数理解析研究所講究録 1314 巻 2003 年 55-62

小林計量による凸領域の特徴付けについて

慶應義塾大学経済学部 小林 正史 (Masashi Kobayashi)
Faculty of Economics, Keio University

1 序

本論では正則不変計量を用いた複素空間内の領域の特徴付けについて述べる. ここで用いる正則不変計量とは,

(i) すべての複素多様体上で定義され,

(ii) 正則写像により縮み,

(iii) 複素平面内の単位円板で Poincaré 計量と等しい,

という性質をもつものである. Carathéodory 計量と Kobayashi 計量がこのような計量の代表的なものである. これら二つの計量を用いた領域の特徴付けは様々な条件下において研究されている. この方面について詳しく知りたい読者は Jarnicki-Pflug [3] の 8.7 節と Miscellanea の D を参照されたい.

2 これまでの研究

まず, 典型的と思える結果を述べよう. γ_M で複素多様体 M 上の Carathéodory 計量を, κ_M で Kobayashi 計量を表わすことにする.

定義 1. 二つの複素多様体 M, N と正則不変計量 δ を考える. このとき, 正則写像 F が $U \subset M$ で δ **等長**であるとはすべての $v \in T_pM, p \in U$ に対して

$$\delta_M(v) = \delta_N(F_* v)$$

の成り立つときをいう.

ここで正則写像 F の定義域は M のある開部分集合, 終域は N としか仮定しない. 部分集合 $U \subset M$ が一点 p の場合は単に p で δ **等長**ということにする.

定理 1 (p.285, Jarnicki-Pflug [3]). $D \subset \mathbb{C}^n$ を有界領域, $a \in D$, $\Phi\colon D \to D$ を $\Phi(a) = a$ なる正則写像とする. このとき以下の 5 条件は同値である.

(i) $F'(a)$ の固有値の絶対値はすべて絶対値 1,

(ii) $F'(a)$ の行列式の絶対値は 1,

(iii) F は a で γ 等長,

(iv) F は a で κ 等長,

(v) F は双正則.

この定理 1 はよく知られている Cartan の定理の拡張と言えるものである.

定義 2. 複素多様体 M が **taut** [1] であるとは, 単位円板 $\Delta = \{|\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}$ から M への正則写像全体 $\mathcal{O}(\Delta, M)$ が正規族であるときをいう.

定理 2 (Vigué [8]). $D \subset \mathbb{C}^n$ を有界凸領域, M を n 次元 Carathéodory 双曲的 taut 複素多様体とする. 正則写像 $\Phi\colon D \to M$ が点 $a \in D$ で γ 等長であると仮定する. このとき Φ は双正則写像である.

複素多様体 M が **Carathéodory 双曲的**とは有界正則関数で M の任意の異なる 2 点が分離できることである.

ここでは述べないが Kobayashi 計量の定義のやり方は Carathéodory 計量の定義のものの「双対」といえる. したがって上の定理の「双対」といえる次の結果がある.

定理 3 (Graham [2]). M を n 次元 taut 複素多様体, $D \subset \mathbb{C}^n$ を有界狭凸領域とする. 正則写像 $\Phi\colon M \to D$ は点 $p \in M$ で κ 等長であると仮定する. このとき Φ は双正則写像である.

なお, 領域 D が**狭凸**とは D の境界の任意の異なる 2 点 z, w と任意の $0 < t < 1$ に対して,

$$tz + (1-t)w \in D$$

[1] taut の意味をリーダーズ英和辞典で調べると, (帆, 綱などが) ぴんと張った, (神経などが) 緊張した, 厳格な, 簡潔な, などといった意味がある. 厳格多様体, 簡潔多様体と書くのはどうもしっくりこない. 誰かいい名前を思いついたら是非教えて頂きたい.

が成り立つときをいう.

これに似た研究として Vigué [8],[9] があるが, 仮定は少々異なっている.

定理 2, 3 とも 1 点で等長であるということ, また, 写像の定義域は大域的であることを仮定していることに注意する.

3 主定理

本論で述べたい定理は次である.

定理 4 (主定理). $D \subset \mathbb{C}^n$ を有界凸領域, M を n 次元 taut 複素多様体とし, $U \subset D$ と $V \subset M$ を開部分集合とする. 正則写像 $\Phi\colon U \to V$ は U で κ 等長と仮定する. このとき, 正則被覆写像

$$\tilde{\Phi}\colon D \to M$$

が存在して $\tilde{\Phi}|_U = \Phi$ となる.

これまで紹介した定理とことなり, 写像は大域的ではない. その代わり等長の仮定が開集合上で成り立つ必要があることに注意する. 結論が双正則写像でなく正則被覆写像となるのは, 一般に正則被覆空間の Kobayashi 計量は底空間の Kobayashi 計量の引き戻しに一致することがいえるのであるからおかしなことではない.

直ちに次が分かる.

