数理解析研究所講究録 1319 巻 2003 年 174-182

L-functions attached to non-holomorphic Siegel modular forms of degree 2

東京大学数理科学　森山　知則
(Tomonori Moriyama)

§0. 序

本稿では，次数 2 の非正則 Siegel 尖点形式 F と楕円尖点形式 φ の組に付随する，次数 8 の Euler 積を持つ保型的 L-関数 $L(s, F\otimes\varphi)$ の解析的性質（解析接続，関数等式，極の位置）について得た結果を述べる。我々が扱うのは，F が Fourier 展開についてのある条件 (通常 “generic” と呼ばれる条件である) を満たし，かつ無限素点で非正則な離散系列表現を生成する場合である。

上記のような仮定を課す理由を説明しよう。問題の L-関数を調べるために，我々は，Novodvorsky によるこの L-関数の積分表示を用いる。この積分表示は，Rankin-Selberg-Jacquet による，二つの楕円保型形式 φ_i $(i=1,2)$ の組に対するテンソル積 L-関数 $L(s,\varphi_1\otimes\varphi_2)$ の積分表示理論と極めてよく似たものである (L-関数の積分表示理論については，D. Bump による概説 [B2] が読みやすい)。この方法が適用できるための条件が，上述の「 generic 」なる仮定である (F が正則な次数 2 の Siegel 保型形式の時にはこの条件は決して満たされないことが知られている)。また，Novodvorsky の積分表示を用いて $L(s, F\otimes\varphi)$ を調べようとすると，局所体上の (特に，実数体 $\mathbf{R}$ 上の) Whittaker 関数について詳しい情報を必要とする。我々は，最近 $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の非正則な離散系列表現に属す，Whittaker 関数の Mellin-Barnes 型の積分表示を得た ([Mo-2])。これを用いることで，Novodvorsky の積分表示の無限素点における成分をコントロールすることが可能となり，所望の結果を得ること出来た。

なお，上で述べたように，F が正則な Siegel 保型形式の時には Novodvorsky の積分表示は適用されないわけだが，若干の仮定の下で，Furusawa による別の積分表示 [Fu] によって同じ L-関数を調べることが出来ることを注意しておこう。

§1. 主結果

問題とする保型形式とその Fourier 展開について幾つか準備した後，本稿の主定理を述べる。

(1.1) $SL(2,\mathbf{R})$ 上の正則尖点形式. まず $SL(2,\mathbf{R})$ 上の保型形式の定義を思い出す。Γ' を $SL(2,\mathbf{R})$ 離散部分群で $\Gamma'\backslash SL(2,\mathbf{R})$ が測度有限なものとする。C^∞- 関数 $\varphi : SL(2,\mathbf{R}) \to \mathbf{C}$ が,

(i) $\varphi(\gamma g) = \varphi(g) \quad \forall\gamma\in\Gamma, \forall g\in SL(2,\mathbf{R})$.
(ii) φ は右 K-有限 かつ $Z(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}))$-有限。ここで, $Z(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}))$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ の普遍展開環 $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R}))$ の中心.
(iii) φ は緩増大, すなわちある $C>0, M>0$ が存在して $|\varphi(g)| \leqslant C||g||^M$ $(||g|| := \mathrm{tr}({}^t gg))$ となる.

をみたすとき, φ を $SL(2,\mathbf{R})$ 上の Γ' に関する保型形式 であるという。

$\lambda_1>0$ を正の整数として, $\varphi\in\mathcal{A}(\Gamma'\backslash SL(2,\mathbf{R}))$ が 上半空間 $\mathfrak{h}_1:=\{x+\sqrt{-1}y\in\mathbf{C}|x\in\mathbf{R},y>0\}$ 上のウェイト λ_1 の正則尖点形式 φ_{dm} の持ち上げになっているとき, すなわち,

$$\varphi(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix})=(c\sqrt{-1}+d)^{-\lambda_1}\varphi_{dm}((a\sqrt{-1}+b)(c\sqrt{-1}+d)^{-1}),\qquad\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbf{R}),$$

となっているとき φ も ($SL(2,\mathbf{R})$ 上の) 正則尖点形式であると呼ぼう。以下, 簡単のため $\Gamma':=SL(2,\mathbf{Z})$ とする。正則尖点形式 φ_{dm} の Fourier 展開 $\varphi_{dm}(z)=\sum_{l=1}^{\infty}a_le^{2\pi\sqrt{-1}lz}$ $z\in\mathfrak{h}_1$ を群論的に再構成しよう。周期 1 の 周期関数 $\mathbf{R}\ni x\mapsto\varphi(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix})\in\mathbf{C}$ に Fourier 逆変換公式を適用して, 次のような φ の Fourier 展開を得る:

$$\varphi(g)=\sum_{l\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}}W_{\varphi,l}(g),$$

$$\text{ただし } W_{\varphi,l}(g):=\int_0^1\varphi(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}g)\exp(-2\pi\sqrt{-1}lx)dx.$$

