

The notes on a fast blow-up solution arising in an anisotropic crystalline motion *

～ 結晶界面運動に現れる速い縮退解について ～

石渡 哲哉 (Ishiwata Tetsuya)[†], 矢崎 成俊 (Yazaki Shigetoshi)[‡]

概要

界面の運動を記述する1つの数学モデルであるクリスタライン運動を扱い、縮退する界面に有限時間で発生する特異性の特徴づけを行う。特に、界面の極限形状と特異性の強度との関係について、具体的な特異性のオーダーとともに明らかにする。

Key Words: anisotropic crystalline motion, point-extinction, line-extinction, blow-up rate, type II blow-up.

1 はじめに

クリスタライン運動 (Crystalline motion) とは、結晶の界面運動の数学モデルの1つであり、結晶の表面エネルギー分布から導かれるウルフ図形によって界面形状の特徴付けがなされている多角形の運動である。結晶とウルフ図形の関係については、大川 [O], 上羽 [U] を、界面運動の数学モデルとウルフ図形に関しては儀我 [G] を参照して頂きたい。

ここではウルフ図形が n 辺凸多角形であり、第 j 辺の法線角度が $\Delta\theta := 2\pi/n$ として $j\Delta\theta$ で与えられている場合を考える。ただし、 $n \geq 4$ とする。このようなウルフ図形によつ

*The second author was partly supported by Grant-in-Aid for Encouragement of Young Scientists.

[†]岐阜大学 教育学部 (Faculty of Education, Gifu University), Yanagido 1-1, Gifu City, Gifu 501-1193, JAPAN.

[‡]武蔵工業大学 工学部 教育研究センター (General Education Center, Faculty of Engineering, Musashi Institute of Technology), 1-28-1 Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo 158-8557, JAPAN.

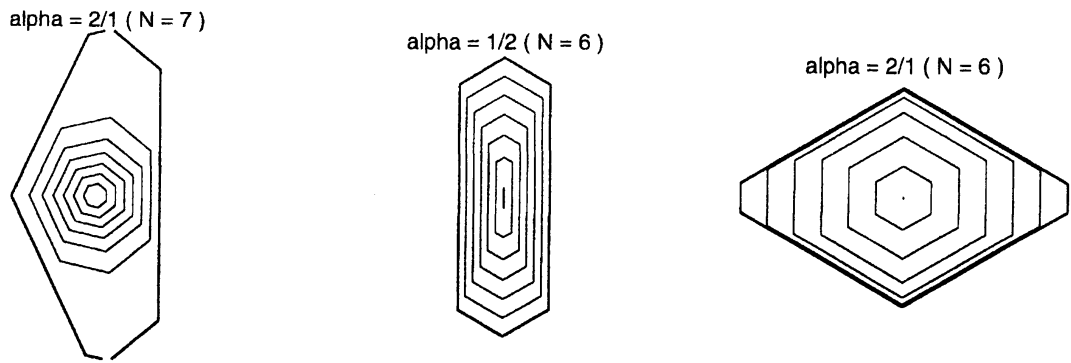


図 1. 式 (1.1a-c) により記述されるクリスタライン運動 (左から, $(\alpha, n) = (1/2, 7), (1/2, 6), (2, 6)$). 一番外側が初期多角形. 時間とともに内側へ縮退し, 有限時間で特異性が発生する.

て特徴付けられる界面は, 隣接する辺のなす角度が $\pi - \Delta\theta$ である平面内の閉凸多角形となる. 以後, このような多角形を許容多角形 (admissible polygon) と呼ぶ.

平面内に初期許容多角形 \mathcal{P}_0 を与え, 次の常微分方程式系で記述される運動を考える:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}_j(t) = v_j(t) \mathbf{n}_j, & j \in \mathcal{I}_n, \quad 0 \leq t < T. \\ \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0 \end{cases} \quad (1.1a)$$

ここで, $\mathbf{n}_j := -{}^t(\cos \theta_j, \sin \theta_j)$ ($\theta_j = j\Delta\theta$) は第 j 辺の内向き単位法線ベクトル, \mathbf{x}_j は第 j 辺を含む直線と原点を通る \mathbf{n}_j で張られた直線との交点の位置ベクトル, v_j は第 j 辺の内向き法線速度である. また, \mathcal{I}_n は次の集合である:

$$\mathcal{I}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

解多角形 $\mathcal{P}(t)$ は各辺が平行移動するように時間発展するため, $\mathcal{P}(t)$ の隣り合う辺のなす角度は, 解多角形が存在する限り常に $\pi - \Delta\theta$ であり解多角形の admissibility は保存される. このような運動をクリスタライン運動という.

