

ライプニッツの方程式論について — 行列式, 線型方程式論を中心に —

東京大学大学院・総合文化研究科 修士課程 2 年 但馬 亨 (TAJIMA, Toru)
Graduate School of Arts and Sciences
University of Tokyo

序論：研究の意義と目的

ライプニッツの数学史研究は、19 世紀より連続と続くドイツ数学史 (Gerhardt, Mahnke, Hofmann, Knobloch) の伝統に依存するところが大きい。これら偉大な先行研究によって主として無限小解析に関する歴史研究は大きく進展し、第 2 次大戦後には既に熟成された観すらある。しかし、その結果、その他の領域についての研究が副次的なものとなされ、重要であるが研究・評価の遅延していた分野も生じている。方程式論・行列式論に関連する研究がまさにその 1 つであり、長きに渡って関連資料が未公開のまま、解明されるべき課題を多く残していた。

しかし転機が 1980 年に訪れる。Knobloch により関連草稿の初の体系的な校訂版 [BDT] が編まれたのである。以後同氏による研究論文は数点発表されたが、断片的なものでまだまだ全容解明には至っていない状況である。当研究では同氏の校訂版から新しく明らかになった事実をもとに、無限小解析以外のライプニッツによる方程式論・行列式論研究とははいかなるものであったか部分的に紹介してみたい。

1. 起源としての「結合法論」

初期の組み合わせ理論に関する体系的な記述を包含した『結合法論』(Dissertatio de arte combinatoria) (1666) が及ぼした影響を論じていく。論理学史家 L.Couturat が “La logique de Leibniz” 第 6 章で指摘するようにライプニッツにおいては結合法と普遍数学 (Mathesis universalis) 概念、さらには彼独自の内包的な傾向をもつ論理学はほぼ同値な関係を結んでいる。したがって、彼の普遍数学構想の一分科としての方程式・行列論に関しては、その起源を結合法まで遡及できると思われる。実際、そこにはルルスの単なる記憶術を意味するに過ぎなかった中世的普遍記号学の伝承を咀嚼し批判・洗練化しようというライプニッツの試みが展開されている。

ただ、個別の数学内容としてはまだパリ時代以降の大きな研究の飛躍がなされておらず、円順列・数の分割など成果はごく一部に限定されている。パリ時代のパスカルの「算術三角形」の理解まで「組み合わせ数」の一般化に至っていないことなどがその一例として挙げられるであろう。さらに「結合法」に関して明示的に扱っている論考は『結合法論』以降にも長期間継続して現れる。その中には対称式、数の分割などを扱った論考あり、後者に関してはより後年の著述を扱った [BDT]n.60-66 にも含まれている。^{*1}執筆年は 1692 年から 1713 年とされているので、この問題へのライプニッツの執着の深さが伺われる。

^{*1} 対称式に関しては [StL], Sup.11, pp. 91-96. の解説を参照。

II. 証明観における位置付け

ライプニッツの数学は、その証明観において、両面価値的な性質を備えるものである。[ライプニッツ 1997]pp. 90-94. によれば、『第一命題の証明』(ca.1672)*2での「公理を証明する」構想などがその1つで、ここで指されている「第一命題」とは公理を意味する。これはユークリッド『原論』の著名な公理「全体は部分より大きい」等のあらゆる基礎的な公理、命題を定義と同一律のみに依拠した証明で正当化し、再構成しようというきわめて特異的かつ野心的計画である。これを論理主義的姿勢というならば、その一方でまったく正反対の立場もある。

それは、フランスの懐疑主義者 Simon Fouchet 宛書簡 (1686) や『人間知性新論』第4部 11,12章で述べられるプラグマティックとも称すべき数学論という姿勢である。詳細については省いて簡潔に表現するならば、例えば無限小概念など、その基礎付けにおいて多少脆弱性を孕んでいてもこれまで数学的な成果を生んできた有益な概念を全否定する必要はないという立場である。この点について、方程式論・行列式論に関してはどちらに与するものなのであろうか。IIIでの終結式や Bézout の方法の導入についての部分で論じる。