系 1. 主定理の条件に加え, M が単連結ならば D と M は双正則同値である.

M が taut であるという条件は人工的で証明の都合でつけられたと思われるかもしれないが, そんなことはない. それは次の簡単な例により分かる.

例 1. 半径 r の開円板を $\Delta(r) = \{|\zeta| < r\} \subset \mathbb{C}$ で表わし,

$$\begin{cases} D = \Delta(1)^2, \\ M = \Delta(1)^2 \setminus \{(3/4, 0)\}, \\ U = V = \Delta(1/2)^2, \\ \Phi = \mathrm{id}_{\Delta(1/2)^2} : \Delta(1/2)^2 \to \Delta(1/2)^2 \end{cases}$$

とおく．M が taut ではないことは定義より容易に分かる，Kobayashi 計量が D と変わらない，すなわち，M から D への包含写像による κ_D の引き戻しと κ_M は一致することも容易に分かる．さらに M は単連結であるから M が taut でなくても主定理の主張が成り立つとすると Φ は D から M への双正則写像に延長できてしまう．しかし，そんなことがありえないことは自明である．

4 主定理の証明の概略

主定理の証明の概略を述べよう．

M を n 次元 taut 複素多様体，$D \subset \mathbb{C}^n$ を 凸領域とする．$p \in M, 0 \in D$ と仮定する．$B_M(p,r)$ で Kobayashi 距離に関する中心 p 半径 $r > 0$ の開球をを表わす．

次の補題が鍵である．

補題 1. $r > 0$ とする．正則写像

$$\Phi\colon B_D(0,r) \to M$$

が存在して，$B_D(0,r)$ で κ 等長であり，$\Phi(0) = p$ と仮定する．このとき，正数 $\epsilon > 0$ と正則写像 $\tilde{\Phi}\colon B_D(0, r+\epsilon) \to M$ 存在して

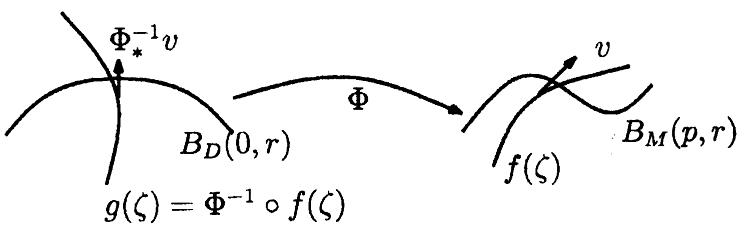
$$\tilde{\Phi}|_{B_D(0,r)} = \Phi$$

となる．

この補題の証明の概略を述べよう．簡単のため，D は狭凸と仮定する．$B_M(p,r)$ の境界に近い点 $q \in B_M(p,r)$ の接ベクトル $v \in T_qM$ をとる．v の κ_M に関する極値円板 $f\colon \Delta \to M$ と $\Phi_*^{-1}(v)$ の κ_D に関する極値円板 $g\colon \Delta \to D$ をとる．すると，D が狭凸であることにより，小さな正数 $\delta > 0$ をとると

$$g|_{\Delta(\delta)} = \Phi^{-1} \circ f|_{\Delta(\delta)}$$

となる．



これにより, Φ^{-1} は f に沿ってなら延長できることがわかる. この延長が正則で κ 等長であることが D が凸であることをうまく使うとわかる. この Φ^{-1} の局所的な延長により, Φ についての補題の主張がいえる. この補題から主定理が証明されることは容易に分かる.

5 応用

多重円板の特徴付けとして次の定理が知られている.

定理 5 (Stanton [7]). M を複素多様体とし, $p \in M$ とする. γ_M と κ_M は点 p で一致していて, κ_M の標形

$$I_p(\kappa_M) = \{v \in T_pM | \kappa_M(v) < 1\}$$

は Δ^n と線型同型とする. さらに

(i) M は Carathéodory 双曲的,

(ii) M は Carathéodory 距離に関して有界コンパクト,

と仮定する. このとき M と Δ^n は双正則同値である.

Belkhchicha [1] によると条件 (ii) の代わりに次の条件

(a) M は $\mathbb{C}^n$ 内の有界領域で Carathéodory 距離に関しで完備,

(b) M は γ_M を積分して得られる Carathéodory 内的距離に関して完備,

のいずれかを仮定しても定理は成り立つ.

主定理を用いると類似の次の定理がいえる.

定理 6. M を taut 複素多様体とし, $p \in M$ とする. γ_M と κ_M は点 p の開近傍 $U \subset M$ で一致していて, κ_M の点 p での標形 $I_p(\kappa_M)$ は Δ^n と線型同型とする. このとき M と Δ^n は双正則同値である.