一般に法線方向の速度は, 界面の局所的な情報だけでなく長さや面積等の非局所的な情報や, 界面内部あるいは外部の場の影響を受けるが, 本小論では

$$v_j(t) = g_j \kappa_j(t)^\alpha, \quad j \in \mathcal{I}_n, \quad (1.1b)$$

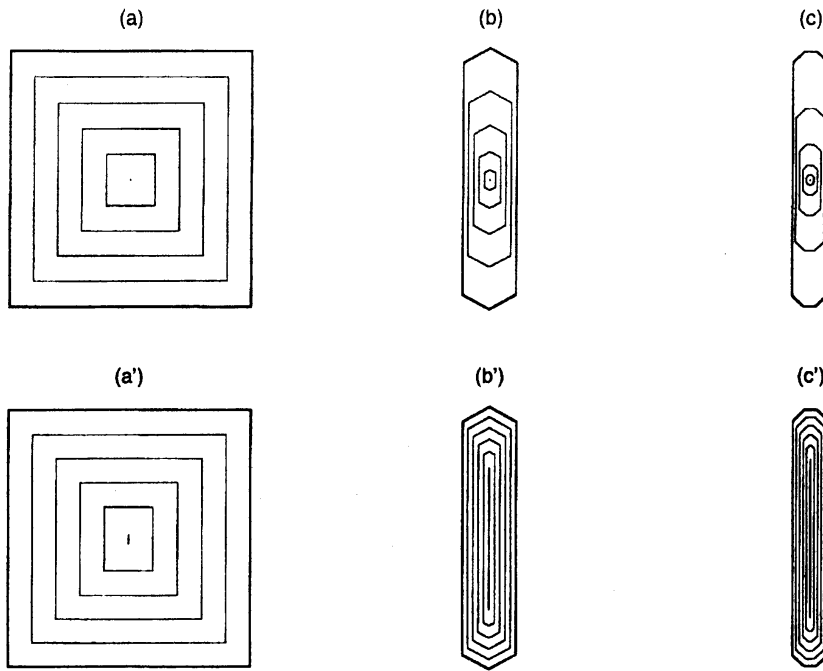


図2. 点への縮退と線分への縮退. 上段は点への縮退, 下段は線分へ縮退. (それぞれ左から順に, $n = 4, 6, 8$.)

で与えられるものとする. ここで, g_j は異方性を表す正值の係数, α は正数, κ_j はクリスタイン曲率:

$$\kappa_j(t) = \frac{\gamma}{d_j(t)}, \quad \gamma = 2 \tan \frac{\Delta\theta}{2}, \quad j \in \mathcal{I}_n, \quad (1.1c)$$

である. また, 上式の $d_j(t)$ は解多角形 $P(t)$ の第 j 辺の長さである.

この問題の解多角形は時間局所的に一意に存在する. これは, 問題が次節に示すように常微分方程式系に帰着されることから導かれる. さらに, どんな初期許容多角形をとっても, 有限時間にある辺の長さが有限時間に 0 になることが示される. つまり, 解多角形の admissibility を保つ最大存在時間 T は有限である.

また, この問題に関しては $t \rightarrow T$ のときの解多角形の極限形状について詳しい解析がなされている. Giga-Giga [GG] では, $\alpha \geq 1$ あるいは $\alpha > 0$ で平行な辺の組が 1 つもないとき解多角形が 1 点に縮退 (1 点消滅, single point-extinction) し, そうでない場合には 1 点に縮退するか線分に縮退 (line-extinction) するかのどちらかであることが示されている. 後者は degenerate pinching と呼ばれている.

いずれにしても $t \rightarrow T$ のとき面積は 0 に収束し, いいかえると, 1 点消滅の場合は, 全ての j にたいして, $d_j(t)$ は 0 に収束し, degenerate pinching の場合は, 平行な 2 辺, 例えば $\theta_0 = 0, \theta_k = \pi$, を除いて, $d_j(t)$ は 0 に収束する. さらにいいかえると, 前者の場合は $\lim_{t \rightarrow T} v_j(t) = \infty$ ($\forall j \in \mathcal{I}_n$) であり, 後者の場合は $\lim_{t \rightarrow T} v_j(t) = \infty$ ($\forall j \neq 0, k$), かつ, $\lim_{t \rightarrow T} v_j(t) < \infty$ ($j = 0, k$) となる.