III. 方程式論と行列論

まずはじめに、行列式や線型方程式の理論が研究される以前に扱われた高次方程式論について議論を導入しておきたい。17世紀後半においては高次方程式に関する幾つかの問題が先端的な関心をもって扱われた。[林 2000]pp. 90-106 によれば、ライプニッツが本格的に数学研究に開眼したパリ滞在期 (1972-76) には、主として (i) 3次方程式におけるカルダノの公式の一般的有効性と (ii) 高次方程式の一般解法のための中間項削除の2問題に専心したとされている。

(i) について簡単に紹介する。カルダノ公式の要点は、現代の記号法で簡単に表現すると以下ようになる。三次方程式 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 (a \neq 0)$ における中間項 bx^2 を削除するために、 $y = \frac{b}{3a}$ などとおき、前式への代入の結果、

$$y^3 + 3py + q = 0$$

という還元3次方程式を得る。この式はさらに $y = u + v$ などとおけば、 $u^3 + v^3 + (uv + p)(u + v) + q = 0$ となり、よって

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ uv + p = 0 \end{cases}$$

を満たすように u, v を定める。そして、 u^3 と v^3 の積と和の組み合わせから2次方程式の問題に帰着させるというものだ。代数記号の表現こそ変わるが、演算のルールとしてはほぼ一貫して17世紀まで継承されている。しかし、最終的に実数解となる場合でも、例えば $x^3 - 6x - 4 = 0$ のように、算出される u^3 , v^3 の値によっては過程に必然的に虚数量が現われてしまう場合がある。カルダノの時代はおろか、17世紀まで虚数量の利用には臆病な態度を保ち続けていた数学者が大半を占めていたので、これは大問題であった。その中で例外的に虚数量の扱いに寛容だったのが、1572年に『代数学 (L'Algebra)』を公刊したボンベリである。ライプニッツはこのボンベリの手法を評価している。*3

*2 "Demonstratio propositionum primarum", [LSB], VI-2 479-486.

*3 [林 2000]pp. 94-96.

続いて(ii)についてだが、パリ滞在期を中心として、チルンハウスとの共同作業を行ったハノーファー転居後(1676年11月以降)にも継続して研究が行われている。^{*4}ここで、現代チルンハウス変換として知られる結果が現われるものの、これとて高次方程式の一般解法にはつながらないという見識を深めることになる。これ以降、方程式論の研究は連立1次方程式の解法をはじめとした線型方程式系の問題へとシフトしている。^{*5}

続いて線型方程式論についての問題を扱う。まず、ライプニッツにおける行列式導入の起源について簡単に述べたい。彼に限定すれば、行列式の導入は連立1次方程式の解法からであった。その1例としては、[BDT] n. 5にある当時交友があったオランダの数学者 Fergson へ宛てられた反射光学に関する問題が挙げられる。行列式の起源に関しては、掃きだし法などより労力の少ない方法を用いればよいのに、なぜわざわざ行列式など煩雑な手段を導入したのかという疑問が生じる。消去法の議論から導入されることの方がより自然であるという意見もある。実際和算においてはそのようである。ただ、ライプニッツがこの時点で処理した問題の程度は、連立する数も2, 3という少量の計算量しか要求しない単純なものであり、少々非効率性は無視できたのではないか。むしろ『結合法論』より続く形式的演算への嗜好そのものが大きく働いたのであろう。続いて、利用された方法や概念について具体的に例示していく。

・仮構数の意味するもの：数による未知数表記

ライプニッツの行列式での文字表記は特異である。『人間知性新論』第4部巻7章6節で、テオフィルに語らせた言明を少し引用してみよう。^{*6}

ヴィエトが、より大きな一般性を得るため数の代わりに文字を使ったように、私は数による文字を再び導入しなかった。というのは、それらは文字よりも適切 (*propre*) で、もちろん見かけ (*la spécieuse*) においてさえ適切であるから。私は、それが長い計算においてたいへん役に立つことに気がつきました。・・・(中略)・・・よい記号法は人間精神の最も偉大な助けのひとつである、と思います。(但馬訳)