証明の概略を述べよう. T_pM の基底 $v_1, \ldots, v_n$ をとり, それぞれの γ_M に関する極値関数を $\phi_1, \ldots, \phi_n$ とし, 写像 $\Phi\colon M \to \Delta^n$ を

$$\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$$

で定める. $\Phi(p) = 0$ としてよい. この写像は p の開近傍 U では Δ^n の原点の開近傍 V への双正則写像なり, しかも U で γ 等長である. (Lemma 1, Stanton [7] を参照). これにより写像 Φ^{-1} が V で κ 等長であることがわかり, 主定理が適用できる. Φ の定義域は M だから M は単連結でなくともよいことに注意する.

6 問題

主定理に関連する問題について述べよう.

問題 1. 開集合 $U \subset \mathbb{C}^n$ と関数

$$F\colon U \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$$

で以下の条件を満たすものが与えられているとする.

(i) F は連続,

(ii) 任意の $a \in U$ に対して $F(a,\cdot)$ は凸. すなわち, 任意の v_1, $v_2 \in \mathbb{C}^n$ に対して

$$F(a, v_1 + v_2) \le F(a, v_1) + F(a, v_2)$$

が成り立つ.

このとき, 有界凸領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ で

$$\kappa_D|_{U\times\mathbb{C}^n} = F$$

となるものを見つけよ.

問題 1 をこのままで解こうというのは無謀のように思える. 実際は以下に述べるようにさらに仮定が加わった場合で, この問題を考えるのが多いように思われる.

この問題が解けると主定理とあわせて以下が解ける.

問題 2. $D \subset \mathbb{C}^n$ を滑らかな境界をもつ単連結有界擬凸領域とする. このとき κ_D が凸であるなら D は凸領域と双正則同値.

滑らかな境界をもつ擬凸領域は taut であるからこれはすぐ分かる. $D \subset \mathbb{C}^n$ が 凸なら κ_D も凸であることに注意する. 逆が成り立つかどうかがは予想として述べられているが, この問題はそれ特別な場合である.

定義 3. M を複素多様体とする. M 上の **Carathéodory 距離**とは

$$c_M(p,q) = \sup\{\rho(f(p), f(q)) | f \in \mathcal{O}(M, \Delta)\},$$

Lempert 関数 $\tilde{k}_M$ とは

$$\tilde{k}_M(p,q) = \inf\{\rho(a,b) | f \in \mathcal{O}(\Delta, M), f(a) = p, f(b) = q\}$$

のことである. ここで ρ は Δ 上で定義される Poincaé 距離である.

問題 3. Carathéodry 距離と Lempert 関数が局所的に等しい taut 複素多様体 M は凸領域に正則に覆われる．特に M が単連結なら M は凸領域と双正則である．

κ_M から自然に誘導される Kobayashi 距離を k_M とすると，一般に $c_M \leq k_M \leq \tilde{k}_M$ が成り立つ．しかし，Lempert [5] により，D を $\mathbb{C}^n$ 内の有界凸領域とするとき，$c_D = k_D = \tilde{k}_D$ となることに注意されたい．

証明の概略は以下である．Carathéodory 距離の方向微分から γ_M が Lempert 関数の方向微分から κ_M が求められることが分かる (Pang [6], K [4] を参照)．γ は常に凸でありことから，問題 1 によりこの問題が解ける．

問題 4. 有界凸領域 $D \subset \mathbb{C}^n$ が複素多様体の直積 $M = M_1 \times M_2$ と双正則同値のとき D は二つの有界凸領域 D_1 と D_2 の直積 $D_1 \times D_2$ と双正則同値となる．

κ_{M_1} が凸であることが D が凸，つまり，κ_D が凸であることより分かる．問題 1 が正しければ M_1 がある有界凸領域 D_1 と双正則であることが分かる．M_2 についても同様だから問題が解ける．

参考文献

[1] Larbi Belkhchicha, *Caractérisation des isomorphismes analytiques sur la boule-unité de* $\mathbf{C}^n$ *pour une norme*, Math. Z. **215** (1994), no. 1, 129–141. MR 94m:32037

[2] Ian Graham, *Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at one point*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), no. 4, 917–921. MR 89k:32048

[3] M. Jarnicki and P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[4] Masashi Kobayashi, *On the convexity of the Kobayashi metric on a taut complex manifold*, Pacific J. Math. **194** (2000), no. 1, 117–128. MR 2001b:32018

[5] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), no. 4, 427–474.

[6] M.-Y. Pang, *On infinitesimal behavior of the Kobayashi distance*, Pacific J. Math. **162** (1994), no. 1, 121–141.

[7] Charles M. Stanton, *A characterization of the polydisc*, Math. Ann. **253** (1980), no. 2, 129–135. MR 82g:32028

[8] Jean-Pierre Vigué, *La métrique infinitésimale de Kobayashi et la caractérisation des domaines convexes bornés*, J. Math. Pures Appl. (9) **78** (1999), no. 9, 867–876. MR 1 725 744

[9] ———, *Revêtements et isométries pour la métrique infinitésimale de Kobayashi*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 11, 3279–3284. MR 2002c:32022