このように, 解のある種のノルムが有限時間で無限大に発散することを, 解の爆発という. 本小論では, 爆発解の中でも (後で定義する意味において) 速い発散オーダーをもつ爆発解の解析に焦点をあて, 極限形状との関係, 具体的な発散オーダーについて論じる. また, 多角形の隣接する角度が必ずしも一定 ($\pi - \Delta\theta$) でない場合についての拡張は, 機会を改めて報告する.

2 準備

以下, $\sum_j u_j, u_{\max}, u_{\min}$ および $\dot{u}(t)$ は, それぞれ $\sum_{0 \leq j < n} u_j, \max_{0 \leq j < n} u_j, \min_{0 \leq j < n} u_j$ および $du(t)/dt$ を表すものとする. また, 作用素 Δ_θ は次で与えられるものとする:

$$(\Delta_\theta(\cdot))_j := \frac{(\cdot)_{j+1} - 2(\cdot)_j + (\cdot)_{j-1}}{2(1 - \cos \Delta\theta)}.$$

2.1 同値な常微分方程式系

前節で導入した問題は, 位置に関する不定性を除いて次の速度 v に関する常微分方程式系と同値となる.

Problem 1 $n \geq 4$ とする. 次を満たす関数 $v(t) = (v_j(t))_{j \in \mathcal{I}_n} \in [C[0, T] \cap C^1(0, T)]^n$ を求めよ:

$$\frac{d}{dt} v_j(t) = \alpha g_j^{-1/\alpha} v_j^{1+1/\alpha} (\Delta_\theta v + v)_j, \quad j \in \mathcal{I}_n, \quad t \in (0, T), \quad (2.1a)$$

$$v_j(0) = g_j \kappa_j(0)^\alpha, \quad j \in \mathcal{I}_n, \quad (2.1b)$$

$$v_{j+n}(t) = v_j(t), \quad j \in \mathcal{Z}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.1c)$$

ここで, $\kappa_j(0)$ は初期多角形 \mathcal{P}_0 のクリスタライン曲率, T は最大存在時間である.

常微分方程式論の一般論より, この問題の時間局所解は一意的に存在する.

次の Lemma は解の爆発に関する結果である.

Lemma 2.1 (finite time blow-up) 任意の初期クリスタライン曲率 $\{\kappa_j(0)\}$ に対して, 有限時間 $T > 0$ が定まり, *Problem 1* の解 v の最大値が $t \rightarrow T$ で無限大に発散する.

2.2 固有値問題

\mathcal{J} を次のような m 個の整数の集合とする:

$$\mathcal{J} = \{j_1, j_1 + 1, j_1 + 2, \dots, j_1 + m - 1\} \subset \mathbf{Z}$$

次の固有値問題を考える:

$$(\text{EVP})_{\mathcal{J}} \quad \begin{cases} (\Delta_{\theta} \Phi)_j + \lambda \Phi_j = 0, & j \in \mathcal{J}, \quad 0 < t < T, \\ \Phi_j = 0, & j \in \partial \mathcal{J}. \end{cases}$$

以下, 集合

$$\partial \mathcal{J} = \{j_1 - 1, j_1 + m\},$$

を集合 \mathcal{J} の“境界”と呼ぶことにする.

直ちに次が分かる.

Lemma 2.2 問題 $(\text{EVP})_{\mathcal{J}}$ の第 k 固有値および固有関数は次で与えられる:

$$\lambda_k(\mathcal{J}) = \frac{1 - \cos(k\pi/(m+1))}{1 - \cos \Delta\theta} = \frac{\sin^2(k\pi/2(m+1))}{\sin^2(\Delta\theta/2)}, \quad 0 \leq k \leq m+1,$$

$$\Phi_j^k(\mathcal{J}) = C_k \sin\left(\frac{k\pi}{m+1}(j - j_1 + 1)\right), \quad 0 \leq k \leq m+1, \quad j \in \mathcal{J}.$$

