さの時間変化をそれぞれ示す。どちらの場合も粘度比は $\lambda = 1.0$ とし、Reynolds 数を 80、160、320 と変化させた。We = 2、Fr = 4 の場合、ジェットの長さは短く、液滴はノズル近傍で生成した。また、Reynolds 数によりジェットの長さはそれほど変化せず、ジェットの長さに対する Reynolds 数の影響は小さいと言える。We = 8、Fr = 32 の場合は、各 Reynolds 数により分裂のパターンは異なるものの、定常に達した時のジェットの長さは、どの Reynolds 数でもおよそ 30 であり、この場合もジェットの長さに対する Reynolds 数の影響は小さいと言える。

図 5 に $Re = 160, We = 2, Fr = 4$ におけるジェットの長さの時間変化を示す。ここでは、粘度比を 0.2、1、10 と変化させた。 $\lambda = 10$ の場合、すなわち外側の流体がジェッ

*2 ジェットが生成する前にノズル近傍で液滴が生成するモード。

*3 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference (July 6 - 10, 2003, Honolulu) および化学工学会第 68 年会 (3 月 23 日、2003 年、東京大学) にて発表予定。

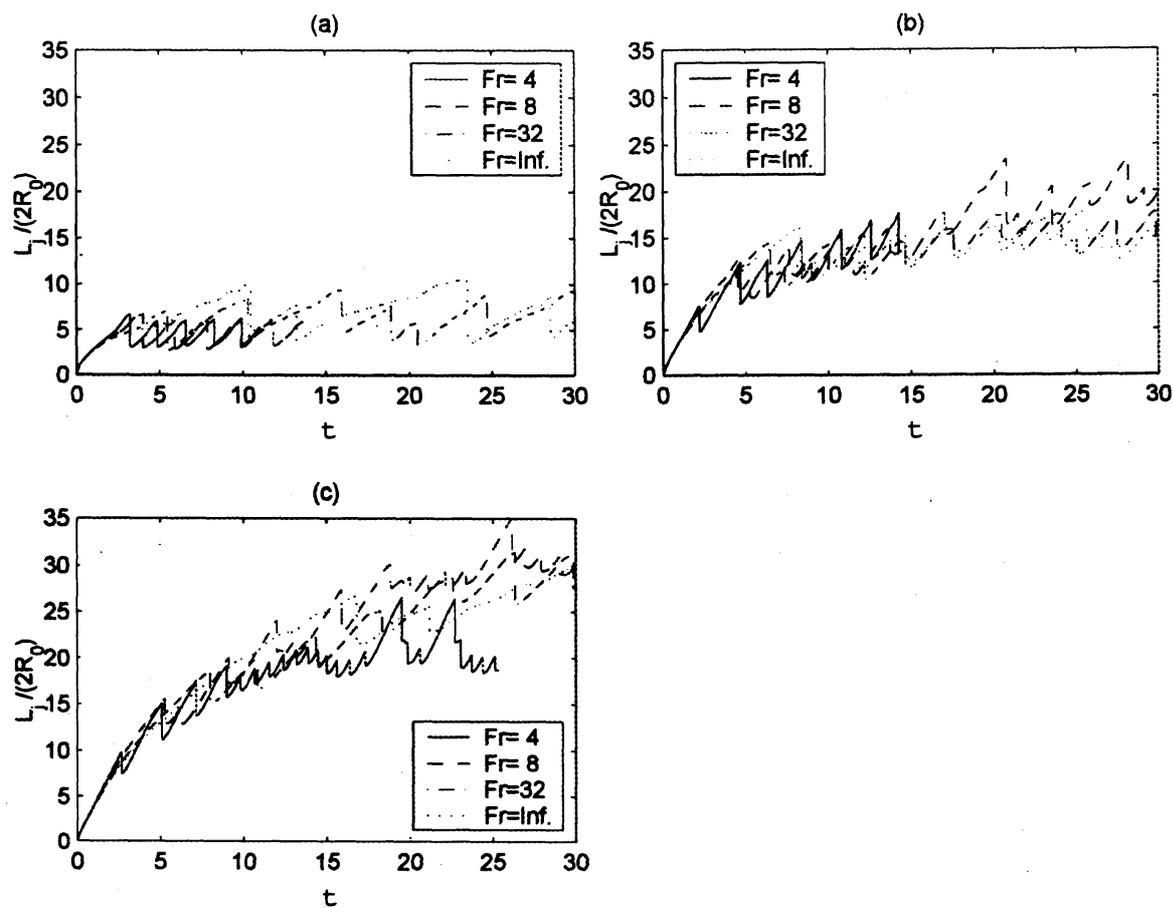
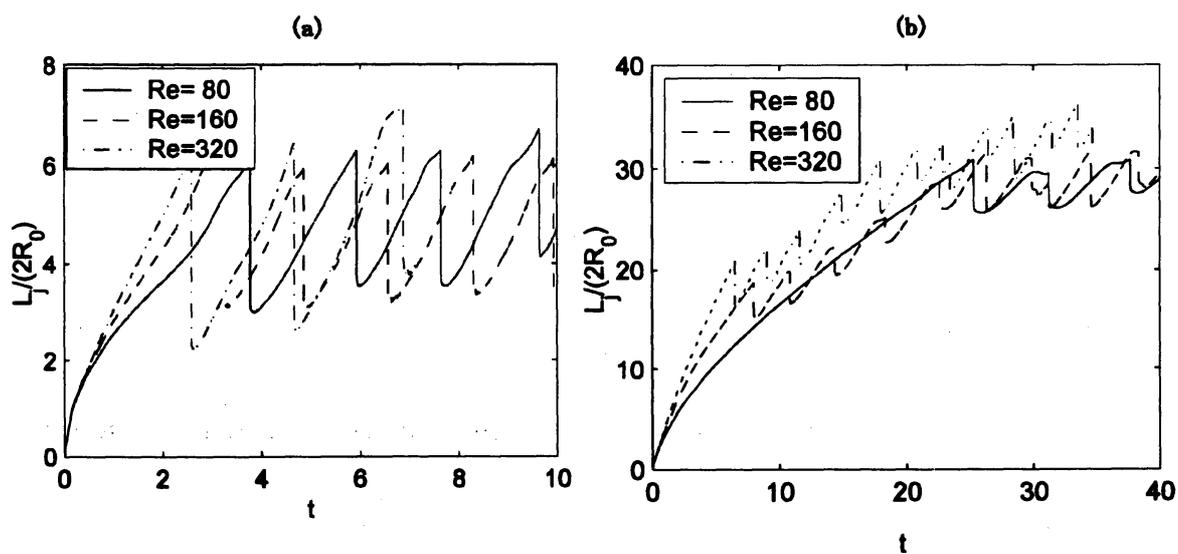


図3: The position of the leading edge of the jet versus time for $Re = 160$ and $\lambda = 1$ [(a) $We = 2$, (b) $We = 5$, and (c) $We = 8$].

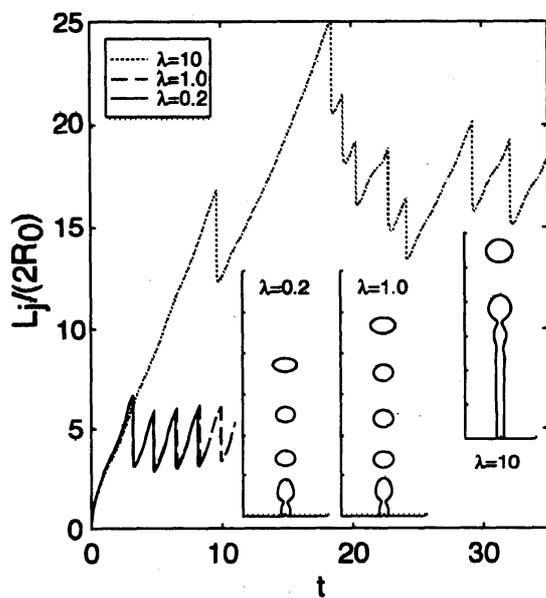
トと比較して10倍粘度が高い場合、ジェットの高さは他の場合と比較して非常に長い。Tomotikaの線形安定解析[27]によれば、粘度比が高くなるにつれて、界面張力波の成長速度が遅くなることがわかっており、シミュレーションの結果はこれと一致する。すなわち、高い粘度の外側流体がジェットの安定化に寄与しているものと考えられる。 $\lambda = 1.0$ および $\lambda = 0.2$ の場合は、ジェットの長さおよび分裂の様子も極めて類似しており、外側の流体の粘度がジェットと同じかそれよりも小さい場合は、ジェットの長さに対する粘度比の影響は小さいと言える。

