

大成算經卷之七における計子及び験符

東京理科大学大学院 理学研究科 若林 和明 (Kazuaki Wakabayashi)
Graduate School of Science,
Tokyo University of Science

1 はじめに

1.1 大成算經及び卷之七について

大成算經は、1683年の夏から関孝和・建部賢明・建部賢弘により編集が始まり、1710年頃に全二十巻が完成した。その主な構成は首篇(卷之一の初めの部分)、前集(卷之一の残り～卷之三)、中集(卷之四～卷之十五)、後集(卷之十六～卷之二十)の4つに分けられており、象法(卷之七)は中集に収録されている。

卷之七(象法)は、聚数(第七)、計子(第八)、験符(第九)¹の3つの内容で構成されている。聚数は数字を均等に配列するものであり、俗に並物とも呼ばれ、この中では方陣・圓攢・連環の3つが取り上げられている。計子は基石などがある規則にしたがって並べる方法でありこの中では算脱(継子立)・匿子(賊人隠)・換備(薬師算)の3つが取り上げられている。験符は、局図と呼ばれる図を作り、規則にしたがって文字の並べ替えを行うものであり、この中では局配、数配、行配の3つが取り上げられている。

今回は、このうち、計子の中の算脱と験符の中の局配を取り上げて紹介する。

1.2 研究の目的

第一の目的は、卷之七の内容を解説し、数学的に解釈し、それぞれの方法論に対して数学的な証明を与えることである。大成算經には、それぞれの方法論及び例題は記載されているが、方法論として述べられているのは計算のプログラムであり、それらのプログラムが正しいことを証明する記述は記載されていない。よって、記載内容を現代数学の知識によって保証することを目的の一つとした。

¹大成算經では、象法については卷之五から卷之七にかけて記述されており、卷之五では第一から第三、卷之六では第四から第六と、各節に番号が付けられている。また、卷之五のはじめにある象法の序文に、「諸象之法有九焉所謂互乘壘乘塚積之分諸約剪管者本無畫故唯以數成其技聚數計子験符者皆借形故各據圖計其數」と記されている。卷之七の本文には「験符第八」と記載されているが、この卷之五の記述から、この部分は「験符第九」としたほうが正しいであろうと判断して、「第九」とした。尚、この番号付けは紀州本には見られない。

第二の目的は、卷之七の校本の作成である。大成算経は原本が存在せず、写本数冊のみが存在し、しかもあちらこちらに写し間違いや計算間違いと思われる間違いが見受けられる。よって、今後より多くの人に大成算経を研究してもらうために、そして後に研究する人が研究しやすいように、内容を吟味した上で校本を作成することにした。

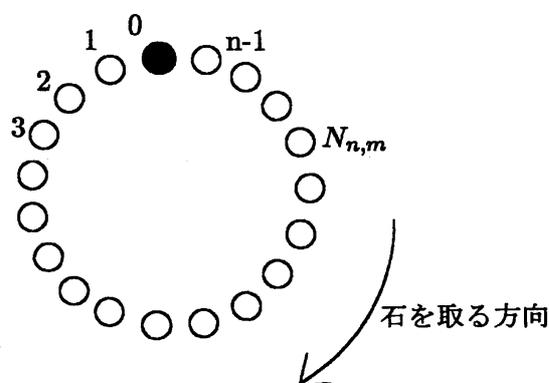
2 計子（算脱）

算脱は、古来の継子立てを理論化したものである。子供を並べる代わりに白石と黒石を並べ、数え初めの石（算初子）と脱数（いくつ置きに石を取るかを示す数） m を定め、その石から m 番目にあたる石を取り除く。また、その次の石から数えて m 番目にあたる石を取り除く。この作業を繰り返して行い（この段階で取られる石は全て黒石である）、黒石の最後の1つがとられようとしたとき、この黒石にあたる前妻の子の抗議を受け、その子（黒石）を数え初めとして逆に回転し（数え初めの黒石は逆算子と呼ぶ）、 m 番目にあたる石を取り除く。また、その次の石から数えて m 番目にあたる石を取り除く。この作業を続けていくと、白石は全てなくなり、逆算子にあたる最初の黒石が残るというものである。この問題の場合、脱数 m が与えられたとき、最終的に逆算子にあたる黒石が残るには白石をいくつ置けばよいのかということが重要であり（このときの白石の数は正限数と呼ばれている。）、石の総数及び黒石の数はあまり問題にならない。よって、各脱数 m に対してこの正限数を求めることが問題の趣旨となる。