ここで係数 C_k は 0 でないとする. 特に,

$$m > n/2 - 1 \Leftrightarrow \lambda_1(\mathcal{J}) < 1,$$

$$\lambda_1(\mathcal{J}) = 1 \Leftrightarrow m = n/2 - 1 \quad (\text{ただし, } n \text{ は偶数})$$

2.3 比較定理

Lemma 2.3 $T > 0$ とする. $p_j(t) > 0$ および $q_j(t)$ を $[0, T]$ 上で $j \in \mathcal{I}_n$ (resp., $j \in \mathcal{J}$) に対して定義された関数とする. $u = (u_j(t))_{0 \leq j < n} \in [C[0, T] \cap C^1(0, T)]^n$ (resp., $u = (u_j(t))_{0 \leq j < m} \in [C[0, T] \cap C^1(0, T)]^m$) を次の問題 $(Q_{\mathcal{I}_n})$ (resp., $(Q_{\mathcal{J}})$) の解とする:

$$(Q_{\mathcal{I}_n}) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u_j \geq p_j(\Delta_\theta u)_j + q_j u_j, & j \in \mathcal{I}_n, \quad t \in (0, T), \\ u_{j+n}(t) = u_j(t), & j \in \mathcal{Z}, \quad t \in [0, T], \\ u_j(0) \geq 0, & j \in \mathcal{I}_n; \end{cases}$$

$$(Q_{\mathcal{J}}) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} u_j \geq p_j(\Delta_\theta u)_j + q_j u_j, & j \in \mathcal{J}, \quad t \in (0, T), \\ u_j(t) \geq 0, & j \in \partial \mathcal{J}, \quad t \in [0, T], \\ u_j(0) \geq 0, & j \in \mathcal{J}. \end{cases}$$

このとき, 任意の $j \in \mathcal{I}_n$ (resp., $j \in \mathcal{J}$) および $t \in [0, T]$ に対して $u_j(t) \geq 0$ を満たす.

上の Lemma より直ちに次が従う.

Lemma 2.4 *Problem 1* の解 v に対して次が成立する.

- (1) 正定数 C を $v_j(0) \geq C$ を満たすものとする. このとき, $v_j(t) \geq C$ が成立する. 特に, $v_{\min}(0)$ は解 $v(t)$ の下限を与えるものとなる.
- (2) 次を仮定する:

$$(A) \quad (\Delta_\theta v(0) + v(0))_j \geq 0, \quad j \in \mathcal{I}_n, \quad (v_{-1} = v_{n-1}, v_n = v_0).$$

このとき, すべての $j \in \mathcal{I}_n$ に対して $(\Delta_\theta v(t) + v(t))_j \geq 0$ が成立する. つまり, 仮定 (A) の元では解 v は時間に関して非減少である.

2.4 長さおよび面積

解多角形 $\mathcal{P}(t)$ の長さは

$$\mathcal{L}(t) := \sum_j d_j = 2 \tan \frac{\Delta\theta}{2} \sum_j g_j^{1/\alpha} v_j^{-1/\alpha}, \quad (2.2)$$

で与えられ, その変化は次のようになる:

$$\dot{L}(t) = -2 \tan \frac{\Delta\theta}{2} \sum_j v_j(t). \quad (2.3)$$

以上より $\dot{L}(t) < 0$ が分かる. つまり, ここで取り上げている解多角形の運動には曲線短縮性があることがわかる.

また, 解多角形 $\mathcal{P}(t)$ が囲む領域の面積は

$$A(t) := \frac{1}{2} \sum_j \langle \mathbf{x}_j(t), -\mathbf{n}_j \rangle d_j(t) = \tan \frac{\Delta\theta}{2} \sum_j \langle \mathbf{x}_j(t), -\mathbf{n}_j \rangle g_j^{1/\alpha} v_j(t)^{-1/\alpha},$$

で与えられ, その変化は

$$\dot{A}(t) = -2 \tan \frac{\Delta\theta}{2} \sum_j g_j^{1/\alpha} v_j^{1-1/\alpha}. \quad (2.4)$$

で与えられる. 長さと同様時間に関して単調減少であることが分かる. この情報だけでは有限時間で面積が 0 に収束するかどうかは不明であるが, 前節で述べたように [GG] でいかなる場合でも有限時間で面積が 0 に収束することが示されている.