3.2 液滴径分布と分裂機構

図6に、 $We = 5$ および 8 におけるジェットの分裂挙動を $Fr = 8$ (左)と $Fr = 32$ (右)のそれぞれの場合について示す。どの条件においても界面張力波が観察されるが、 $Fr = 8$ 、 $We = 8$ の条件を除き、液滴径に分布が見られる。線形安定理論では、界面張力波のうち最も早く成長するモードによって液滴径が決定するので、本来分布は生じない。



⊠ 4: The position of the leading edge of the jet versus time for the Reynolds number of 80, 160, and 320. (a): $We = 2$, $Fr = 4$, and $\lambda = 1$, (b): $We = 8$, $Fr = 32$, and $\lambda = 1$.



⊠ 5: The position of the leading edge of the jet versus time for the viscosity ratio of 10, 1, and 0.2. The shape of the jet and the drops are also shown in the figure ($We = 2$, $Fr = 4$, and $Re = 160$).

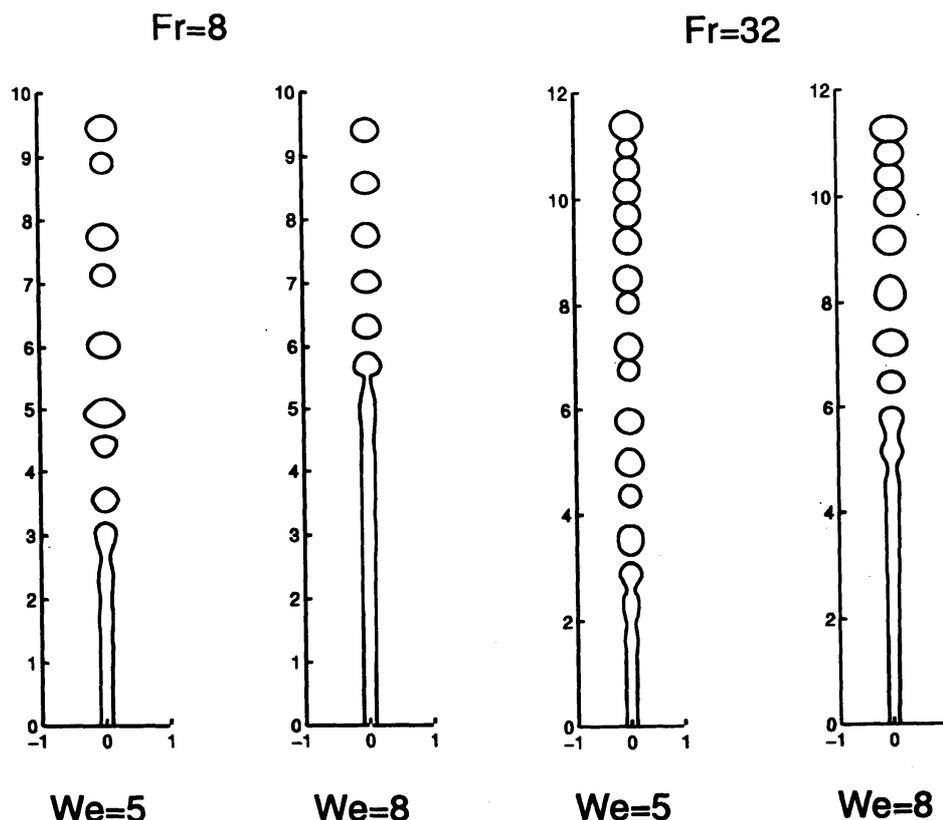


図 6: The shape of the jet and the drops for different Froude and Weber numbers ($Re = 160$, $\lambda = 1$, $\eta = 1.25$).