このようにライプニッツはその記号法について、ヴィエトを明確に意識し、より優れたものであるという自負を隠さない。この仮構数の実際の利用は『新解析例 (Specimen Analyseos novae)』(1678)での連立方程式の一般解法の導出の際になされている。

・『新解析例』での連立方程式計算

『誤謬が避けられ、精神があたかも手を引かれるように導かれ、容易に数列が見出される新解析例 (Specimen Analyseos novae, qua errores vitantur, animus quasi manu ducitur et facile progressionem inveniuntur)』(1678.6)^{*7}

仮構数、符号規則、クラメールの公式の発見を総合させ、連立1次方程式の解法を行っている。

^{*4} [林 2000] pp.107-108.

^{*5} カルダノ、フェラリからヴィエト、デカルトまでの高次方程式論の前史については[ライプニッツ 1997] pp.203-210の原亨吉氏の解説が詳しい。

^{*6} [LPG], 5, p.391.

^{*7} [LMG], VII, 7-8 etc., [ライプニッツ 1997], pp. 273-276.

連立1次方程式 (a_{ij} :定数)

$$\begin{cases} a_{11} = a_{12}x + a_{13}y + a_{14}z \\ a_{21} = a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z \\ a_{31} = a_{32}x + a_{33}y + a_{34}z \end{cases}$$

二重添え字による表現 (左, 右) = (係数, 未知数)

$$\begin{cases} 12.2 + 13.3 + 14.4 - 11aequ.0 \\ 22.2 + 23.3 + 24.4 - 21aequ.0 \\ 32.2 + 33.3 + 34.4 - 31aequ.0 \end{cases}$$

未知数 z を与える計算式

$$z = \frac{31(-12.23 + 13.22) + 21(12.33 - 13.32) + 11(-22.33 + 23.32)}{34(-12.23 + 13.22) + 24(12.33 - 13.32) + 14(-22.33 + 23.32)}$$

分子: 「方程式の既知項から作られ」, 求める未知量と「別の相異なる文字の係数のすべてがお互いにかけて合わせられ, 同時に最も小さい文字からはじめて, $-12.23 + 13.22$ のように符号を交替させながら加えたもの」

分母: 値が求められる未知量の係数から作られ, 「相異なる未知量と方程式のあらゆる係数を互いにかけて合わせ」, 「より小さい文字から初めて順序に配列された席に交互に $+$, $-$ がつけられる」

作用数 (afficiens) について: $-12.23, +13.22 \rightarrow z$ の解における作用数の符号の変化の法則を見出す. (ca.1683-84)

・終結式概念の使用

『未知数の消去について (De tollendis incognitis)』(ca.1679-81) で用いられた方法.*⁸

四次の連立方程式において共通の未知数を消去する際にシルベスターの dialytique methode を導入している.

$$\begin{cases} a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0 \\ l + mx + nx^2 + px^3 + qx^4 = 0 \end{cases}$$

それぞれ両辺に x, x^2, x^3 をかけあわせる操作を加え併置させた各項の係数に注目した.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & . & . & . \\ . & a & b & c & d & e & . & . \\ . & . & a & b & c & d & e & . \\ . & . & . & a & b & c & d & e \\ l & m & n & p & q & . & . & . \\ . & l & m & n & p & q & . & . \\ . & . & l & m & n & p & q & . \\ . & . & . & l & m & n & p & q \end{vmatrix} = 0$$

*⁸ [BDT]n. 36

シルベスター行列の行列式化したもの（終結式）を利用している。ただ、式のみで具体的な計算例が一切ない。もし似たような形式の方程式系があれば適用するように記している。クラメールがいくつかの実例を挙げて、最終的に公式化したものを記した事とは対照的である（後述）。関連して、連立方程式の単一方程式への還元問題について論じたい。高次の連立方程式系は、共通未知数を消去して統合した結果、一般的に次数がきわめて高い1次方程式に変化し、特殊なケースを除いては解けない。計算に莫大な徒労を要求されるだけで終わるのである。関孝和は『解伏題之法』で3元4次の未知数消去後には1元54次の方程式へと還元されるケースを扱っているが、ライプニッツも同様の問題に直面していなかったのだろうか。その調査が課題として残る。