3 Blow-up rate

Problem 1 の爆発解の最小値, 最大値に対して次の結果を得る.

Lemma 3.1 $\alpha > 0$ とする. このとき

$$v_{\min}(t) \leq \gamma_{\max}^{1/(\alpha+1)} ((\alpha+1)(T-t))^{-\alpha/(\alpha+1)},$$

および

$$v_{\max}(t) \geq \gamma_{\min}^{1/(\alpha+1)} ((\alpha+1)(T-t))^{-\alpha/(\alpha+1)},$$

が成立する.

$\alpha = 1$ の場合の結果が Stancu ([S2], Lemma 2.2) により得られており, 証明はそれを一般化することにより容易に得られる.

全ての $j \in \mathcal{I}_n$ に対し $\gamma_j \equiv 1$ ならば, $v_j(t) \equiv ((\alpha+1)(T-t))^{-\alpha/(\alpha+1)}$ は Problem 1 の特殊解であり, 対応する解多角形は自己相似縮小して一点に縮退する. このような意味で $(T-t)^{-\alpha/(\alpha+1)}$ というオーダーは解の爆発レートの特徴付ける一つの目安になる. そこで次のように爆発レートを分類する.

Definition 3.2 (blow-up rate) 解 $v(t)$ が

$$\sup_{0 < t < T} \max_{j \in \mathcal{I}_n} v_j(t) (T - t)^{\alpha/(\alpha+1)} < \infty, \quad (3.1)$$

を満たすとき, この解をタイプ I の爆発解と呼ぶ. また, 式 (3.1) を満たさない解をタイプ II の爆発解と呼ぶ.

Lemma 3.3 $\alpha > 0$ とする. *Problem 1* の解 v がタイプ I の爆発解であるとする. このとき, 解多角形は 1 点に縮退する.

この Lemma より, 解多角形が線分に縮退するとすると, この時 *Problem 1* の解 v がタイプ II であることが分かる.

この場合のタイプ II の爆発解の blow-up rate に対して, 次の下からの評価を得る.

Theorem A $\alpha < 1$ とする. 解多角形が線分消滅するとし, $t \rightarrow T$ のとき有限の長さに残る 2 辺の添字をそれぞれ j_0, j_1 とする. このとき, 正数 C が存在して次を満たす:

$$v_j(t) \geq C(T - t)^{-\alpha}, \quad j \neq j_0, j_1, \quad t \in [0, T).$$

Remark 3.4 上の結果は $\Delta\theta$ が一定でない場合にも成立する.

4 Blow-up core

\mathcal{I}_n は $t \rightarrow T$ で無限大に発散する要素の集合 $\{j \in \mathcal{I}_n \mid \lim_{t \rightarrow T} v_j(t) = \infty\}$ と有界に留まる要素の集合 $\{j \in \mathcal{I}_n \mid \lim_{t \rightarrow T} v_j(t) < \infty\}$ とに分かれる. 前者を爆発集合 (blow-up set) という. この節では, この爆発集合の中でもっとも速く爆発する核の部分 (blow-up core : the core of blow-up set) の評価について述べる.

v を *Problem 1* の解とする. 解を最大値が 1 になるように次のように規格化する:

$$z_j(t) := \frac{v_j(t)}{v_{\max}(t)}, \quad j \in \mathcal{I}_n, \quad t \in [0, T).$$

上の定義より $0 < z_j(t) \leq 1$ および $\inf_{0 < t < T} z_j(t) \geq 0$ が従う.

よって, T に収束する時間列 $\mathcal{T} = \{t_m\}$ と非負値の組 \bar{z}_j ($j \in \mathcal{I}_n$) が存在して,

$$z_j(t_m) \rightarrow \bar{z}_j \quad \text{as } m \rightarrow \infty.$$

このとき、極限值 \bar{z}_j は $\bar{z}_j = 0$ あるいは $1 \geq \bar{z}_j > 0$ である。 $\bar{z}_j = 0$ となる部分は v_{\max} より遅く爆発するか有界に留まる場所であり、 $1 \geq \bar{z}_j > 0$ となる部分は v_{\max} と同等の速さで爆発する場所である。後者を Blow-up core と呼ぶことにする。Blow-up core は時間列 \mathcal{T} に依存しているので、これを $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ と表記する:

$$\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \{j \in \mathcal{I}_n \mid \bar{z}_j > 0\}.$$