ここで、他のモードが存在するかどうかを確認するため、ジェット表面に現れた界面張力波の単一モードの体積 ($\tilde{V}_{P, \text{single}}$) で規格化した液滴径を、分裂した順にプロットした (図 7)。分裂の初期に、ばらつきが見られるものの、液滴径は、ほぼ 1 及び 2 の線に集中している。このことから、最も早く成長するモードが支配的であるにもかかわらず、ある頻度で二つのモードが 1 つの液滴として生成していることがわかる。以上のことから、界面張力波が成長する条件においては、液滴径に分布が生じていても、基本的には、単一モードによる分裂機構で説明できることがわかった。しかしながら、二つのモードの分裂頻度については、今のところ予測できておらず、今後の課題として残されている。このようなジェットの多節分裂の詳細は文献 [12] を参照されたい。

4 ピンチオフの相似則

ジェットの分裂のように、界面が分裂する現象は非常に興味深い。最近、その分裂点 (ピンチオフ) 近傍の界面形状や速度に対して相似則が成立することが明かとなった [7]。分裂点近傍のように、極めて小さなスケールの範囲では、ノズル径や流入速度等の比較的大きなスケールが分裂に影響を及ぼすことはなく、その物性値、すなわち密度、粘度、お

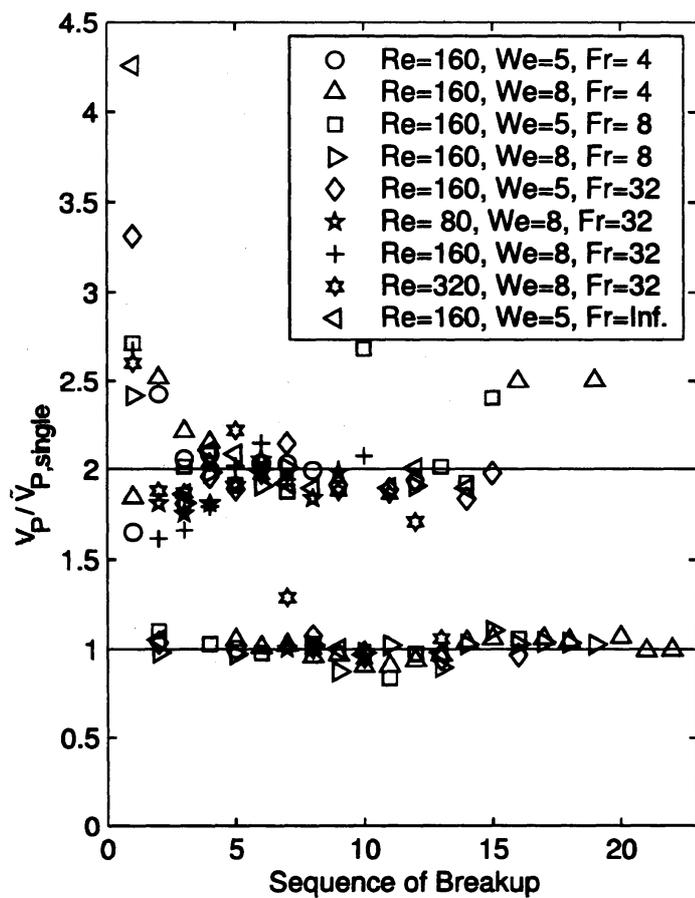


Figure 7: The volume of the drops versus the order in which they are released. The volume is normalized by the averaged equivalent volume of the drops broken off at the first node of the most unstable wave ($\bar{V}_{P, single}$).

