数理解析研究所講究録 1316 巻 2003 年 1-8

超局所微分作用素の完全WKB解析*

近畿大学 理工学部 青木貴史
Kinki University AOKI, Takashi
京都大学 数理解析研究所 河合隆裕
Kyoto University, RIMS KAWAI, Takahiro
京都大学 大学院理学研究科 小池達也
Kyoto University, Dept. Math. KOIKE, Tatsuya
京都大学 数理解析研究所 竹井義次
Kyoto University, RIMS TAKEI, Yoshitsugu

§0 背景

高階線型常微分方程式に対する Stokes 図形を得る為に “新しい Stokes 曲線” が必要とされることを示した Berk-Nevins-Roberts（[BNR]）の仕事の出発点は，無限個の phase（或いは mode）を許す作用素の WKB 解析を展開する際 “重要そうな数個の phase の相互作用にまず注目して議論を始める” 為であったと思われる.（[BP, Section VI] 参照.）そこで我々は，“仮想的変わり点” を議論の出発点とする我々の approach（[AKT1]）が無限個の phase を持つ WKB 解を許容する微分方程式の WKB 解析に於いても有効であるかどうかを調べることを目標に，“WKB 型の微分作用素” なる概念を導入し，そのいくつかの基礎的性質（変わり点の定義，WKB 解の構成，作用素の分解定理，仮想的変わり点の定義，等）を考察（[AKKT1],[AKKT2]），併せて Stokes 図形を完成させるにはやはり仮想的変わり点から出る Stokes 曲線も考えに入れるべきであることをいくつかの例で確認した．我々が [AKKT1] で導入した “WKB 型の微分作用素” なる概念は，WKB 解析と超局所解析の関連，と云う視点から興味深い数学的対象と思われるが，Berk 達の観点からは

*科学研究費（課題番号 14340042 及び 13640167）の補助を受けていることを感謝と共に記す.

まだ "too restricted class" との憾みがある：Berk 達がモデルとして常に念頭に置いていると思われる方程式（[BB, (18)]；後述の方程式 (6), (7) を参照）がそのままでは [AKKT1] に謂う "WKB 型の微分方程式" になっていないからである．(その方程式の Fourier 変換を考えて [AKT2] の exact steepest descent method を援用する，と云う方法は考えられるが，Stokes 図形の複雑さの為に余り実用的とは思えない.) そこで Berk 達の意図に忠実な作用素のクラスを考えようとすると，どうしても微分作用素の枠をはみ出した作用素，即ち超局所微分作用素迄考察の対象としなければならない．所が，そもそも [AKKT1] で "WKB 型の微分作用素" を定義する際，当該作用素の Borel 変換を 2 変数の超局所微分作用素と考えてその性質に拠り当該作用素の特徴付けを行っているのだから，"そこ迄考察の対象を拡げては数学屋のお遊びと思われるのではあるまいか" と云う我々のように気弱な数学屋の持ちがちな不安を忘れることさえ出来れば，その展開はそれ程困難ではあるまい，と予想される．従って今，実際それが具体的に要求されているのだからやって見よう，と思うのは当然である．そして，事実，Berk-Book の例，又関連する Landau の函数 ([L, 40)]；但し，(40) 式の 2 行目は

$$\frac{iE_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_2(k)-K_1(k)}{k(1-K_1(k))(1-K_2(k))}e^{ikx}dk$$

のミスプリントと思われる．(係数分母の ε は不要，かつ積分端点は $-\infty$ でなく 0.)) はいずれも数学的に極めて含蓄が深く，その滋味，洵に掬すべき物がある．(§2 参照.)