$\mathcal{B}(\mathcal{T})$ の構造を調べるため、次のように連続する元から成る部分集合へ分割する:

$$\mathcal{B}(\mathcal{T}) = \bigoplus_k \mathcal{B}_k(\mathcal{T}).$$

ただし、各要素は n を法として考えるものとする。ここで、各部分集合は

$$\mathcal{B}_k(\mathcal{T}) = \{j_k, j_k + 1, \dots, j_k + m_k - 1\}$$

で与えられ、その“境界” $\partial\mathcal{B}_k(\mathcal{T})$:

$$\partial\mathcal{B}_k(\mathcal{T}) = \{j_k - 1, j_k + m_k\}.$$

は $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ に含まれないものとする。つまり、 $j \in \partial\mathcal{B}(\mathcal{T})$ に対して $\bar{z}_j = 0$ であるとする。

以下、次の単調性に関する仮定を置く:

$$(A) \quad (\Delta_\theta v(0) + v(0))_j \geq 0, \quad j \in \mathcal{I}_n, \quad (v_{-1} = v_{n-1}, v_n = v_0).$$

この仮定のもとに、次が成り立つ。

Lemma 4.1 $\alpha > 0$ とする。(A) を仮定する。このとき、 $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ となる時間列 $\mathcal{T} = \{t_m\}$ に対して、次が成り立つ:

$$\lambda_1(\mathcal{B}_k(\mathcal{T})) \leq 1 \quad \text{for each } k.$$

Theorem 4.2 $\alpha \leq 1$ とする。(A) を仮定する。Problem 1 の解 v がタイプ II の爆発解であるとする。このとき、 $\mathcal{B}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ となる時間列 $\mathcal{T} = \{t_m\}$ に対して、次が成り立つ:

$$\lambda_1(\mathcal{B}_k(\mathcal{T})) = 1 \quad \text{for each } k.$$

以上から、直ちに次が分かる。

Corollary 4.3 Theorem 4.2と同様の仮定をおく. このとき, n は偶数であり, それぞれの k に対して, \mathcal{B}_k の要素の数は $n/2 - 1$ である.

以上より, blow-up core は高々2つであることがわかる. 更に次を得る.

Corollary 4.4 Theorem 4.2と同様の仮定をおく. 必要であれば部分時間列を取り直してそれを T とする. このとき, \mathcal{I}_n は次のように分割される:

$$\mathcal{I}_n = \mathcal{B}_1(T) \oplus \mathcal{B}_2(T) \oplus \partial\mathcal{B}(T).$$

ここで

$$\mathcal{B}_1(T) = \{j_0 + 1, \dots, j_0 + n/2 - 1\},$$

$$\mathcal{B}_2(T) = \{j_0 + n/2 + 1, \dots, j_0 + n - 1\},$$

$$\partial\mathcal{B}(T) = \{j_0, j_0 + n/2\}$$

であるとする. ただし, 各要素は n を法とするものとする.

5 再び Blow-up rate

Corollary 4.4で \mathcal{I}_n に2つの blow-up core が含まれることが分かった. 残る2点 $j_0, j_0 + 2/n$ の状態については次の2つの可能性がある. 1つはこの2点においても $v_j(t)$ が爆発する場合であり, もう1つは解が有界に留まるという場合である. ただし, 前者の場合でも爆発レートは v_{\max} より遅くなる.

更に詳細な情報として以下を得る.

Lemma 5.1 (A) を仮定し, 解 v はタイプ II の爆発解であるとする. また, 時間列 T を Corollary 4.4 におけるものとする. このとき次式が成立する:

$$v_j(t_m)(T - t_m)^{\alpha/(\alpha+1)} \rightarrow 0, \quad j \in \partial\mathcal{B}(T).$$

ここで線分消滅の場合を考える. この場合, 2点は $t \rightarrow T$ のとき有界に留まるので $\partial\mathcal{B}(T)$ の位置は時間列によらず確定する. この線分消滅する場合のタイプ II の爆発解に対しては, 仮定 (A) のもとで次のように blow-up rate を確定することができる.