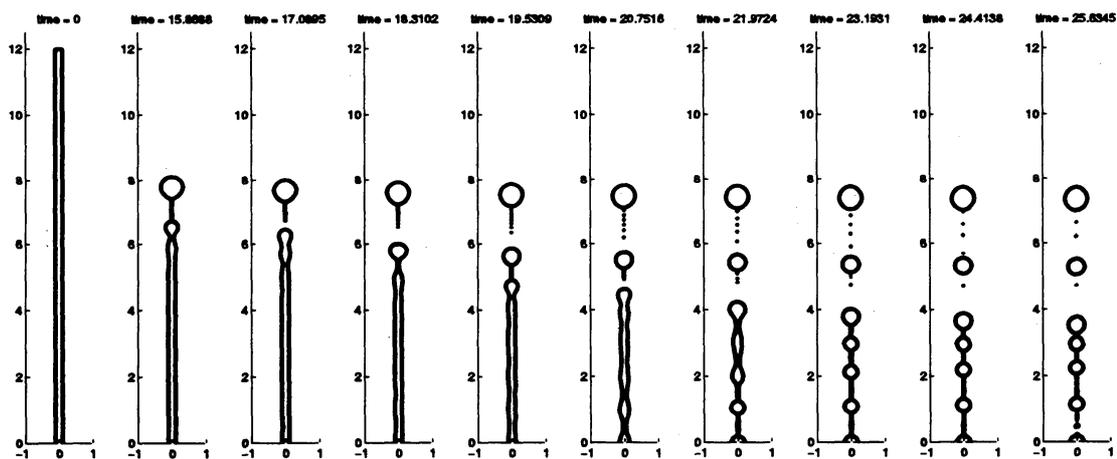


Figure 8: Entire shape evolution of an initially stretched ligament.

よび界面張力、のみによって現象が支配される。これまで、非粘性流体 ($Re = \infty$)、ストークス流体 ($Re \sim 0$)、およびナビエストークス流体のジェットについて外側の流体が無視できる場合の相似則が明らかとなり [6, 18, 26]、外側流体およびジェット共にストークス流体の場合も相似則が報告されている [14]。また、分裂点近傍では長さのスケールが極めて小さく、 $Re \sim 0$ となることから、どの場合も漸近的に両相がストークス流体の相似則 [14] になると考えられており*4、そこに到達するまでの遷移域の界面の挙動を明らかにすることが今後の課題とされている [3]。

一方、界面追跡を利用した直接シミュレーションにおいても、相似則を明らかにすることは極めて重要である。すなわち、相似則を分裂のモデルとして利用すれば、ピンチオフが起こる時刻および位置が正確に予測でき、シミュレーションの正確さを高めることができる。これまで、ジェットの分裂の問題に直接数値シミュレーションによる数値実験が有効であることを示してきたが、遷移域の相似則を明らかにするためのツールとしても直接数値シミュレーションが有効であることを以下に示す。

図 8 の一番左側のフレームに示すように、時刻 0 において静止流体中に液柱を配置し、液柱先端における界面張力の不均一によってその液柱が液滴へと分裂する現象について数値実験を行った。両相は、非圧縮性のニュートン流体で互いに混じり合わないとするれば、支配方程式 (1)、(2)、(3) およびそれらの数値解法をそのまま利用できる。ただし、界面張力以外の外力は働かないとし、 $\mathbf{f} = 0$ とした。境界条件は、ドメインの上部および右側にすべり壁の条件を、底部および左側に対称条件をそれぞれ与えた。なお、この現象は界面張力および粘度が支配的なので、Ohnesorge 数 ($Oh = \mu_j / \sqrt{2a_0\rho_j\sigma}$; a_0 : 液柱の初期半径) と粘度比がパラメータとなる。