以下我々の trials の内記録に値いすると思われる部分をここに記すこととする．理論の詳細は [AKKT3] に発表予定である．

§1　大きなパラメタを含む超局所常微分作用素の WKB 解析とは何か？

言うも愚かなことながら，通常の微分方程式の WKB 解析の出発点は（η を大きなパラメタとして）

$$\frac{d}{dx}\exp(\eta\phi(x)) = \eta\phi'(x)\exp(\eta\phi(x)) \tag{1}$$

と云う自明な関係式である．では最も基本的な超局所微分作用素 $(d/dx)^{-1}$ に対しては (1) の類似はどうなるのか？ 例えば $\exp(\eta\phi(x))$ が $x\to-\infty$ の時十分速く 0 になるものとし

て積分端点 $-\infty$ からの寄与を無視することとして部分積分を繰り返せば

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & (\frac{d}{dx})^{-1}\exp(\eta\phi(x)) \\
&= \int^x \exp(\eta\phi(x))dx \\
&= (\eta\phi'(x))^{-1}\exp(\eta\phi(x)) + \int^x \frac{\phi''(x)}{\eta\phi'(x)^2}\exp(\eta\phi(x))dx \\
&= (\frac{1}{\eta\phi'(x)} + \frac{\phi''(x)}{\eta^2\phi'(x)^3})\exp(\eta\phi(x)) + \int \frac{3\phi''^2 - \phi'\phi'''}{\eta^2\phi'(x)^4}\exp(\eta\phi(x))dx \\
&= \cdots .
\end{aligned}
$$

従って

$$(3) \qquad (\frac{d}{dx})^{-1}\exp(\eta\phi(x)) = a(x,\eta)\exp(\eta\phi(x)),$$

但し $a(x,\eta)$ は

$$(4) \qquad \eta^{-1}\phi'(x)^{-1} + \eta^{-2}\phi''(x)\phi'(x)^{-3} + \cdots$$

なる形の η^{-1} に関する形式巾級数．ここで $a(x,\eta)$ は (4) の形を仮定すれば

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}a(x,\eta) + \eta\phi'(x)a(x,\eta) = 1$$

なる方程式に拠り，$a_1(x) = 1/\phi'(x)$ から出発して recursive に決定することもできることは明らかであろう．他方，[AKKT1,§3] の議論を念頭に置くと，$\boldsymbol{\phi'(x) \neq 0}$ **なる限り**，$\eta^{-1}(\eta^{-1}\frac{d}{dx} + \phi'(x))^{-1} = \eta^{-1}(\eta^{-1}\phi'(x)^{-1}\frac{d}{dx} + 1)^{-1}\phi'(x)^{-1}$ なる作用素を $\eta^{-1}\phi'(x)^{-1}d/dx$ の巾級数を用いて書き表わし，さらにその級数に於いてすべての微分作用素が掛け算作用素の右側に来るように表示し直した時，微分作用素を含まない項が $a(x,\eta)$ となることが期待され，実際その期待が事実であることは容易に示し得る．即ち関係式 (3) は (1) と比べて形は複雑であるけれども，"リッカチ型方程式を用いて WKB 解を recursive に構成する" と云う理論の枠組は超局所微分作用素迄議論の対象を拡げても何ら本質的な変更の要は無いことが判る．ただ，議論を進める際，

$$[A] \qquad \phi'(x) \neq 0$$

と云う仮定は重要である．以下，変わり点の種類に依っては [BB] の議論に難があることを，この仮定 [A] が破れていることと関連させつつ，示して行きたい．

§2 Berk-Bookの超局所微分方程式の特性方程式を巡って

まず表題の方程式を思い出しておこう：

$$\gamma^2 \exp x^2 = -2z^2(1-2z\exp(-z^2)\int_0^z \exp t^2 dt) + \beta z^3 \exp(-z^2) \overset{\text{def}}{=} U(z), \tag{6}$$

但しここで β, γ は実定数．又，$z = \alpha/k$（α：正定数）として，k が (6) をその特性方程式とするある積分方程式（後述 (7)）の WKB 解の phase を与えることとなる．(尚，以下簡単の為 $\alpha = 1$ とする．尚既に (6) 式でいくつかの定数を 1 と置いている．又，Landau の議論で用いられる $K_1(k), K_2(k)$ は，(6) 式の右辺で $\beta = 0$ と取り，さらに $\int_0^z \exp t^2 dt$ の積分端点 0 を各々 $-i\infty, i\infty$ に置き換えて得られる函数と，定数倍を除いて一致することを示すことができる.）ここで (6) 式の形の特殊性に依り，右辺の Fourier 逆変換を核函数とする積分作用素を考える（左辺はそのまま掛け算作用素として扱う）ことに拠り Berk-Book が問題とする積分方程式

$$D\mathscr{E}(x) = 0 \tag{7}$$

が得られる．(6) の右辺が $1/k$ の整函数であることから判るように，$k = \eta^{-1}d/dx$ と同一視して我々の謂う "WKB 型の超局所微分作用素"（[AKKT3] 参照）がそこに現れていることになる．