大成算経においては、 $n < m$ のときと $n \geq m$ のときに場合を分けて、正限数の計算方法が紹介されている。

2.1 $n \leq m$ のとき

まず、変数を定義する。 n を石の総数（黒石1個と白石 $n-1$ 個）、 m を脱数とする。また、石は時計回りに数えて取っていくものとする。黒石を0番目とし、白石には反時計回りに1から $n-1$ までの番号をつける。 n 個石があるときに、黒石を最後に残すために数えはじめとするべき石を $N_{n,m}$ とする。



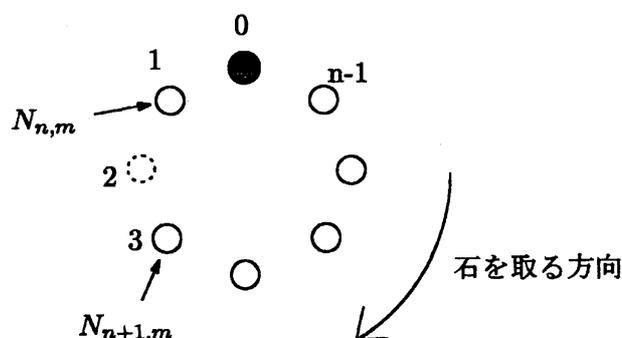
$N_{n,m}$ 番目の白石の一つ手前に新たに白石を一つ付け加える。この石が取られるようにするために数えはじめとするべき石の位置、すなわちこの状態からさらに $N_{n,m}$ 番目の白石の前に白石を1つ追加する。この石が取り除かれるときの数えはじめの石の位置は $\text{mod } n+1$ で $N_{n,m} + m$ 番目である。したがって、

$$N_{n+1,m} \equiv N_{n,m} + m \pmod{n+1} \quad (1)$$

という式が導かれる。また、 $n=1$ のとき (白石を一つも並べていないとき) は、数え始めの石は黒石そのものと考え、

$$N_{1,m} = 0 \quad (2)$$

とする。そして、 $N_{n+1,m} \equiv 0 \pmod{n}$ となったとき、 n (このときの白石の数) を正限数とする。



上の図で、点線で書かれた丸の位置が、新たに加えた石の位置を表す。

大成算經においては、 n を法、 $N_{n,m}$ を実として上のような計算をしている。

2.2 $n > m$ のとき

$n > m$ のときは、前段階で数え始めとなった白石の一つ手前から、 $m-1$ 個置きに白石を一度に複数個増やすことができる。このときの計算の仕組みは以下のとおりである。

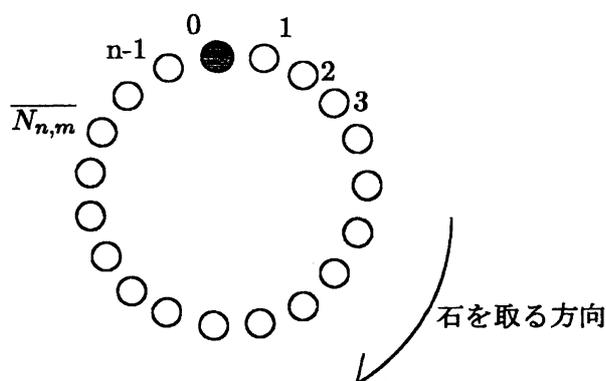
まず、新たに変数を定義する。 n 個の石 ($n > m$) が並んでいるものとする。今までとは異なり、黒石を 0 番目とし、白石には今度は時計回りに 1 から $n-1$ までの番号をつける。このとき、黒石を最後に残すために数えはじめとするべき石の位置を $\overline{N_{n,m}}$ とする。このとき、

$$N_{n,m} + \overline{N_{n,m}} \equiv 0 \pmod{n+1}$$

すなわち、

$$\overline{N_{n,m}} \equiv \begin{cases} n - N_{n,m} & \text{if } N_{n,m} \neq 0 \\ 0 & \text{if } N_{n,m} = 0 \end{cases}$$

