

領域増大速度に依存する縞模様分岐

北海道大学 知識メディアラボラトリ 上田 肇一 (Keiichi UEDA)

Meme Media Laboratory, Hokkaido University

北海道大学 電子科学研究所 西浦 廉政 (Yasumasa NISHIURA)

Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University

1 はじめに

Turing パターンの発見以来, 反応拡散系に関する研究が盛んに行われてきた. 90 年代に入り, 動物の表皮パターン, とくに魚の縞模様や BZ 反応に代表される化学反応系においては実験系とその対応もつくようになり, モデルの構成とその解析が盛んに行われている. 数理生物学における重要な未解決問題として「パターン選択問題」, すなわち「不安定化を起こす可能性のある波数から実際どの波数が選ばれるのか」という問題がある. 最近, 生物活動にとって重要な特徴であるパターンの再現性において領域の成長効果が注目されており, いくつかのモデルにおける数値実験によって, それが生物系においても定性的に合致することが示されている [5].

本稿では, 時間とともに領域が成長することによってみられるパターンダイナミクスにおける, パラメータの時間依存スケールとダイナミクスの変化の時間スケールとの関係について考察する. 図 1 は Gray-Scott モデルにおいて 1 山パルスを初期値にとり, 領域を (A) 速度 $v = 0.0001$, (B) 速度 $v = 0.00005$ で線形に拡大したときの数値シミュレーションの結果である. (A) では初期値にとった 1 山パルスは領域がある長さに達した時点で 2 山に分裂し, その後も領域の拡大とともに分裂を繰り返している. 分裂が起きるときにはすべてのパルスが同時に分裂し, パルスの数は領域が大きくなることにより $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow 2^n$ と増加していることがわかる. (B) の場合にみられるパターンは (A) と異なっている. 実際, 分裂が起きることでパルスの数は $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \dots$ と遷移しており, さらにどのパルスが分裂しているかを注意深くみるとパルスは 1 つおきに分裂していることがわかる. このような増大速度によって遷移パターンの違いが起きる仕組みをパルス解の分岐構造を調べることによって明らかにする.

2 1 山, 2 山パルス解の分裂

本稿では以下の Gray-Scott モデル ([3]) を用いて数値実験を行った.

$$\begin{cases} u_t = D_u u_{xx} - uv^2 + A(1 - u) \\ v_t = D_v v_{xx} + uv^2 - (A + k)v. \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで D_u と D_v は拡散係数であり, 境界条件はノイマン境界条件を採用した. 図 2 は $D_u/D_v = 2$ のときの相図である. 図 2 の領域 1 は安定な 1 山パルス解が存在する領域で

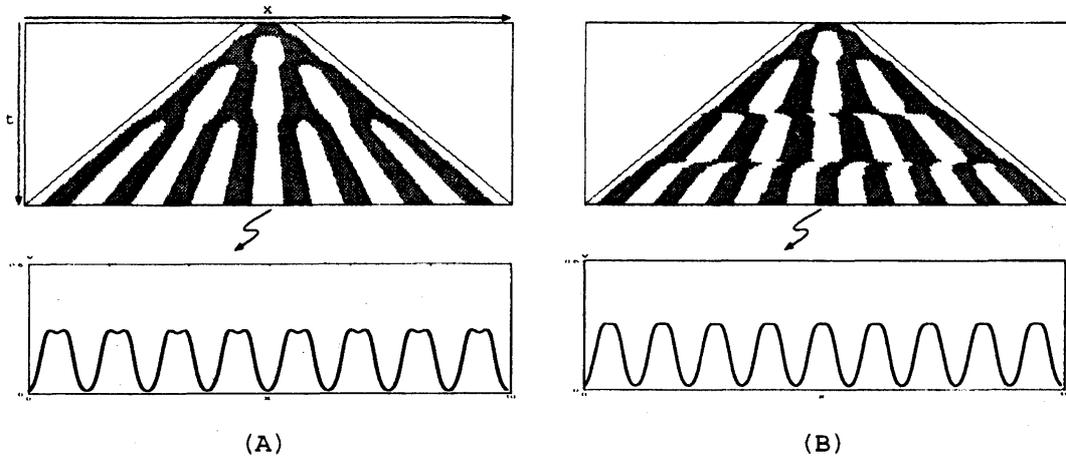


図 1: 1次元領域を一定速度で拡大させたときのパルスの分裂過程と解の最終状態. 色が暗い部分はパルスが存在する部分である. (A) 速度 $v = 0.0001$, (B) 速度 $v = 0.00005$