以下では，(6) の変わり点の近傍での (7) の構造を調べることを目標とする．その為に，まず (6) の零点 $\{z = z(x)\}$ の様子を複素領域で調べてみよう．以下に見られるように，方程式 (7) の構造は複素領域で考察しなければその本質が把握できない．しかし，手はじめにまず (x, z) が実の場合に (6) の零点を調べてみよう．この時，Berk-Book が注意しているように

$$\lim_{z\in\mathbb{R}, z\to\infty} U(z) = 1 \tag{8}$$

が成立つ．この証明には

$$g(z) = \exp(-z^2)\int_0^z \exp t^2 dt \tag{9}$$

の $z \in \mathbb{R}, z \to \infty$ での漸近展開が

$$\frac{1}{2z} + \frac{1}{4z^3} + \frac{3}{8z^5} + \cdots \tag{10}$$

で与えられることを用いるのが最も簡明であろう．さて，$z \in \mathbb{R}^+$ の時，グラフ $(z, U(z))$ は計算機を用いて容易に図示し得る．([BB, Fig.3] 参照．但し $U(z)$ は原点で z 軸に 2 次の

接触をする．([BB] の図でそうは見えない．但し，これは議論に影響する話ではなく，全くの御愛敬である.)）今 $\gamma > 1$ としよう．この時 $\gamma^2 \exp x^2 > 1$ ($x \in \mathbb{R}$) 故，[BB, Fig.3] から直ちに読み取れるように (6) の実解 $z = z(x)$ は $0 < x \ll 1$ なる時 2 根存在し，それ等はある点 $x = x_A$ で合流する；即ち $x = x_A$ は方程式 (7) の変わり点であり，しかもそこでの特性値 $z = z(x_A)$ は有限確定（[BB, Fig.3] のグラフで $U(z)$ が最大となる点が $z(x_A)$ である）故，この種の変わり点の近傍では [AKKT1, Theorem 5.1] と同様の分解定理が成り立ち，“$x = x_A$ の近傍で方程式 (7) は Airy の方程式に還元できる” と言ってよい．さて問題は $\gamma < 1$ の場合である．この時，x が十分大きくなれば $\gamma > 1$ の時と同様の変わり点が現われることは明らかであるが，もう一つ，

$$\gamma^2 \exp(x_B^2) = 1 \tag{11}$$

となる点 x_B が問題である．この時，(8), (10) 由り，$x \gtrapprox x_B$ の時

$$\gamma^2 \exp x^2 - 1 = \frac{3}{2z_0(x)^2} \tag{12}$$

に拠り $z_0(x)(> 0)$ を定めれば，$z_0(x)$ の十分近くに (6) の解 $z = z(x)$ を見つけ得ると考えられる．しかも (12) の形から判断すれば，$x = x_B$ では，2 つの解 $z_+(x)$ と $z_-(x)(\fallingdotseq -z_+(x)$; ここで $=$ でなく $\fallingdotseq$ としたのは $U(z)$ が $\beta z^3 \exp(-z^2)$ を含んでいる為）が合流すると思われ，$x = x_B$ は特性方程式 $D(x, k) = 0$ に対し，