・ Bézout の定理について

『方程式の消去について (De tollendis aequationum)』での消去計算^{*9}

→『未知数消去の終結方程式の次数およびこの方程式を見出すため用いられるのが適している方法についての研究』(1764) で現れる Bézout の定理を前提としたもの。^{*10}

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0 \quad (1)$$

において $f(x, y)$ が m 次式, $g(x, y)$ が n 次式ならば

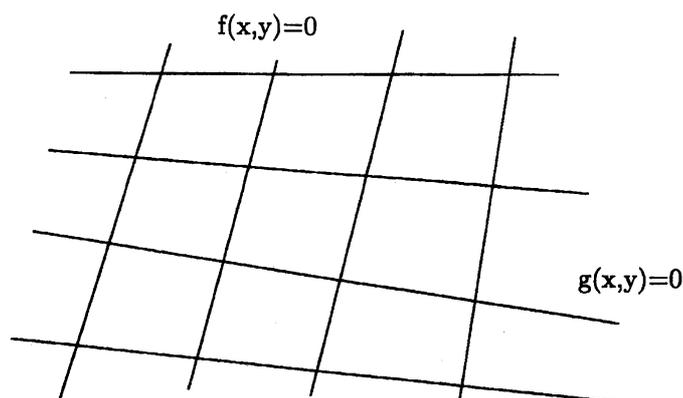
(1) 式の解は虚数根, 重根, (無限遠点) をそれぞれ数え上げれば, mn 個ある。

直観的証明のアウトライン:

$f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ がともに1次の積に因数分解できると仮定すると, $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ はそれぞれ m 次と n 次の積に分解できる。

$$f(x, y) = (a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) \cdots (a_mx + b_my + c_m) = 0$$

$$g(x, y) = (p_1x + q_1y + r_1)(p_2x + q_2y + r_2) \cdots (p_nx + q_ny + r_n) = 0$$



直線に分割された $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$

^{*9} [BDT]n. 39

^{*10} Étienne Bézout, "Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations", *Histoire de l'Académie royale des sciences*, année 1764 (Paris 1767), pp. 288-338.

このとき、上図のように、 $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$ はそれぞれ、 m, n 個の直線になる。よって（無限遠点も含めれば）、これらの交点は mn 個存在する。未だ厳密性を欠く直観的な議論だがこの定理を受容しないと、解の個数の上限について正確な同定が不可能になり、いくら解そのものを計算しても、それ以上ないと断言することができないのである。ライプニッツの認識はこの段階だったのであろうか。そして、これを前提に以下の Bézout の方法と言われる消去規則が導入され実際の問題に適用される。^{*11}

Bézout の方法：

もし、 x に関する m 次と m' 次の二つの方程式があるならば、 x を消去するためには前者に次数 $m' - 1$ 次の不定多項式を、後者には $m - 1$ 次の不定多項式をそれぞれかけあわせ、お互いを足し合わせなければならないであろう。

II で論じた二つの姿勢のうち、ライプニッツは代数曲線の性質等に深くコミットすることはせず、消去法に関してより機械的な運用を図っている。ここではプラグマティックな後者の立場をとっていたのだろうか。

なお、この定理は 1930 年代に、

*

n 次元射影空間内の l 次の r 次元代数多様体 M と、 m 次の $n - r$ 次元代数多様体 N との交点は、無限集合でなければ常に lm 個である。

と一般化されたものが van der Waerden によって厳密な証明を与えられた。

・到達点としての 2 論考

1. 『単純な方程式から文字を取り除くことについて I (De sublacione literarum ex aequationibus simplicibus I)』(ca. 1683-1684) における略号の変遷^{*12}

cf. 二元連立方程式

$$10 + 11a + 12b = 0$$

$$20 + 21a + 22b = 0$$

a の消去と b の消去をそれぞれ行う。

$$\begin{array}{r} +10.21 \quad +12.21b \\ -11.20 \quad -11.22b \end{array} = 0$$

$$\begin{array}{r} +10.22 \quad +11.22a \\ -12.20 \quad -21.12a \end{array} = 0$$

→ 「省略する (compendio)」結果、二式は以下のようなになる。

$$\overline{+0.1} + \overline{+2.1b} = 0$$

$$\overline{+0.2} + \overline{+1.2a} = 0$$

^{*11} [BDT]n. 16, 39

^{*12} [BDT]n.7, [ライプニッツ 1999], pp. 364-378.