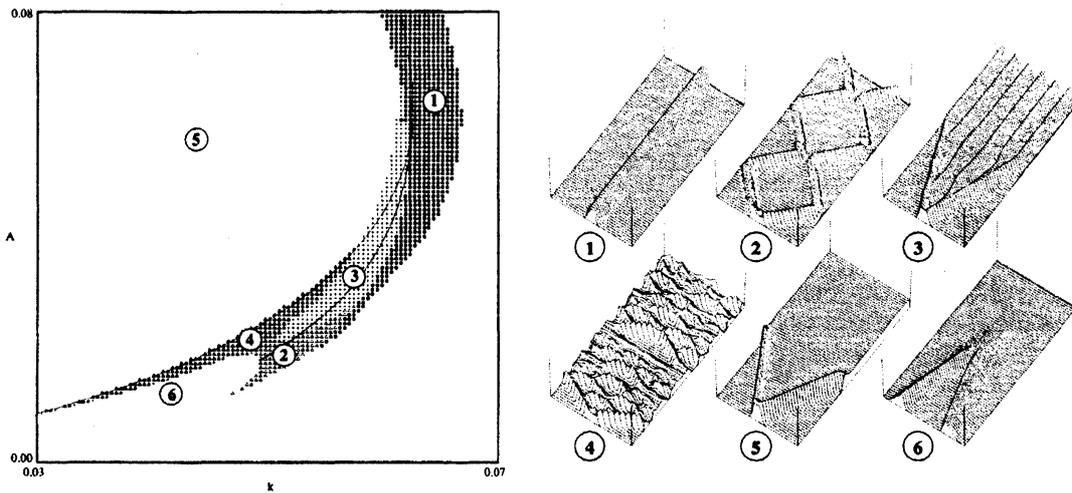


図 2: 1:安定1山定常パルス解, 2:トラベリングパルス解 (反射), 3:パルス分裂パターン, 4:複雑時空パターン, 5:フロント解, 6:トラベリングパルス解 (対消滅)

ある. $A = 0.04$ に固定し k をパラメータとすると 1 山定常パルス解に対してある値 k_c が存在し, $k > k_c$ に対して安定 1 山パルス解が存在し, $k < k_c$ においてパルスの分裂現象がみられることがわかる (図 2 領域 3). このようなパルスの分裂現象にはサドル・ノード分岐が重要な役割を果たしており, $k = k_c$ においてサドル・ノード分岐が起きていることが知られている [4]. これから $D_u/D_v = 2$, $A = 0.04$ とし, k を k_c より小さい値 $k = 0.0608$ で固定し数値実験を行う.

2.1 分岐図

領域長を時間の関数としてではなく分岐パラメータとして定常パルス解の分岐図を数値的に求める. 分岐解の追跡には分岐解析ソフトウェア AUTO97 [1] を使用した. 図 3(A) は 1 山定常パルス解の分岐図である. 実線は安定な定常解, 点線は不安定な定常解である. パラメータ k を $k < k_c$ に固定したとしても領域長がある程度短ければパルス解は安

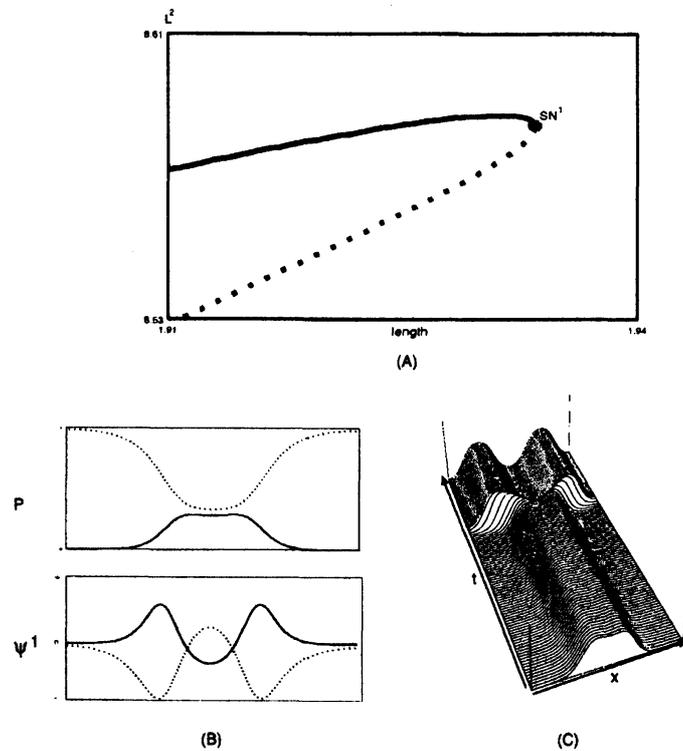


図 3: (A) 領域長を分岐パラメータとしたときの 1 山定常解の分岐図. 実線は安定定常解, 点線が不安定定常解を示す. SN^1 はサドル・ノード分岐点. (B) 分岐点 SN^1 における解 $P(x)$ 及び 0-固有値に対する固有関数 ψ^1 . 実線は v , 点線は u に対応する値である. (C) 領域長を SN^1 より大きい値で固定したときにみられる 1 山パルスの分裂 (v のみ表示).