という関係が成り立つ。



① $0 < \overline{N_{n,m}} \leq m-1$ のとき

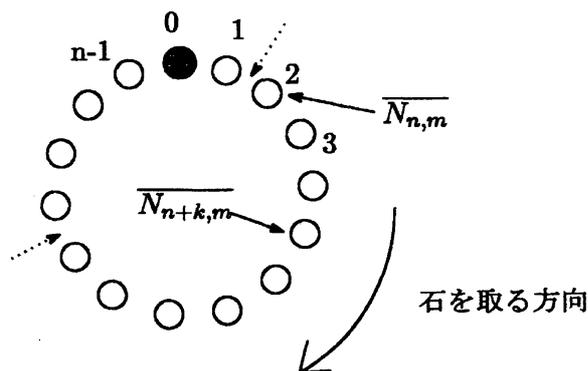
通常、正限数が見つからなかったときはこの場合になる。数え始めの位置から反時計回りにまわり、黒石を通過して $m-1$ 個置きに白石を増やしていく。そして、 k 個増やして再び数え始めの位置が $0 \leq \overline{N_{n+k,m}} < m-1$ の範囲に来たときに白石を加えるのをやめる。このとき、増やすことのできる白石の数 k は、

$$k = \left\lceil \frac{\overline{N_{n,m}} + n + 1}{m-1} \right\rceil \quad (3)$$

であり、また、そのとき数えはじめとなる石の位置 $\overline{N_{n+k,m}}$ は、

$$\overline{N_{n+k,m}} \equiv \overline{N_{n,m}} + n + 1 \pmod{m-1} \quad (4)$$

となる。上式の $+1$ とは、最初に加える白石を表している。



上の図で、点線の矢印が指している位置が、新たに白石を加える位置である。

② $\overline{N_{n,m}} = 0$ のとき

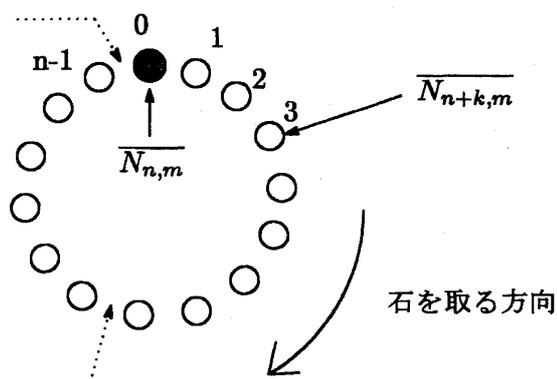
黒石から反時計回りにまわり、白石を増やしていく。そして、 k 個増やして再び数え始めの位置が $0 \leq \overline{N_{n+k,m}} < m-1$ の範囲に来たときに白石を加えるのをやめる。このとき、この段階で増やすことができる白石の数 k は、