これらを別式 $30 + 31a + 32b = 0$ に代入して, $\overline{-1.2.30} + \overline{0.2.31} - \overline{0.1.32} = 0$

これをさらに移項して $\overline{0.1.32} - \overline{0.2.31} + \overline{1.2.30} = 0$,

右側の項それぞれにある“3”を1,2で置換すると

$$\overline{0.1.12} - \overline{0.2.11} + \overline{1.2.10} = 0$$

$$\overline{0.1.22} - \overline{0.2.21} + \overline{1.2.20} = 0$$

となるが, 三式の右から二番目の記号は無視されて, 最終的には

$$\overline{0.1.2} = 0$$

という表現, すなわち対角線要素の右数字のみによる表示となる. なお「1次連立方程式に関するライプニッツの決定的論考(1684)」^{*13}ではこの符号規則が一般化される.

$$+\overline{2.1.3} = -\overline{1.2.3} = \overline{1.3.2} = -\overline{3.1.2}$$

2. 『ロピタルへの手紙』(1693)^{*14}

上述したものと同一二重添え数の記法で,

$$\begin{cases} a_{00} + a_{01}x + a_{02}y = 0 \\ a_{10} + a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{20} + a_{21}x + a_{22}y = 0 \end{cases}$$

という二元三連立方程式の未知数 x, y を消去した関係式を

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0_0 & 1_1 & 2_2 & 0_0 & 1_2 & 2_1 \\ 0_1 & 1_2 & 2_0 & = & 0_1 & 1_0 & 2_2 \\ 0_2 & 1_0 & 2_1 & & 0_2 & 1_1 & 2_0 \end{array}$$

と表現する. サラスの規則と呼ばれるものである. ただ, この記述は残念ながらライプニッツの遺稿のなかにあり, 1850年のGerhardtによる公刊までは忘却されたままになった.

・Knoblochによると, 上述してきた代数的な「添え数」が利用された目的は以下の4問題の対応のためとされている.^{*15}

1. 行列式を利用した連立1次方程式の解法
2. 高次連立方程式の共通因数の消去
3. 複変数の高次連立方程式.
4. 数の分割(代数的因数分解)

IV. 他の解法との比較

これまでライプニッツによる理論を論じてきたが, 行列式を利用した連立方程式の解法については, 無論クラメールのものが後世まで残った. 影響力という点からすれば, ライプニッツとは比較できない. しかし, そ

^{*13} [StL], 1972(4), pp. 163-67.

^{*14} [LMG]II. p. 239.

^{*15} Eberhard Knobloch, “Déterminants et élimination chez Leibniz.”, *Rev. Hist. Sci.*, 2001, 54/2, pp. 144-145.

の表記については整備されたクラメールの方法と代数的「添え数」や文字の省略を伴ったライプニッツの方法は著しく異なっており、ライプニッツの特異性が改めて感じられる。

・ Gabriel Cramer との比較：

『代数曲線解析序論』(Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques) 付録 pp.657-658. での公式導出.

複数の未知数を $z, y, x, v, \text{etc.}$ とし、さらに以下のような方程式があるとする。

$$\begin{aligned} A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + V^1 v + \text{Etc.} \\ A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + V^2 v + \text{Etc.} \\ A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + V^3 v + \text{Etc.} \\ A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + V^4 v + \text{Etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