$$D(x_B, k(x_B)) = \frac{\partial D}{\partial k}(x_B, k(x_B)) = 0 \tag{13}$$

が満たされる，と云う意味での変わり点ではないけれども，WKB 解析的な感覚で言って十分変わり点の資格を持っていると言えよう．尚，[BB] は大らかに“$\partial D/\partial k = 0$ at $x = x_B$” と主張している（p.656 右欄）；これは多分 z 変数でなく k 変数 $(= 1/z)$ で漸近展開 (10) を考え，D にこの漸近展開を代入したものを対象としての主張であろう．これは我々も大好きな議論ではあるけれど，$x = x_B$ で $k = k(x)$ が 0 となるからやはり良心の呵責を感じる所でもある.（やっぱり数学科の卒業ですねぇ—.）まあ，数学屋の良心はともかく，何とか方程式 $D(x, z) = 0$ の複素解 $z = z(x)$ の様子を知りたいと思って計算機を（かなり長時間）働かせて得られた図が後掲の Figure 1 である．そこでは $x = x_B + r\exp(i\theta)$ $(r = 0.005)$ として θ を $-100\pi < \theta < 100\pi$ の範囲で動かした時の $z(x)$ の軌跡が図示されている．Figure 1 から直ちに読み取れるように，$|\theta|$ が小さい時（この図では略したが具体的な計算結果に拠れば $|\theta| = 0.47\pi$ $(< \pi/2)$ 位迄）は

$$z(x) = \left(\sqrt{\frac{4x_B}{3}}\gamma \exp\left(\frac{x_B^2}{2}\right)\right)^{-1} (x - x_B)^{-1/2} \tag{14}$$

が近似的に成り立っているが，(ここでは略した計算で) $|\theta|$ が 0.48π を越した付近から急に $z(x)$ の動きが変わり，特に注目すべきこととして，$\theta = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ での z の値は $z(x_B)$ と大きく離れてしまう．

これ等の事実は Landau の [L, p.458] の主張とよく整合しており，Figure 1 は Landau の言いたかったことをよく visualize しているように思われる．同時に，このような複素領域での $z(x)(= 1/k(x))$ の挙動は，[BB, Fig. 4(b)] のような実領域に於ける (6) の零点集合の描写だけでは，[BB] の期待しているような閉区間 $[-x_B, x_B]$ の近傍での方程式 (7) の Weber 方程式への還元可能性の根拠とはならないことをも示している．x_B の近傍での (7) の解析は x_A の近傍での解析とは全くレベルの違う問題であり，一般論として "変わり点" で $k(x) = 0$ となる場合の超局所微分方程式の解析を行おうとするのは多分現状では余り生産的ではないと思われるけれど，少くとも方程式 (7) に限ってその WKB 解析を試みることには意味があるかと考え，現在 x_B の近傍での Stokes 図形を調べにかかった所である．この場合の議論の詳細の報告は別の機会に譲りたい．

文献

[AKKT1] T. Aoki, T. Kawai, T. Koike and Y. Takei: On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases. To appear in *Adv. in Math.*

[AKKT2] ———: On global aspects of exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases. RIMS Preprint No. 1392 (2003).

[AKKT3] ———: On the exact WKB analysis of microdifferential operators of WKB type. In prep.

[AKT1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: New turning points in the exact WKB analysis for higher order ordinary differential equations. Analyse algébrique des perturbations singulières, I. Hermann, 1994, pp.69–84.

[AKT2] ———: On the exact steepest descent method: A new method for the description of Stokes curves. *J. Math. Phys.*, **42** (2001), 3691-3713.

[BB] H. L. Berk and D. L. Book: Plasma wave regeneration in inhomogeneous media. *Phys. Fluids*, **12** (1969), 649-661.

[BNR] H. L. Berk, W. M. Nevins and K. V. Roberts: New Stokes' line in WKB theory. *J. Math. Phys.*, **23** (1982), 988–1002.

[BP] H. L. Berk and D. Pfirsch: WKB method for systems of integral equations. *J. Math. Phys.*, **21** (1980), 2054-2066.

[L] L. Landau: On the vibration of the electronic plasma. Collected Papers of L. D. Landau, Pergamon Press, 1965, pp.445-460. (Originally in *J. Phys. U.S.S.R.*, **10** (1946).)