$$k = \left\lceil \frac{n}{m-1} \right\rceil \quad (5)$$

であり、数えはじめとする石の位置 $\overline{N_{n+k,m}}$ は、

$$\overline{N_{n+k,m}} \equiv n \pmod{m-1} \quad (6)$$

となる。



前と同様、点線の矢印が指している位置が、新たに白石を加える位置である。

以上のことを踏まえて、大成算経の方法を検証する。

まず、左数・右数という2つの変数を用意し、それぞれ初期値は $m - N_{m,m} (= \overline{N_{m,m}})$, m としている (m は、この時点での石の総数である)。この左数は数え始めるべき石の位置(上の説明では合同式の右辺の値 (i.e., $\overline{N_{n,m}}$)) を示し、右数はそのときの白石を加えた後の石の総数(上の説明では $n+k$)にあたる。また、 $m-1$ の値 (i.e., 脱数から1を引いた値) を法として固定している。左数を上のように設定することで、今まで石には反時計回りに番号をつけていたものを、時計回りに直す。この左数と m との大小を比べ、 $\overline{N_{m,m}} \leq m-1$ ならば①の方法を適用し、 $\overline{N_{m,m}} = 0$ ならば②の方法を適用する。次に、白石を追加したあとの石の総数を n とし、白石に対する番号をふりなおし、 $0 < \overline{N_{n,m}} \leq m-1$ ならば①を、 $\overline{N_{n,m}} = 0$ ならば②を適用する。このような操作を繰り返して行い、 $\overline{N_{n+k,m}} \equiv 0 \pmod{m-1}$ となったときに $n+k-1$ の値を正限数とし、正限数を次々に求めている。

2.3 正限諸数一覧

以下の表は、脱数が2から40までの場合の9番目までの正限数の一覧である。これらの値は、大成算経に記載されているアルゴリズムをC言語によって実現し計算したものである。尚、大成算経には脱数が2から30までの場合の7番目までの正限数が掲載されて

| 脱数 | 正限諸数 | | | | | | | | | |
|----|------|-----|------|-------|--------|---------|---------|---------|----------|----------|
| 2 | 1 | 3 | 7 | 15 | 31 | 63 | 127 | 255 | 511 | 1023 |
| 3 | 3 | 5 | 8 | 30 | 69 | 104 | 354 | 798 | 1797 | 2696 |
| 4 | 1 | 4 | 8 | 11 | 15 | 217 | 516 | 1225 | 6889 | 12248 |
| 5 | 2 | 5 | 11 | 14 | 36 | 57 | 141 | 221 | 346 | 677 |
| 6 | 1 | 2 | 7 | 13 | 73 | 127 | 318 | 1143 | 1976 | 2846 |
| 7 | 22 | 49 | 92 | 234 | 319 | 2376 | 4403 | 5137 | 32672 | 60530 |
| 8 | 1 | 4 | 9 | 19 | 29 | 44 | 76 | 87 | 114 | 500 |
| 9 | 90 | 145 | 207 | 233 | 474 | 1083 | 1371 | 4455 | 5012 | 8029 |
| 10 | 1 | 15 | 21 | 70 | 226 | 527 | 1226 | 2850 | 5960 | 17090 |
| 11 | 2 | 6 | 13 | 16 | 24 | 105 | 170 | 206 | 366 | 865 |
| 12 | 1 | 2 | 3 | 6 | 15 | 171 | 1168 | 3044 | 12252 | 17353 |
| 13 | 23 | 25 | 35 | 38 | 894 | 1137 | 5208 | 13611 | 176328 | 308786 |
| 14 | 1 | 3 | 5 | 6 | 145 | 227 | 1688 | 24341 | 28230 | 115408 |
| 15 | 3 | 4 | 8 | 11 | 16 | 20 | 78 | 337 | 1440 | 3533 |
| 16 | 1 | 5 | 8 | 10 | 19 | 25 | 35 | 40 | 149 | 159 |
| 17 | 2 | 55 | 75 | 102 | 326 | 1319 | 3482 | 3931 | 8647 | 10372 |
| 18 | 1 | 2 | 4 | 5 | 10 | 27 | 41 | 55 | 186 | 197 |
| 19 | 4 | 89 | 94 | 117 | 704 | 923 | 1586 | 2876 | 6833 | 9452 |
| 20 | 1 | 8 | 9 | 17 | 20 | 80 | 515 | 777 | 1515 | 6375 |
| 21 | 5 | 6 | 12 | 36 | 44 | 108 | 205 | 1317 | 2609 | 6595 |
| 22 | 1 | 4 | 17 | 24 | 575 | 4462 | 15672 | 21705 | 39739 | 293749 |
| 23 | 2 | 5 | 15 | 28 | 37 | 51 | 181 | 207 | 296 | 370 |
| 24 | 1 | 2 | 3 | 6 | 7 | 9 | 12 | 21 | 24 | 41 |
| 25 | 8 | 14 | 16 | 32 | 371 | 913 | 2752 | 5510 | 6228 | 452865 |
| 26 | 1 | 3 | 37 | 114 | 139 | 373 | 511 | 598 | 1078 | 6304 |
| 27 | 3 | 11 | 13 | 16 | 49 | 55 | 98 | 155 | 161 | 416 |
| 28 | 1 | 10 | 15 | 19 | 24 | 29 | 44 | 64 | 120 | 134 |
| 29 | 2 | 4 | 10 | 16 | 47 | 65 | 75 | 111 | 115 | 1861 |
| 30 | 1 | 2 | 13 | 14 | 21 | 36 | 40 | 46 | 117 | 562 |
| 31 | 8 | 794 | 1635 | 2270 | 2856 | 5504 | 14722 | 17345 | 202881 | 223853 |
| 32 | 1 | 5 | 8 | 115 | 135 | 192 | 251 | 310 | 533 | 1384 |
| 33 | 4 | 61 | 67 | 1312 | 3305 | 21604 | 25985 | 41228 | 107025 | 530171 |
| 34 | 1 | 5 | 7 | 11 | 13 | 18 | 24 | 29 | 36 | 59 |
| 35 | 2 | 10 | 13 | 19 | 81 | 207 | 393 | 8039 | 18635 | 32325 |
| 36 | 1 | 2 | 3 | 54519 | 235911 | 1694972 | 2184101 | 7981011 | 31735572 | 87495713 |
| 37 | 4 | 7 | 12 | 30 | 41 | 70 | 74 | 180 | 472 | 2449 |
| 38 | 1 | 3 | 8 | 17 | 18 | 22 | 30 | 43 | 48 | 294 |
| 39 | 3 | 30 | 45 | 62 | 108 | 148 | 231 | 1547 | 2169 | 2470 |
| 40 | 1 | 36 | 41 | 255 | 590 | 6229 | 6893 | 14734 | 36659 | 37599 |