Theorem B (A) を仮定する. 解多角形が線分消滅するとし, $t \rightarrow T$ のとき有限の長さに残る 2 辺の添字をそれぞれ j_0, j_1 とする. このとき, 正数 C_1, C_2 が存在して次を満たす:

$$C_1(T-t)^{-\alpha} \leq v_j(t) \leq C_2(T-t)^{-\alpha}, \quad j \neq j_0, j_1, \quad t \in [0, T).$$

線分消滅しない場合, つまり 1 点に縮退する場合に関しては blow-up core の位置は時間列に依存する. このときの blow-up rate 等の解の性質に関してはよく分かっていない.

ただし, 次に示す意味において激しい振動をしない, という仮定のもとでタイプ II の爆発解であれば線分消滅することが示される.

$$r_{ij}(t) = v_i(t)/v_j(t) \text{ とする.}$$

(A2) $r_{ij}(t)$ は次の何れかを満たす:

$$(i) \lim_{t \rightarrow T} \min \left(r_{ij}(t), \frac{1}{r_{ij}(t)} \right) = 0$$

$$(ii) \limsup_{t \rightarrow T} r_{ij}(t) < \infty \text{ かつ } \liminf_{t \rightarrow T} r_{ij}(t) > 0.$$

Lemma 5.2 (A) および (A2) を仮定する. *Problem 1* の解 v がタイプ II の爆発解であるとする. このとき, 解多角形 $\mathcal{P}(t)$ は線分に縮退する.

参考文献

- [And1] Andrews, B., *Evolving convex curves*, Calc. Var. **7** (1998) 315–371.
- [And2] Andrews, B., *Singularities in crystalline curvature flows*, Mathematics Research Report MRR 01.011, 2001, School of Mathematical Sciences, ANU.
- [AGu] Angenent, S. and Gurtin, M. E., *Multiphase thermomechanics with interfacial structure, 2. Evolution of an isothermal interface*, Arch. Rational Mech. Anal. **108** (1989) 323–391.
- [G] 儀我美一, 非等方的曲率による界面運動方程式, 数学 **52** (2000) 113–127.

- [GG] Giga, M.-H. and Giga, Y., *Crystalline and level set flow – convergence of a crystalline algorithm for a general anisotropic curvature flow in the plane*, Free boundary problems: theory and applications, I (Chiba, 1999), 64–79, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appli., **13**, Gakkōtoshō, Tokyo (2000).
- [Gur] Gurtin, M. E., *Thermomechanics of evolving phase boundaries in the plane*, Clarendon Press, Oxford (1993).
- [IS] Ishii, K. and Soner, H. M., *Regularity and convergence of crystalline motion*, SIAM J. Math. Anal. **30** (1999) 19–37 (electronic).
- [IT] Ishiwata, T. and Tsutsumi, M., *Semidiscretization in space of nonlinear degenerate parabolic equations with blow-up of the solution*, J. Comput. Math. **18** (2000) 571–586.
- [IY] Ishiwata, T. and Yazaki, S., *On a fast blow-up solution and a degenerate pinching arising in an anisotropic crystalline motion.*, preprint.
- [O] 大川章哉, 結晶成長, 裳華房 (1977).
- [S1] Stancu, A., *Uniqueness of self-similar solutions for a crystalline flow*, Indiana Univ. Math. J. **45** (1996) 1157–1174.
- [S2] Stancu, A., *Asymptotic behavior of solutions to a crystalline flow*, Hokkaido Math. J. **27** (1998) 303–320.
- [T1] Taylor, J. E., *Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry*, Proceedings of the Conference on Differential Geometry, Rio de Janeiro, Pitman Monographs Surveys Pure Appl. Math. **52** (1991) 321–336, Pitman London.
- [UY1] Ushijima, T. K. and Yazaki, S., *Convergence of a crystalline algorithm for the motion of a closed convex curve by a power of curvature $V = K^\alpha$* , SIAM J. Numer. Anal. **37** (2000) 500–522.
- [U] 上羽牧夫, 結晶成長のしくみを探る, 共立出版株式会社 (2002).

- [Y1] Yazaki, S., *Point-extinction and geometric expansion of solutions to a crystalline motion*, Hokkaido Math. J. **30** (2001) 327–357.
- [Y2] Yazaki, S., *On an area-preserving crystalline motion*, Calc. Var. **14** (2002) 85–105.
- [Y3] Yazaki, S., *Asymptotic behavior of solutions to an expanding motion by a negative power of crystalline curvature*, Adv. Math. Sci. Appl. **12** (2002) 227–243.