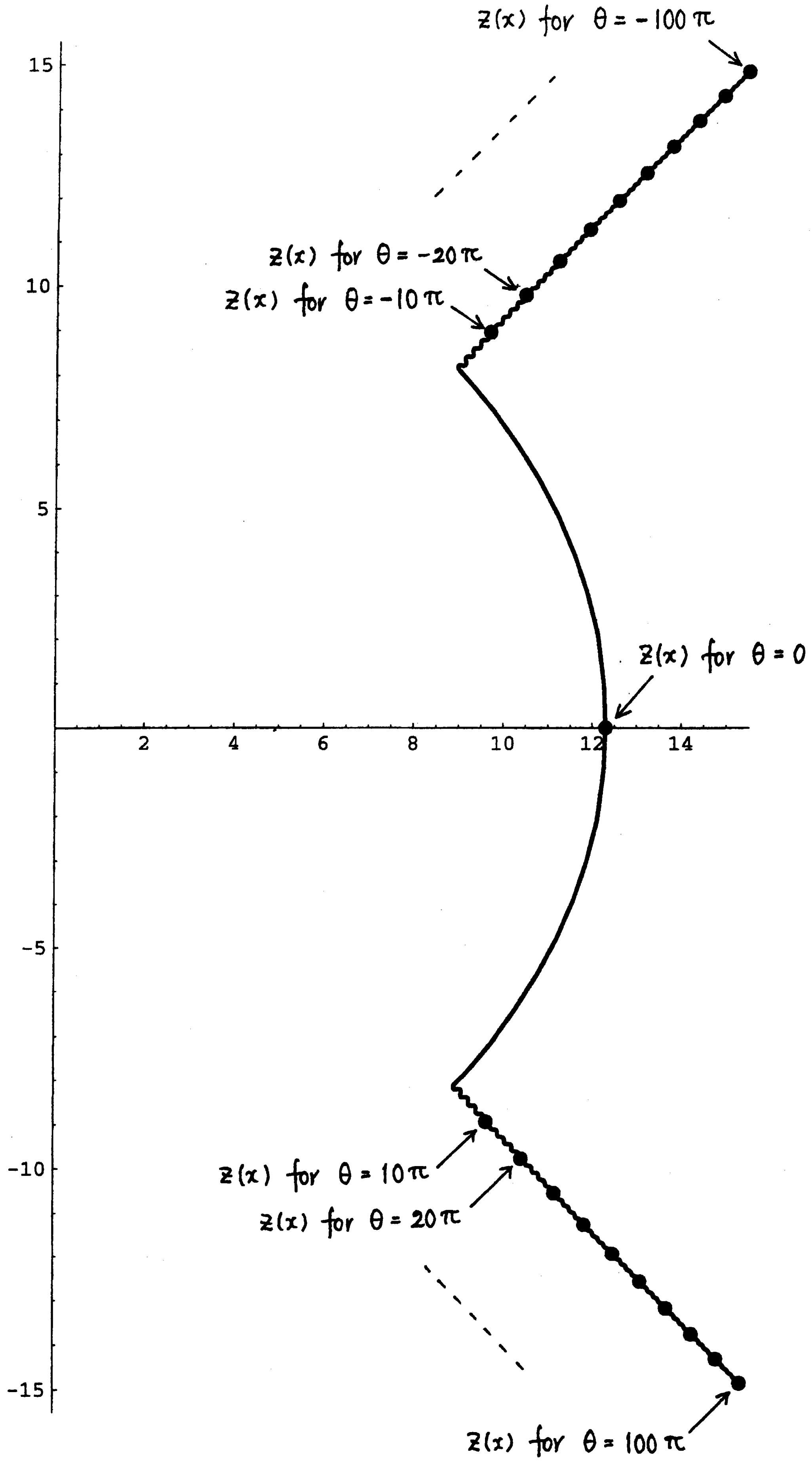
z(x) for θ = -100π
z(x) for θ = -20π
z(x) for θ = -10π
z(x) for θ = 0
z(x) for θ = 10π
z(x) for θ = 20π
z(x) for θ = 100π
15
10
5
-5
-10
-15
2
4
6
8
10
12
14

Figure 1