定に存在することができ, 分裂は起きない. しかし, 領域長がある長さになったとき, 1 山パルス解はサドル・ノード分岐によって不安定化し, それ以上長い領域では定常 1 山パ

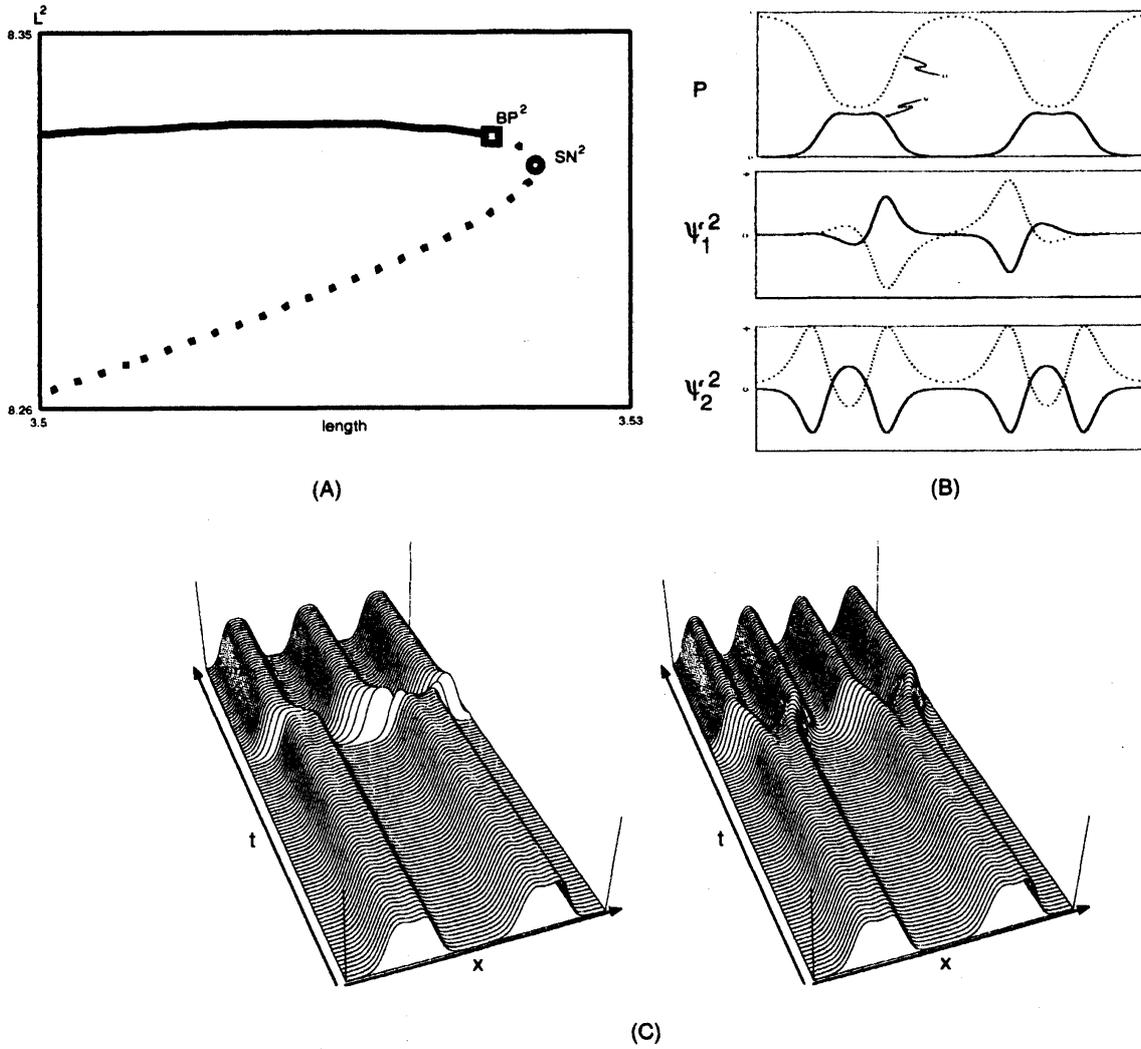


図 4: (A) 2山定常解の分岐図. 実線が安定解, 点線が不安定解である. 安定解はサドル・ノード分岐点 SN^2 より小さいパラメータ (領域長) で現れる分岐点 BP^2 で不安定化する. (B) SN^2 における解及び実部が正である固有値に対する固有関数 ψ_1^2 および 0-固有値に対する固有関数 ψ_2^2 . (C) 左図: BP^2 と SN^2 の間の不安定定常解の遷移. 右図: パラメータを SN^2 より大きく固定したときの 2山パルスの分裂.