図 8 に液柱が液滴へと分裂の様子を示す。計算条件は、 $Oh = 4.21 \times 10^{-1}$ 、 $\lambda = 1.0$ である。液柱先端では、End-Pinching[25] により球状部分が生じ、次いで液柱本体とその球状部分の間に細長いスレッドが生成する。そのスレッドは、液柱側で最初に分裂 (ピンチオフ) し、そのスレッドからいくつかのサテライトドロップが生成している。また、液柱側でも、これと同様のプロセスが始まっている。

図 9 に液柱先端で起こる液滴への分裂の様子 (左) と分裂に至るまでの界面形状の時間変化 (右) を示す。ピンチオフ点近傍においては、ダブルコーンの形状を保ったまま、スレッドの径が徐々に小さくなり、最終的に分裂に至る。この界面形状をスレッドの最小径 R_{\min} およびそこでの位置 Z_{\min} によって規格化すると、ほぼ一つの線に重なる [図 10 (左)] ことから、この界面の運動は自己相似であることがわかる。図 10 (右) に、ピンチオフ点近傍におけるスレッド内外の流れおよびダブルコーンの角度を示す。本計算で得られた角度 [スレッド (上) 側: 1.5° 、液柱 (下) 側: 77.8°] は、Lister らの境界要素法による計算値 (スレッド側: 5.9° 、液滴側: 78.2°) [14] とほぼ一致している。

5 まとめ

層流軸対称のジェットが静止流体中で液滴へと分裂する現象について、数値的に検討した。Front-Tracking 法を用いた計算コードによる数値実験の結果、Weber 数がジェットの長さにも最も影響する無次元数であることがわかった。また、生成した液滴は、ノーマル

*4 ただし、分子レベルのスケールに到達する前に分裂が起こる場合。

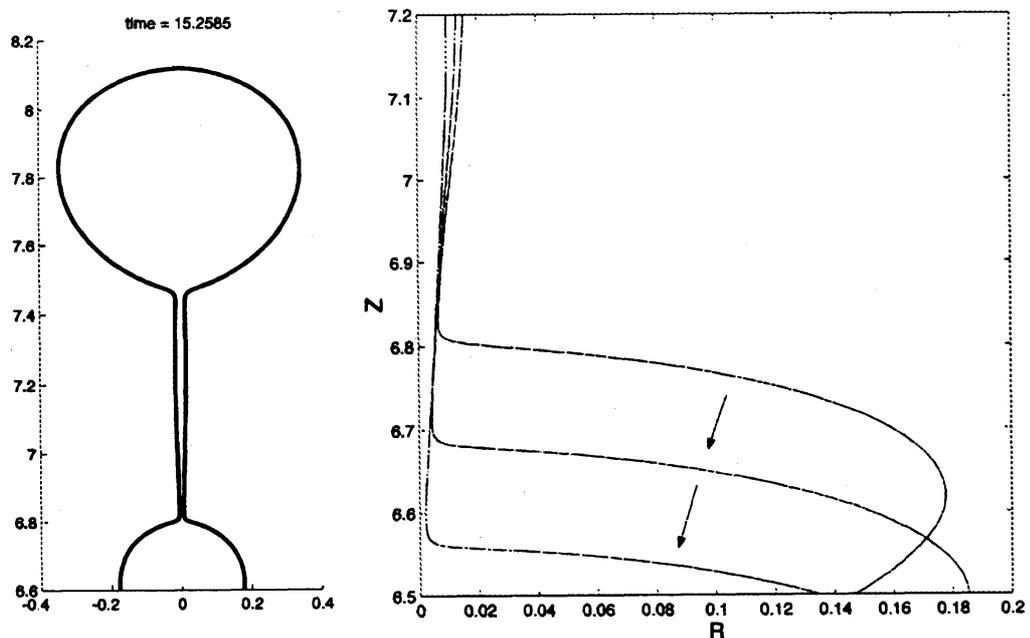


Figure 9: Thread pinch-off from a main body of a column (left) and interfacial motion of a conical shape (right).