現在、私の手元には8冊の写本がある。写本によって値が間違っている個所が至る所に存在するが、その8冊全てが間違っている個所が2個所ある。

1. 脱数17の第7正限：(正) 3482 → (誤) 3483
2. 脱数28の第7正限：(正) 44 → (誤) 64

写本によって異なる間違いに関しては、写本を作成する段階での写し間違いが考えられるが、特に2.においては、本来8番目の正限数である64が7番目の正限数となっている。これら2個所に関しては原本そのものが間違っていた可能性が考えられる。

2.4 先行研究について

この算脱（継子立て）の研究は他の文献にも多く記述されており、また、過去に多く研究がされている。その中の2つについて、大成算経の方法との違いを述べる。

まず一つ目は、昨年の研究集会で発表された小川東氏の研究である²。今回の私の研究では、数え初めとすべき石の位置に着目して論証を進めたが、小川氏の研究では、最後に残る石に着目して、合同漸化式を立て、正限数を求めている。また、この中では、大成算経における $n \leq m$ の場合の方法のみを使って正限数を求めている。また、同じ変数を用いているが、前述の理由から使われている変数の意味は異なる。

もう一つは、飯高茂氏、築場広子氏による研究である³。ここでは、ヨセフスの問題⁴を取り上げ、まず、第I公式として、小川氏の示した方法と同様にして大成算経における $n \leq m$ の場合の方法と同じ形式を用いたヨセフスの問題の一般解を求めている。尚、この中では modplus⁵ というものが使われているが、小川氏の研究及び私の研究では、数え初めの石を0番目としているのに対し、この中では1番目としているために使用しているものである。次に、第II公式として、最後に残る人に着目して、大成算経に書かれている $n > m$ の場合の方法を最初から使った場合の漸化式を求めている。ここで使われている変数 a_m , b_m と私が使用している変数とを比較すると、

$$\begin{aligned} n + k &= a_{m+1} - 1 \\ \overline{N_{n+k,m}} &= b_{m+1} - 1 \end{aligned}$$

という関係が成り立つ。上式の右辺の -1 は、第I公式と同様、数え初めの石の番号付けの違いから生じるものである。そして、第III公式として、どの a_m にもあたらない n に対して、最後に残る石の位置を迅速に求める公式が与えられている。