ルス解の存在領域が消滅する。サドル・ノード分岐点における固有関数はパルスの中心部にくぼみをもっており (図 3 (B)), 領域の長さをそのサドル・ノード点を越えたところに固定し, 数値シミュレーションを行うとこの固有関数の方向にパルスは変形し, その後 2 山パルスに遷移する様子がみられる。(図 3 (C))

一方, 2 山定常解においてもサドル・ノード分岐点が存在する (図 4 (A)). しかし, 2 山安定定常解はサドル・ノード分岐点に達する前に現れる分岐点 BP^2 において不安定化している。図 4 (B) は点 BP^2 におけるパルス解の形及び 0-固有値に対する固有関数の形である。固有関数の形から 2 山の内どちらか一方のパルスが分裂することが示唆される。実際, 領域の長さを BP^2 と SN^2 の間に固定し, 定常解に固有関数 ψ_1^2 方向に正の摂動を加えると左のパルスが分裂し, 負の摂動を加えると右のパルスが分裂することが確かめることができる。つまり, BP^2 と SN^2 の間においては 2 山パルス解はどちらかのパルスが分裂を開始し, 2 山から 3 山への解の遷移がみられる (図 4 (C) 左図)。

サドル・ノード分岐点より右においては 2 山パルスに対して ψ_1^2 と ψ_2^2 方向の不安定性をもっており, 不安定化に対し 2 つの分裂方向が選択肢として挙げられる。しかし, サドル・ノード分岐点より大きな領域長に固定し数値実験を行うと 2 山パルス解は固有関数 ψ_2^2 の方向に変形し, 両方のパルスが一斉に分裂方向が選択される (図 4 (C) 右図)。これはサドル・ノード分岐点における固有関数 $\psi_1^2(x), \psi_2^2(x)$ と定常解 $P(x)$ に対して

$$\langle P, \psi_1^2 \rangle = 0, \quad \langle P, \psi_2^2 \rangle = O(1)$$

という関係が成り立つため, 解の形が定常解に近いとき ψ_1^2 方向の不安定化は非常に小さく, ψ_2^2 の方向が支配的になるということから説明できる。

2.2 領域増大系における分裂

領域長を時間とともに増大させたときのパルスの分裂現象をみる。初期状態として 2 山パルス解が安定に存在できるくらい領域長を短くとり, 領域を時間とともに一定速度 v で一様に拡大する。

$v = 1.0 \times 10^{-7}$ の場合

領域の成長速度が十分遅い場合について考える。領域が時間とともに拡大するにしたがってパルス解は安定な枝に沿ってゆっくり変形する。分岐点 BP^2 に達した後は 2 山パルス解が安定に存在することができないため解は大きく変形し始める。前節の議論から BP^2 と SN^2 の間においては不安定方向は 2 山から 3 山への分裂方向しか選択されないため解は 3 山に遷移する (図 5)。

$v = 1.0 \times 10^{-3}$ の場合

成長速度がある程度速くなったときについて考える。この速度においても2山パルス解は安定解の枝に沿って解は変形し、分岐点 BP^2 に達する。しかし、この速度の場合、解の変形する速さより領域の成長速度の方が速く、解軌道はしばらく不安定な2山定常解に沿って変形していることが数値的に確かめられる。実際、前節の議論から ψ_1^2 方向の不安定性は非常に弱いため、分裂が起きる前にサドル・ノード分岐点を越してしまうということが起きる。サドル・ノード点を越えると ψ_2^2 の方向の変形が支配的になるため、2山から3山解への遷移が起きる前に一斉分裂が起きる。

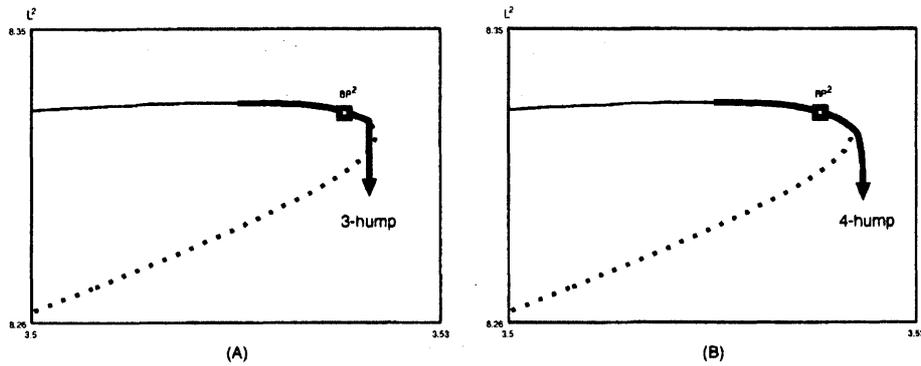


図 5: 領域長を時間とともに変化させたときの解軌道。(A) $v = 1.0 \times 10^{-7}$. (B) $v = 1.0 \times 10^{-3}$