今、φ は尖点形式なので $l=0$ に対応する項は現れないことに注意する。

$$\sigma_\varphi:=\mathbf{C}\text{-span}\{R(g_1)\varphi|g_1\in SL(2,\mathbf{R})\},\qquad[R(g_1)\varphi](g):=\varphi(gg_1),\quad g,g_1\in SL(2,\mathbf{R}),$$

によって σ_φ を定めれば, σ_φ は右移動 R によって $SL(2,\mathbf{R})$ の表現となる。この表現 σ_φ(の $L^2(\Gamma'\backslash SL(2,\mathbf{R}))$ における完備化) は極小 $SO(2)$-type λ_1 を持つ $SL(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現で, φ はその最低ウェイトベクトルになっている。このことと,「Whittaker 模型の一意性」なる事実 ([Wa, Theorem 8.8], [Sh, Theorem 3.1]) から, $l>0$ ならば, $SL(2,\mathbf{R})$ 上の関数たち

$$SL(2,\mathbf{R})\ni g\mapsto W_{\varphi,l}(\begin{pmatrix}1/\sqrt{l}&0\\0&\sqrt{l}\end{pmatrix}g)\in\mathbf{C}$$

は定数倍を除いて一意的である。したがって, ある $SL(2,\mathbf{R})$ 上の関数 $W_\varphi^{(\infty)}$ と複素数列 $a(l)$ $(l=1,2,\cdots)$ が存在して

$$W_{\varphi,l}(g)=a(l)W_\varphi^{(\infty)}(\begin{pmatrix}\sqrt{l}&0\\0&1/\sqrt{l}\end{pmatrix}g),\qquad g\in SL(2,\mathbf{R}),$$

となる。$W_\varphi^{(\infty)}$ は離散系列表現 D_{λ_1} に属す Whittaker 関数と呼ばれる。φ が最低ウェイトベクトルになっていることから, $W_\varphi^{(\infty)}$ (の動経成分) の満たす微分方程式が立てられる。それを解けば,

$$W_\varphi^{(\infty)}(\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y}&0\\0&1/\sqrt{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix})=e^{2\pi\sqrt{-1}x}y^{\lambda_1/2}e^{-2\pi y}e^{\sqrt{-1}\lambda_1\theta},$$

であることがわかる。一方, $l<0$ ならば, φ が緩増大であることから $W_{\varphi,l}\equiv0$ であることが出る。こうして

$$\varphi(g)=\sum_{l=1}^{\infty}a(l)W_\varphi^{(\infty)}(\begin{pmatrix}\sqrt{l}&0\\0&1/\sqrt{l}\end{pmatrix}g)$$

なる Fourier 展開を得る。これは, φ_{dm} の通常の Fourier 展開 $\varphi_{dm}(z)=\sum_{l=1}^{\infty}a_le^{2\pi\sqrt{-1}lz}$ $z\in\mathfrak{h}_1$ と実質的に同じもので, $a(l)=l^{-\lambda_1/2}a_l$ $(l=1,2,\cdots)$ となっている。以下, 次を仮

仮定 1 φ はウェイト λ_1 の正則 Hecke-eigen cusp form で，$a(1)=a_1=1$ と正規化されている。

(1.2) Siegel 尖点形式. G を階数 2 の実 simplectic 群とする：

$$G = Sp(2,\mathbf{R}) := \{g \in GL(4,\mathbf{R}) \mid {}^t g J_4 g = J_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}\}.$$

G の離散部分群 Γ として，$\Gamma := Sp(2,\mathbf{Z}) = G \cap SL(4,\mathbf{Z})$ をとる。$F: \Gamma\backslash G \to \mathbf{C}$ を G 上の保型形式で次の仮定を満たすものとする：

仮定 2. F は Hecke-eigen cusp form である。

仮定 3. F は G の非正則な離散系列表現 $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ $(1-\lambda_1<\lambda_2<0, \lambda_1$は前小節のもの$)$ を生成し，F は $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の極小 K-タイプ $\tau_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の最高ウェイトベクトル v_d に対応する。すなわち，

$$\Pi_F := \mathbf{C}\text{-span}\{R(g_1)F | g_1 \in G\}, \qquad [R(g_1)F](g) := F(gg_1)$$