3 局配（験符）

験符とは、俗に目付字ともいい、総字という文字一覧にある文字をを並んでいる順番を変えずにある規則性にしたがって局図と呼ばれる図の中に並べ替え、パターンを変えて用意されたいくつかの局図の中でそれぞれある条件を満たす文字は何かを考えるものである。その中の一つに局配がある。

大成算経では、総字数が60の場合を例にあげられている。その総字（初期段階）はこのようになっている。尚、本文では縦並びで右の列から左の列へ並べられているが、ここ

²参考文献5参照

³参考文献6参照

⁴ユダヤ人とローマ人との戦いの中で、ローマ人に追われてある洞窟に閉じ込められた41人のユダヤ人反乱グループ中にヨセフスがいた。その反乱グループは捕虜になるよりも集団自殺することを選び、41人全員が円形に並び、その円に沿って3人目ごとに殺していき、最後にだれも残らなくまでこれを続けることにした。しかし、ヨセフスともう一人の仲間は、このような行為は無意味だと考え、どこにいれば死なずに済むかを素早く計算し、2人だけ最後まで残り助かった、というものである。

⁵ a を n で割った余りを r とすると、 $r=0$ のとき $a \text{ modplus } n = n$, $r \neq 0$ のとき、 $a \text{ modplus } n = r$ 。

ではスペースの都合上、横並びで上の行から下の行へ並べて表示する（局図に関しても同様である）。

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 木 | 火 | 土 | 金 | 水 | 青 | 黄 | 赤 | 白 | 黒 |
| 甲 | 乙 | 丙 | 丁 | 戊 | 己 | 庚 | 辛 | 壬 | 癸 |
| 子 | 丑 | 寅 | 卯 | 辰 | 蛇 | 馬 | 未 | 猿 | 酉 |
| 犬 | 亥 | 角 | 亢 | 氏 | 房 | 心 | 尾 | 箕 | 斗 |
| 牛 | 女 | 虚 | 危 | 室 | 壁 | 奎 | 婁 | 胃 | 昴 |
| 畢 | 觜 | 參 | 井 | 鬼 | 柳 | 星 | 張 | 翼 | 軫 |

そして、第1局、第2局、第3局の行数をそれぞれ3,4,5とし、各局ごとに漢字を並べていく。

・第1局（行数：3）

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 木 | 金 | 黄 | 黒 | 丙 | 己 | 壬 | 丑 | 辰 | 未 | 犬 | 亢 | 心 | 斗 | 虚 | 壁 | 胃 | 觜 | 鬼 | 張 |
| 火 | 水 | 赤 | 甲 | 丁 | 庚 | 癸 | 寅 | 蛇 | 猿 | 亥 | 氏 | 尾 | 牛 | 危 | 奎 | 昴 | 參 | 柳 | 翼 |
| 土 | 青 | 白 | 乙 | 戊 | 辛 | 子 | 卯 | 馬 | 酉 | 角 | 房 | 箕 | 女 | 室 | 婁 | 畢 | 井 | 星 | 軫 |

・第2局（行数：4）

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 木 | 水 | 白 | 丙 | 庚 | 子 | 辰 | 猿 | 角 | 心 | 牛 | 室 | 胃 | 參 | 星 |
| 火 | 青 | 黒 | 丁 | 辛 | 丑 | 蛇 | 酉 | 亢 | 尾 | 女 | 壁 | 昴 | 井 | 張 |
| 土 | 黄 | 甲 | 戊 | 壬 | 寅 | 馬 | 犬 | 氏 | 箕 | 虚 | 奎 | 畢 | 鬼 | 翼 |
| 金 | 赤 | 乙 | 己 | 癸 | 卯 | 未 | 亥 | 房 | 斗 | 危 | 婁 | 觜 | 柳 | 軫 |

・第3局（行数：5）

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 木 | 青 | 甲 | 己 | 子 | 蛇 | 犬 | 房 | 牛 | 壁 | 畢 | 柳 |
| 火 | 黄 | 乙 | 庚 | 丑 | 馬 | 亥 | 心 | 女 | 奎 | 觜 | 星 |
| 土 | 赤 | 丙 | 辛 | 寅 | 未 | 角 | 尾 | 虚 | 婁 | 參 | 張 |
| 金 | 白 | 丁 | 壬 | 卯 | 猿 | 亢 | 箕 | 危 | 胃 | 井 | 翼 |
| 水 | 黒 | 戊 | 癸 | 辰 | 酉 | 氏 | 斗 | 室 | 昴 | 鬼 | 軫 |