2.3 n 山パルス解の分裂

さらにパルスの数が多くなったときの分裂過程を調べるために4山パルス解を例に分岐図を調べ、1, 2山解の分岐図との相似点を考察する。図6(A)は領域長をパラメータとしたときの分岐図である。1山解, 2山解同様にサドル・ノード分岐点 SN^4 が存在する。4山解の場合はサドル・ノード分岐点に達する前に3つの分岐点 BP_j^4 ($j = 1, \dots, 3$) が現れる。 BP_j^4 と SN^4 の間では実部が正の固有値が3つあり、固有関数 ψ_j ($j = 1, \dots, 3$) は図6(C)のような形をしている。これらの固有関数はすべて $\langle P, \psi_j \rangle = 0$ をみたすためサドル・ノード分岐が起きるまではそれらの中の実部が一番大きな固有値に対応する固有関数方向の不安定化が支配的になる。実部が最大の固有値に対する固有関数の形はパルスの分裂が一つおきに起きることを示唆しており、分岐点 BP_3^4 と SN^4 の間の領域長においては一つおきの分裂方向の不安定化が支配的であることがわかる。

一方、 SN^4 の点における0-固有値に対応する固有関数 ψ_4^4 は一斉分裂を引き起こす形をしており、さらに $\langle P, \psi_4^4 \rangle = O(1)$ である。したがって SN^4 を越えるとパルスの変形は一斉分裂方向が支配的になる。

5山, 6山解についても同様に数値実験を行うとサドル・ノード分岐点までは一つおきに分裂する不安定方向が支配的であり、サドル・ノード分岐点より大きなパラメータ (領