・・・(中略)・・・

方程式が 3 個あり、3 種の未知数 z, y, x がある場合には、

$$\begin{aligned} z &= \frac{A^1 Y^2 X^3 - A^1 Y^3 X^2 - A^2 Y^1 X^3 + A^2 Y^3 X^1 + A^3 Y^1 X^2 - A^3 Y^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1} \\ y &= \frac{Z^1 A^2 X^3 - z^1 A^3 X^2 - Z^2 A^1 X^3 + Z^2 A^3 X^1 + Z^3 A^1 X^2 - Z^3 A^2 X^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1} \\ x &= \frac{Z^1 Y^2 A^3 - z^1 Y^3 A^2 - Z^2 Y^1 A^3 + Z^2 Y^3 A^1 + Z^3 Y^1 A^2 - Z^3 Y^2 A^1}{Z^1 Y^2 X^3 - Z^1 Y^3 X^2 - Z^2 Y^1 X^3 + Z^2 Y^3 X^1 + Z^3 Y^1 X^2 - Z^3 Y^2 X^1} \end{aligned}$$

ここで、いわゆるクラメールの公式 3 元 3 連立方程式への適用がされている。こういった実際の応用がなされた後に共通分母や符号規則に関する問題が扱われる。再び引用に戻る。

この公式の検討によって一般規則は与えられる (fournir). 方程式と未知数の個数が n 個であれば、それぞれの未知数の値は見出されるであろう。ただし、その共通分母 (dénominateur commun) が異なった n 個 [の数] によって生じる種々の順列と同数の項をもっているような分数を形成するのであれば、各項は常に同じ順序で書かれている諸文字 $Z, Y, X, V \text{etc.}$ によって構成されていて、その諸文字には、右上数^{*16}のような、すべて可能な方法によって並べられた n 個ある第 1 番目の数が配置されているのである。例えば、3 個の未知数があるとすれば、その分母^{*17}は、3 種類の文字 Z, Y, X によって構成される $1 \times 2 \times 3 = 6$ 個の項をもっていて、その 3 種類の文字はそれぞれ順番に 123, 132, 213, 231, 312, 321 という右上数を受ける。この項には以下の規則にしたがって + または - の記号が付与される。ある右上数が間接的、直接的問わず同項のうちで自分よりも小さな [別の] 右上数の後に従っているときに、私はこのことを *dérangement* と呼んでいきたい。(但馬訳)

符号規則を論じる際に、クラメールは *dérangement* という表現を用いている。これはライプニッツにとつては *permutatio* に相当する。最終的には規則に反する例 (解が不能や不定の場合) も補足的に論じていて、

*16 *exposants* は現代的には冪指数を表すものだが、行列の各要素とその置換が議論の対象であるのでここでは“右上数”とした。

*17 公式から生成された共通分母を示す。

コンパクトに完結している印象を与える。論考は全体で4ページほどのきわめて短いものであり、著作の中で主題的な問題ではなかったが、後世までクラメールの名をとどめた業績となったのは皮肉である。

凡例と参考文献

[BDT]; *Der Beginn der Determinantentheorie : Leibnizens nachgelassene Studien zum Determinantenkalkul*, hrsg. von Eberhard Knobloch; Hildesheim, Gerstenberg Verlag, 1980.

[LMG]; *Leibnizens Mathematische Schriften*, hrsg. von C. I. Gerhardt. Halle, 1849-63; (Hildesheim-New York, 1971)(rep.).

[LPG]; *Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, hrsg. von C. I. Gerhardt. Berlin, 1875-90; (Hildesheim, Olms, 1965)(rep.).

[LSB]; *Gottfried Wilhelm Leibniz Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von Preussischen Akademie der Wissenschaften, von der Akademie der Wissenschaften der DDR. Darmstadt, Berlin, 1923.

[StL]; *Studia Leibnitiana : Zeitschrift für Geschichte der Philosophie und der Wissenschaften*, Wiesbaden, 1969.

[林 2000]; 林知宏「ライプニッツ数学思想の形成」(東京大学大学院総合文化研究科博士論文, 2000年)

[ライプニッツ 1997]; 『ライプニッツ著作集』2『数学論・数学』原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁他訳(工作社, 1997年)

[ライプニッツ 1999]; 『ライプニッツ著作集』3『数学論・数学』原亨吉・三浦伸夫・馬場郁他訳(工作社, 1999年)

・Gabriel Cramer, *Introduction a l'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, Genève, 1750.

・Louis Couturat, *La logique de Leibniz : d'après des documents inédits* Paris, 1901. (Hildesheim, Olms, 1985)(rep.).