例題として、「第1局では1行目、第2局では1行目、第3局では5行目にある漢字は何か」という問題があげられている。答えは「辰」であるが、これを計算によって求めるにはどうすればよいかということがこの問題の論点である。

3.1 計算の手順

まず、総字数を N とする。第1局から第 k 局までの行数 m_1, m_2, \dots, m_k をそれぞれ定める。 m_1, m_2, \dots, m_k が互いに素であれば問題ないが、そうでない場合にはそれらの行数は採用しない。 m_1, m_2, \dots, m_k をすべて掛け合わせ、総字数 N と等しくなればそれらの数で行数を決定する。もしも総字数を N に対してそのような行数に値する数が無い場合には、 N よりも大きくかつ N に最も近い数に合わせて行数を定める。このように各局ごとに行数を定め、総字に示された漢字を右上から横に並べていく。

各第 i 局 ($i = 1, 2, \dots, k$) ごとに、 $M_i := m_1 m_2 \cdots m_{i-1} m_{i+1} \cdots m_k$ をその局の原数とし、 $L_i M_i$ ($L_i = 1, 2, \dots, m_i$) をそれぞれ m_i で割ったときの余りを a_{iL_i} ($j = 1, 2, \dots, m_i$) としたとき、 $L_i M_i$ を第 i 局第 a_{iL_i} 行の下数とする。ただし、 $a_{iL_i} = 0$ ならば、その行の下数は空 (= 0) とする。また、 $M := \prod_{i=1}^k m_i$ なる M を減去数とする。

各局のどの行にあるかをすべて明示されたものに対し、その漢字は何かを答えるのがこの問題の趣旨であるが、指定された各局各行の下数をすべて合計し、それを減去数 M で割った余りの分だけ、総字の最初から数えていき、その余り番目にあたる漢字が求める漢字であるということになる。

先に記載した実際の例を使って説明すると、まず総字数は 60、第1局行数は 3、第2局行数は 4、第3局行数は 5 であるから、第1局の原数は $4 \times 5 = 20$ 、第2局の原数は $3 \times 5 = 15$ 、第3局の原数は $3 \times 4 = 12$ である。また、

$$\begin{cases} 20 \times 1 = 20 \equiv 2 \pmod{3} \\ 20 \times 2 = 40 \equiv 1 \pmod{3} \\ 20 \times 3 = 60 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

なので、第1局の各行の下数は、第1行から順に 40, 20, 0 である。同様に、

$$\begin{cases} 15 \times 1 = 15 \equiv 3 \pmod{4} \\ 15 \times 2 = 30 \equiv 2 \pmod{4} \\ 15 \times 3 = 45 \equiv 1 \pmod{4} \\ 15 \times 4 = 60 \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

なので、第2局の各行の下数は、第1行から順に 45, 30, 15, 0 であり、

$$\begin{cases} 12 \times 1 = 12 \equiv 2 \pmod{5} \\ 12 \times 2 = 24 \equiv 4 \pmod{5} \\ 12 \times 3 = 36 \equiv 1 \pmod{5} \\ 12 \times 4 = 48 \equiv 3 \pmod{5} \\ 12 \times 5 = 60 \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$$

なので、第3局の各行の下数は、第1行から順に 36, 12, 48, 24, 0 である。また、減去数は $3 \times 4 \times 5 = 60$ である。