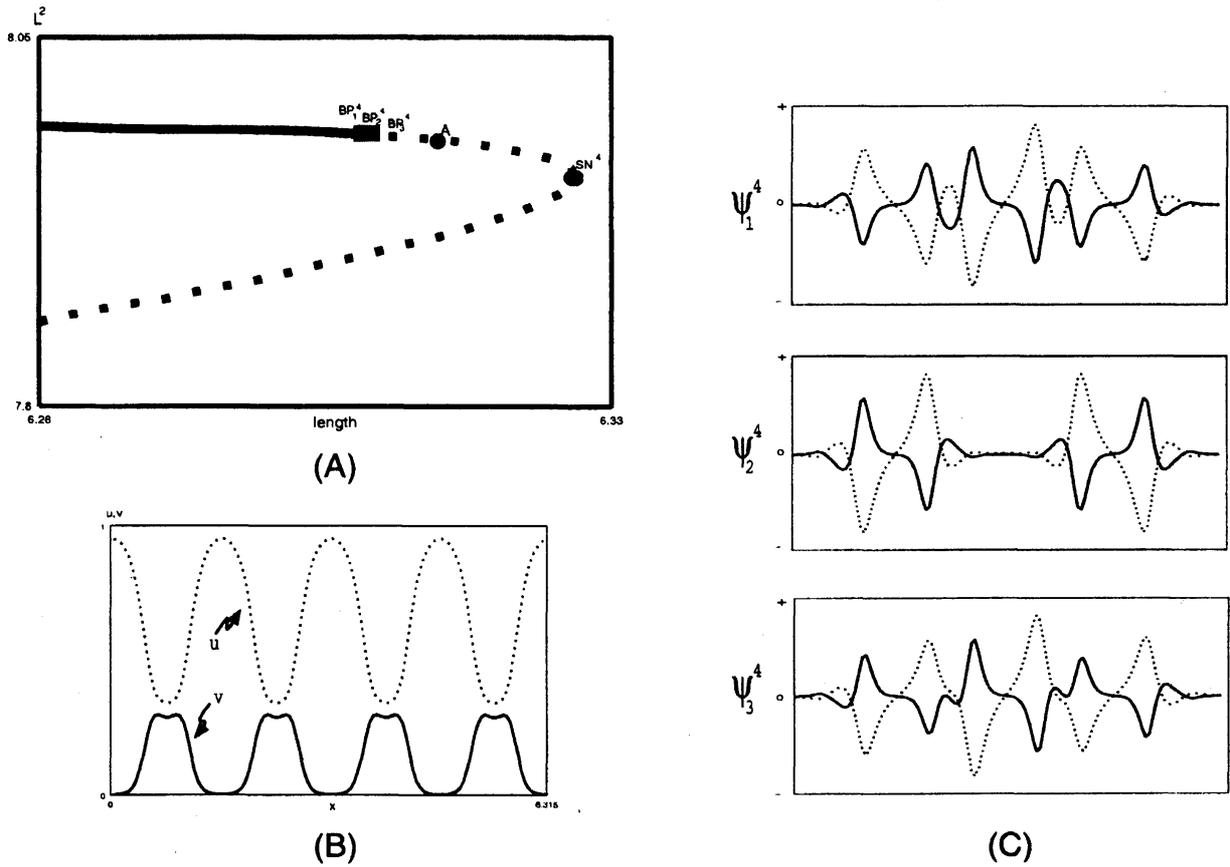


図 6: (A) 4山定常解の分岐図. サドル・ノード点 SN^4 より小さなパラメータにおいて 3つの分岐点 BP_j^4 ($j = 1, \dots, 3$) が現れる. (B)(C) はそれぞれ点 A における定常解及び実部が正の固有値に対する固有関数を示す. $\psi_1^4, \psi_2^4, \psi_3^4$ の順番で対応する固有値の実部が大

域長) においてはパルスは一斉に分裂することが数値的に確かめることができる. 一般の n 山パルス解においてこのような性質を理論的に示すために次章ではパルス相互作用理論 [2] を用いてパルスダイナミクスを考察する.

3 パルス間相互作用

2章における設定のように, 無限区間上における1山定常パルスのサドル・ノード分岐点近傍にパラメータを固定し, 十分広い(有限)1次元空間上に点在するパルスはどのように相互作用するかを Gray-Scott モデルを含む一般的な設定の元で考察する. 次節 3.1 では [6] によって得られた結果を紹介する.

3.1 仮定

次のような方程式を考える.

$$u_t = \mathcal{L}(u, k), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (3.1)$$

ここで $u \in \mathbf{R}^n$, $\mathcal{L}(u; k) = D u_{xx} + F(u; k)$ であり, k は (2.1) で扱ったような分岐パラメータとする. (3.1) に対して次のことを仮定する.

- S1) $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ は (3.1) の安定平衡点である.
- S2) あるパラメータ $k = k_c$ が存在し, $k > k_c$ に対しては空間対称な安定定常解 $P^s(x; k)$ と不安定定常解 $P^u(x; k)$ が存在する.

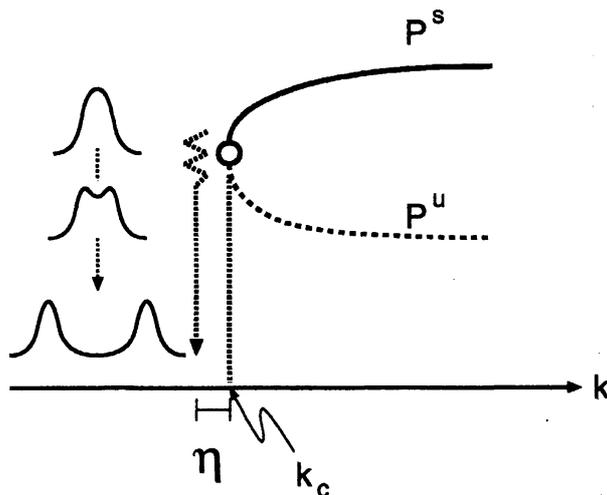


図 7: P^s と P^u はサドル・ノード分岐点 $k = k_c$ でつながる. パルスの分裂はサドル・ノード点の左で起きる.

S3) 定常解 P^s, P^u に対する線形作用素をそれぞれ $L^s(k) = \mathcal{L}'(P^s(x; k))$, $L^u(k) = \mathcal{L}'(P^u(x; k))$ とする. k_c に十分近い $k > k_c$ に対し, $L^s(k)$ は固有値 0 と $\lambda^s(k) < 0$ をもち, その他のスペクトルに対して $\Sigma_1(L^s) \subset \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{R}(z) < -\rho_0\}$ ($\rho_0 > 0$) が成り立つと仮定する. 0-固有値に対する固有関数は P_x^s であり, 固有値 λ_s に対する固有関数を $\xi^s(x; k)$ とする. $L^u(k)$ に対しても同様に固有値 0 と $\lambda^u > 0$ をもち, その他のスペクトルに対し $\Sigma_1(L^u) \subset \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{R}(z) < -\rho_0\}$ ($\rho_0 > 0$) をみたすと仮定する. 0-固有値と λ_u に対する固有関数をそれぞれ P_x^u と $\xi^u(x; k)$ とする.

S4) $k = k_c$ において $P^s(x; k_c) = P^u(x; k_c)$ をみだし, これを $P(x)$ とする. $\lambda^s(k_c) = \lambda^u(k_c) = 0$ であり, $\xi^s(x; k_c) = \xi^u(x; k_c)$ をみだし, これを $\xi(x)$ とする (図 7).