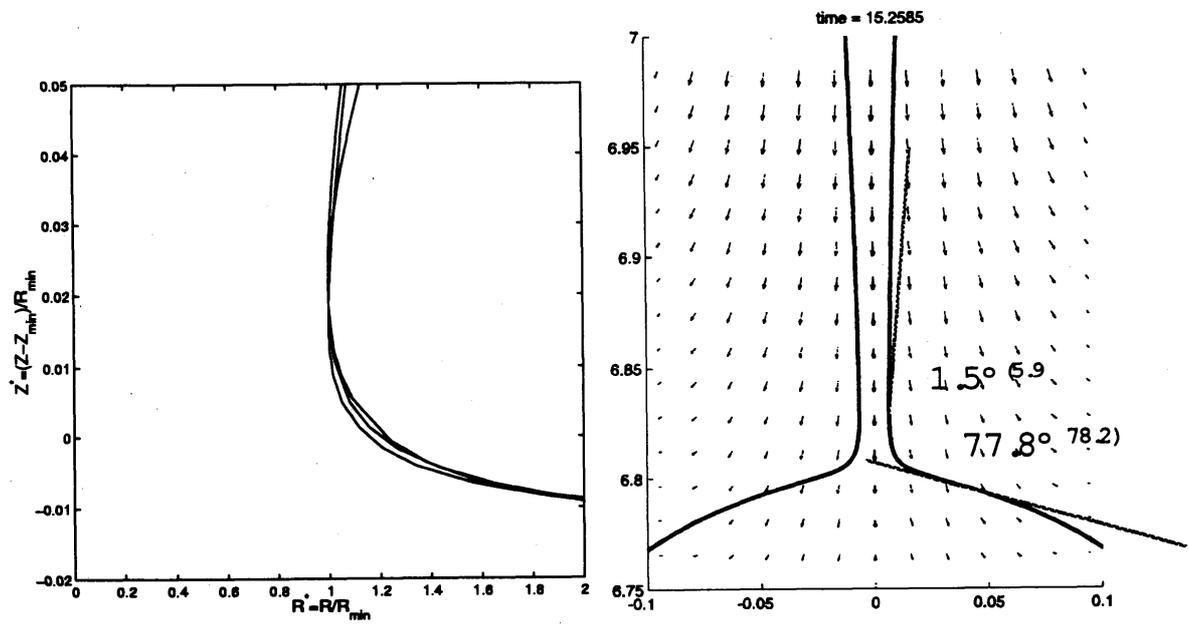


Figure 10: Self-similar motion of a thread pinch-off (left) and close-up of the point at pinch-off.

モードの整数倍の体積で分布していることがわかった。この他に、最近の話題として、ピンチオフの相似則について紹介し、Front-Tracking 法による数値解析により、分裂点付近で界面が自己相似的に運動することを、あらかじめ伸張させた液滴の分裂実験で確認した。ピンチオフの相似則を検討することは、物理現象として興味深いだけでなく、界面を有する多流体の流動シミュレーションに不可欠な界面分裂のモデル化に必要であり、今後の展開が期待される。

謝辞

本研究は、日本学術振興会、海外特別研究員制度によって助成された。Worcester Polytechnic Institute の Greta Tryggvason 教授には、計算コードの提供および様々な助言を頂いた。Hong Ik University の Museok Song 教授には、実験データを提供頂いた。埼玉大学、古閑二郎教授および松本史朗教授には、多方面のサポートおよび的確な助言を頂いた。ここに感謝する。