先ほどと同じ例題「第1局では1行目, 第2局では1行目, 第3局では5行目にある漢字は何か」という問題を考えると, 第1局第1行の下数は40, 第2局第1行の下数は45, 第3局第5行の下数は0なので, これらを全て加え, 減去数で割った余りは,

$$40 + 45 + 0 = 85 \equiv 25 \pmod{60}$$

である。したがって総字の表の最初から数えて25番目の文字は「辰」なので, 答えは「辰」となる。

3.2 現代的表記への置き換えと計算手順が正しいことの証明

この問題は, 現代においては, m_1, m_2, \dots, m_k がどの2つも互いに素であるとき, 合同方程式

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_k \pmod{m_k} \end{cases}$$

を解くという問題に帰着される。この合同方程式は, 中国剰余定理 (Chinese Remainder Theorem) を用いて解くのが一般的である。

大成算経の方法が正しいことを証明するには, 以下の2点を保証する必要がある。

1. 各局各行に下数が必ず一つ存在すること。
2. 第 i 局で指定された行の下数が $L_{a_i} M_i$ であったときに,

$$x \equiv \sum_{i=1}^k L_{a_i} M_i \pmod{M}$$

が解として存在し, かつ一意であること。

まず, 下数の存在性は, 「一般に $(a, m) = 1$ のとき, m を法としての剰余系 $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ が与えられたとき, $\{ax_1, ax_2, \dots, ax_m\}$ も m を法としての剰余系である」という事実によって保証される。ある整数 $h, k (\leq m)$ に対して,

$$ax_h \equiv ax_k \pmod{m}$$

が成り立つには, $ax_h - ax_k \equiv 0 \pmod{m}$ すなわち, $a(x_h - x_k)$ が m で割り切れなければならない。このとき, $(a, m) = 1$ であるから,

$$x_h - x_k \equiv 0 \pmod{m}$$

すなわち $x_h \equiv x_k \pmod{m}$ である。以上によって上の事実が示される。

$\{1, 2, \dots, m_i\}$ は m_i を法とする剰余系であるから, この剰余系の各数を M_i 倍したもの

$\{M_i, 2M_i, \dots, m_i M_i\}$ も m_i を法とする剰余系となる。従って, L_i の存在が保証される。

次に, 解の存在及び一意性であるが, まず, 各 i に対して, $L_{a_i} M_i$ 以外の各項は m_i を法とした場合の剰余に寄与せず, また, $L_{a_i} M_i \equiv a_i \pmod{m_i}$ であるから, (11) は解となる。また, x, x' が両方とも解だとすると, $x \equiv x' \pmod{m_i}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) すなわち $x - x' \equiv 0 \pmod{m_i}$ である。従って, $x - x'$ は m_1, m_2, \dots, m_k の最小公倍数である M で割りきれるので $x \equiv x' \pmod{M}$ が言える。

4 今後の課題

今後の課題の一つは, 他の文献との比較である。この大成算經卷之七で取り上げられている内容は, 他の和算書でも多数取り上げられている。それらと比較をしながら, 大成算經の内容の他より優れている点, 劣っている点などを探っていきたい。

もう一つは, 写本の系統を探ることである。現在, 私の手元には 8 冊の写本があるが, 間違っている個所が各写本によって微妙に異なっている。それらの個所を見比べ, 各写本が作成された年代を推測し, 写本が作成された系統を探ってみようと思う。

参考文献

- [1] 「大成算經」
東北大学狩野文庫 所蔵, 京都大学 所蔵 (2 種類), 東京理科大学 所蔵, 大阪府立図書館 所蔵, 宮城県図書館 伊達文庫 所蔵, 東京大学 所蔵 (2 種類)
- [2] 日本学士院編 「明治前日本数学史・第二巻」 岩波書店 1954
- [3] 高木貞治 「初等整数論講義 第 2 版」 共立出版 1971
- [4] M.R.Schroeder 原著 平野浩太郎・野村孝徳訳 「数論上・下」 コロナ社 1995
- [5] 小川東 「『綴術算經』の「探算脱術第七」について」, 「数学史の研究」京都大学数理解析研究所講究録 1257 京都大学数理解析研究所 2002 pp.205-209
- [6] 飯高茂, 築場広子 「継子立ての数学」, 「高校数学とその近傍の数学教育の研究」平成 10 年度～平成 12 年度 科学研究費補助金基盤研究 (c)(2) 研究成果報告書 研究代表者 飯高茂 (学習院大学理学部教授) 平成 13 年 3 月 pp.107-119