分岐パラメータ k を分岐点の近傍 ($k = k_c - \eta$) にとり, (3.1) を

$$\mathbf{u}_t = \mathcal{L}(\mathbf{u}) - \eta g(\mathbf{u})$$

と表す. ここで $\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}; k_c) = D\mathbf{u}_{xx} + F(\mathbf{u})$, $F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}; k_c)$, $-\eta g(\mathbf{u}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}; k_c - \eta) - \mathcal{L}(\mathbf{u})$ である.

仮定 S4) より $L^s(k_c) = L^u(k_c)$ であり, それを L とする. $k = k_c$ において固有値 0 に対する固有関数は P_x , ξ であり, L の共役作用素を L^* とする. L^* においても 0-固有値が存在し, それらに対する固有関数をそれぞれ ϕ^* , ξ^* とする.

S5) ξ, ξ^* は空間対称であり, ϕ^* は奇関数とする. それらは

$$\langle P_x, \phi^* \rangle_{L^2} = \langle \xi, \xi^* \rangle_{L^2} = 1$$

と正規化する.

ここでは $N+1$ 個のバルスの相互作用について考察する. $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_N) \in \mathbf{R}^N$, $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ に対し

$$S(x; \mathbf{h}, \mathbf{r}) = \sum_{j=0}^N P(x - x_j) + r_j \xi(x - x_j)$$

とする. ここで $x_0 = 0$, $x_j = \sum_{i=1}^j h_i$ ($j \geq 1$) である. 並進作用素を $\Theta(l)\mathbf{u} = \mathbf{u}(x - l)$, 集合

$$\mathcal{M}(h^*, r^*) = \{\Theta(l)S(\cdot, \mathbf{h}, \mathbf{r}); l \in \mathbf{R}, \min \mathbf{h} > h^*, |r_j| < r^*\}$$

を定義する. また

$$\delta(\mathbf{h}) = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\mathcal{L}(P(x; \mathbf{h}))|,$$

及び

$$\begin{aligned} H_j(\mathbf{h}) &= \langle \mathcal{L}(P(x + x_j; \mathbf{h})), \phi^* \rangle_{L^2}, \\ \tilde{H}_j(\mathbf{h}) &= \langle \mathcal{L}(P(x + x_j; \mathbf{h})), \xi^* \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

定理 3.1 正定数 h^*, r^*, η^*, C_0 及び $\mathcal{M}(h^*, r^*)$ の近傍 U が存在し, $\mathbf{u}(0) \in U$ かつ $\min \mathbf{h}(t) > h^*, |r_j(t) < r^*, |\eta| < \eta^*$ ならば, ある関数 $l(t) \in \mathbf{R}, \mathbf{h}(t) \in \mathbf{R}^N, \mathbf{r}(t) \in \mathbf{R}^{N+1}$ に対し

$$\|\mathbf{u}(t) - \Theta(l(t))S(\mathbf{h}(t), \mathbf{r}(t))\|_\infty \leq C_0 \Delta_1(\mathbf{h}(t), \mathbf{r}(t), \eta)$$

をみたす. ここで $\Delta_1(\mathbf{h}, \mathbf{r}, \eta) = \delta(\mathbf{h}) + |\mathbf{r}|^2 + |\eta|$, $\mathbf{u}(t)$ は (3.1) の解である. また

$$\dot{l}, \dot{\mathbf{h}}, \dot{\mathbf{r}} = O(\Delta_1).$$

定理 3.2 $\min \mathbf{h}(t) > h^*$ かつ $|r_j(t)| < r^*$ のとき

$$\begin{aligned} \dot{l} &= H_0(\mathbf{h}) + O(\Delta_1) \\ \dot{h}_j &= H_{j-1}(\mathbf{h}) - H_j(\mathbf{h}) + O(\Delta_1) \\ \dot{r}_j &= m_1 r_j^2 + m_2 \eta - \tilde{H}_j(\mathbf{h}) + O(\Delta_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで m_1, m_2 はある定数.

3.2 分岐図

十分大きい領域長 L に等間隔に配置されたパルス of 安定性について考察する. 変数 q_j を $q_j = \bar{x}_j - x_j$ ($\bar{x}_j = L \times (j + 1/2)/(N + 1)$) ととると, (3.2) は $j = 0, \dots, N$ に対し

$$\begin{cases} \dot{q}_j = M_1(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) + M_2(r_{j-1} - r_{j+1}) + O(\Delta_2) \\ \dot{r}_j = N_0 \delta r_j + N_1 r_j^2 + N_2 \delta (q_{j-1} - q_{j+1}) + N_3 \delta (r_{j-1} + r_{j+1}) + N_4 \delta + N_5 \eta + O(\Delta_2), \end{cases} \quad (3.3)$$

と表すことができる. ただし $\delta = \exp(-\alpha L/(N+1))$ (α はある正定数), $q_{-1} = -q_0, q_{N+1} = -q_N, r_{-1} = r_0, r_{N+1} = r_N, \Delta_2 = \delta^2 + \eta^2 + |\mathbf{r}|^3, M_j, N_j$ はある定数である (詳しい形は [6] 参照). 定数 M_j, N_j に対し Gray-Scott モデルなどでみたされる条件として次を仮定する.