参考文献

- [1] A. Bright. Minimum drop volume in liquid jet breakup. *Chem. Eng. Res. Des.*, 63:59–66, 1985.
- [2] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover, 1981.
- [3] I. Cohen and S. R. Nagel. Testing for scaling behavior dependence on geometrical and fluid parameters in the two fluid drop snap-off problem. *Phys. Fluids*, 13:3533–3541, 2001.
- [4] T. K. Das. Droplet formation with single and multiple nodes from a liquid jet in immiscible liquids. *Atomization Sprays*, 7:407–415, 1997.
- [5] T. K. Das. Prediction of jet breakup length in liquid-liquid systems using the Rayleigh-Tomotika analysis. *Atomization Sprays*, 7:549–559, 1997.
- [6] J. Eggers. Universal pinching of 3d axisymmetric free-surface flow. *Phys. Rev. Letters*, 71:3458–3460, 1993.
- [7] J. Eggers. Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows. *Rev. Modern Phys.*, 69:865–929, 1997.
- [8] J. Eggers, J. R. Lister, and H. A. Stone. Coalescence of liquid drops. *J. Fluid Mech.*, 401:293–310, 1999.
- [9] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [10] C. B. Hayworth and R. E. Treybal. Drop formation in two-liquid-phase systems. *Ind. Eng. Chem.*, 42:1174–1181, 1950.
- [11] S. Homma, J. Koga, S. Matsumoto, and G. Tryggvason. Numerical investigation of a laminar jet breakup into drops in liquid-liquid systems. *Proc. Int. Conf. Liquid Atomization Spray Systems*, (CD-ROM), 2000.
- [12] S. Homma, J. Koga, S. Matsumoto, and G. Tryggvason. Formation of a jet and its breakup into drops in liquid-liquid systems. *Theor. Appl. Mech.*, 51:241–250,

- [13] Y. Kitamura, H. Mishima, and T. Takahashi. Stability of jets in liquid-liquid systems. *Can. J. Chem. Eng.*, 60:723–731, 1982.
- [14] J. R. Lister and H. A. Stone. Capillary breakup of a viscous thread surrounding by another viscous fluid. *Phys. Fluids*, 10:2758–2764, 1998.
- [15] B. J. Meister and G. F. Scheele. Generalized solution of the Tomotika stability analysis for a cylindrical jet. *AIChE J.*, 13(4):682–688, 1967.
- [16] B. J. Meister and G. F. Scheele. Drop formation from cylindrical jets in immiscible liquid systems. *AIChE J.*, 15(5):700–706, 1969.
- [17] B. J. Meister and G. F. Scheele. Prediction of jet length in immiscible liquid systems. *AIChE J.*, 15(5):689–699, 1969.
- [18] D. T. Papageorgiou. On the breakup of viscous liquid threads. *Phys. Fluids*, 7:1529–1544, 1995.
- [19] J. Qian and C. K. Law. Regimes of coalescence and separation in droplet collision. *J. Fluid Mech.*, 331:59–80, 1997.
- [20] J. W. S. Rayleigh. On the instability of jets. *Proc. London Math. Soc.*, 10:4–13, 1879.
- [21] J. R. Richards, A. N. Beris, and A. M. Lenhoff. Steady laminar flow of liquid-liquid jets at high Reynolds numbers. *Phys. Fluids A*, 5(7):1703–1717, 1993.
- [22] J. R. Richards, A. N. Beris, and A. M. Lenhoff. Drop formation in liquid-liquid systems before and after jetting. *Phys. Fluids*, 7(11):2617–2630, 1995.
- [23] J. R. Richards, A. M. Lenhoff, and A. N. Beris. Dynamic breakup of liquid-liquid jets. *Phys. Fluids*, 6(8):2640–2655, 1994.
- [24] M. Song, S. Homma, and K. Hong. Formation of oil drops discharged underwater. *Proc. 9th Int. Offshore and Polar Eng. Conf.*, I:390–396, 1999.
- [25] H. A. Stone, B. J. Bentley, and L. G. Leal. An experimental study of transient effects in the breakup of viscous drops. *J. Fluid Mech.*, 173:131–158, 1986.
- [26] L. Ting and J. B. Keller. Slender jets and thin sheets with surface tension. *SIAM J. Appl. Math.*, 50:1533–1546, 1990.
- [27] S. Tomotika. On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. *Proc. Royal Soc. London A*, 150:322–337, 1935.
- [28] S. O. Unverdi and G. Tryggvason. A front tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.*, 100:25–37, 1992.
- [29] Z. Xiaoguang. Dynamics of drop formation in viscous flows. *Chem. Eng. Sci.*, 54:1759–1774, 1999.