S6) $M_1, N_1, N_2 > 0, M_2, N_3, N_4 < 0.$

ここでは (3.3) の主要部

$$\begin{cases} \dot{q}_j = M_1(q_{j-1} - 2q_j + q_{j+1}) + M_2(r_{j-1} - r_{j+1}) \\ \dot{r}_j = N_0 \delta r_j + N_1 r_j^2 + N_2 \delta (q_{j-1} - q_{j+1}) + N_3 \delta (r_{j-1} + r_{j+1}) + N_4 \delta + N_5 \eta, \end{cases} \quad (3.4)$$

について, 有限領域上に等間隔に配置された $N + 1$ 個の定常パルス解の安定性について考える. (3.4) は定常解

$$q_j = 0, r_j = \frac{-(N_0 \delta + 2N_3 \delta) \pm \sqrt{(N_0 \delta + 2N_3 \delta)^2 - 4N_1(N_4 \delta + N_5 \eta)}}{2N_1} \equiv \bar{r}$$

をもつ. 例えば $N = 3$ のとき, M_j, N_j に適当な定数を与えたときの分岐図は図 8 のようになる. 安定定常解はサドル・ノード分岐点に達する前に現れる分岐点において不安定

化し, その分岐点の他に2つの分岐点が見れる. さらに, その3つの分岐点より左の定常解においては実部が正の固有値が3個存在し, それらに対応する固有関数は解と直交する. 実部が最大の固有値に対する固有関数をみると r_j 成分は $(+, -, +, -)$ という符号をもち, サドル・ノード分岐点における0-固有値に対する固有関数の符号は $(+, +, +, +)$ である. つまり, サドル・ノード分岐点に達するまでは4山パルス解は1つおきに分裂する方向が支配的になり, サドル・ノード分岐点を越えた領域では一斉分裂が支配的であることがこの常微分方程式からもわかる.

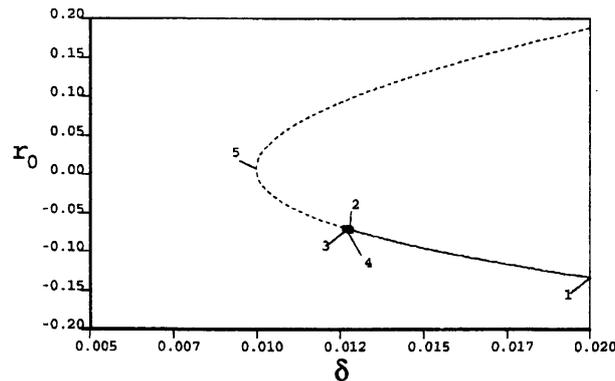


図 8: (3.4) の定常解 $q_j = 0$, $r_j = \bar{r}$ ($j = 0, \dots, N$) の分岐図. 実線は安定解, 点線は不安定解を示す. ($\eta = 0.01$, $M_1 = 1.0$, $M_2 = -1.3$, $N_0 = 1.0$, $N_1 = 0.4$, $N_2 = 1.02$, $N_3 = -1.3$, $N_4 = -1.0$, $N_5 = 1.0$)

参考文献

- [1] E.J.Doedel, A.R.Champneys, T.F.Fairgrieve, Y.A.Kuznetsov, B. Sandstede and X.Wang, *AUTO97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with HomCont)*, <ftp://ftp.cs.concordia.ca/pub/doedel/auto/>, (1997).
- [2] S-I.Ei, *The motion of weakly interacting pulses in reaction diffusion systems*, to appear in J. D. D. E.
- [3] P.Gray and S.K.Scott, *Autocatalytic reactions in the isothermal, continuous stirred tank reactor: oscillations and instabilities in the system $A + 2B \rightarrow 3B$, $B \rightarrow C$* , Chem. Eng. Sci. Vol.39(1984) 1087-1097.
- [4] Y. Nishiura and D. Ueyama, *A skeleton structure of self-replicating dynamics*, Physica D, 130(1999)73-104.
- [5] E.J.Crampin, E.A.Gaffney and P.K.Maini, *Reaction and diffusion on growing domains: scenarios for robust pattern formation*, Bull. Math. Biol. Vol.61(1999) 1093-1120.

- [6] S-I.Ei, Y.Nishiura and K-I.Ueda 2^n -splitting or edge-splitting? -A manner of splitting in dissipative systems-, Japan J. Ind.Appl.Math. Vol.18(2001) No.2 181-205.