によって Π_F を定めれば，Π_F は右移動 R によって G の表現となる。この表現 Π_F(の $L^2(\Gamma\backslash G)$ における完備化) が $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ である。ここで用いた $Sp(2,\mathbf{R})$ の離散系列表現についての記号は，[O] と同じものでここでは説明を繰り返さない。ただ，ベクトル $v_d \in D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ は，前節の D_{λ_1} の最低ウェイトベクトルがそうであるように，$D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の中のある特徴的な元であるとだけ言っておく。

仮定 4. F は generic である。

この「 generic 」なる用語の定義を述べよう。二つの正の整数の組 $(k,l) \in \mathbf{Z}_{>0} \times \mathbf{Z}_{>0}$ に対して次の積分

$$F_{k,l}(g) = \int_{(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^4} F\left(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & x_1 & x_2 \\ & 1 & x_2 & x_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & x_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -x_0 & 1 \end{array}\right) g\right) \mathrm{e}(kx_0+lx_3)dx_3dx_2dx_1dx_0,$$

を考える。F が generic とは，ある (k,l) について積分 $F_{k,l}$ が消滅しないということである (今の場合，**仮定 2，3** によって，$F_{1,1}$ が消滅しないと言っても同じことである)。やはり，Whittaker 模型の一意性から，(k,l) によらないある $Sp(2,\mathbf{R})$ 上の C^∞- 関数 $W_F^{(\infty)}$ と複素数 $c(k,l)$ たちが存在して，上の積分たちは，一斉に

$$F_{k,l}(g) = c(k,l) \times W_F^{(\infty)}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\begin{array}{cc|cc} kl & & & \\ & l & & \\ \hline & & k^{-1} & \\ & & & 1 \end{array}\right) g_\infty\right),$$

と書くことができる。ここで，$W_F^{(\infty)}$ は $Sp(2,\mathbf{R})$ の非正則な離散系列表現 $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ に属す Whittaker 関数と呼ばれるものである。この関数の明示公式が次節で与えられるが，これが主定理の証明で決定的な役割を演ずる。複素数 $c(k,l)$ たちを <u>F の Fourier 係数</u>と呼ぶことにする。

(1.3) degree 8 L-関数. 次数 2 の Siegel 尖点形式 F 及び，楕円尖点形式 φ が**仮定 1** か

ら**仮定 4** を満たすものとする。このとき，それぞれの Fourier 級数 $c(k,l)$ 及び $a(l)$ から，L-関数 $L(s,F\otimes\varphi)$ が

$$L(s,F\otimes\varphi):=\zeta(2s)\times\sum_{k,l=1}^{\infty}c(k,l)a(l)k^{-2s+2}l^{-s+2}$$

で定義する。ここで，$\zeta(s)$ は Riemann のゼータ関数である。今，F および φ が尖点形式であることから，Fourier 級数たち $c(k,l)$, $a(l)$ は有界である。従って上の Dirichlet 級数は $\mathrm{Re}(s)>3$ で絶対収束する。後でみるように，$L(s,F\otimes\varphi)$ は 8 次の Euler 積に分解することがわかるので，degree 8 L-関数 と呼ぶことにしよう。さらに，ガンマ因子

$$\begin{aligned}&L_\infty(s,F\otimes\varphi)\equiv L(s,D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}\otimes D_{\lambda_1})\\&:=\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{\lambda_2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{-\lambda_2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{2\lambda_1+\lambda_2-2}{2})\Gamma_{\mathbf{C}}(s+\frac{2\lambda_1-\lambda_2-2}{2})\end{aligned}$$

を掛けて，完備化された L-関数 $\widehat{L}(s,F\otimes\varphi)$ を

$$\widehat{L}(s,F\otimes\varphi):=L_\infty(s,F\otimes\varphi)\times L(s,F\otimes\varphi)$$

で定義する。さて，我々の結果は次の通り:

定理 1.1. $\widehat{L}(s,F\otimes\varphi)$ はたかだか $s=0,1$ に一位の極を持つ有理型関数として全平面に解析接続され，関数等式

$$\widehat{L}(s,F\otimes\varphi)=\widehat{L}(1-s,F\otimes\varphi)$$

を満たす。

§2. 証明の概略

冒頭にも述べたように，証明には Novodvorsky([No-1],[No-2, §3]) が 1970 年代中ごろにが考案した $L(s,F\otimes\varphi)$ の積分表示を用いる。

(2.1) アデール群への拡張. まず，尖点形式 F や φ をアデール群上の関数に拡張しよう。G を $\mathbf{Q}$ 上定義された similitude 付きの 2 次 simplectic 群とする:

$$\mathsf{G}=GSp(2):=\{g\in GL(4)\,\big|\,{}^tgJ_4g=\nu(g)J_4\text{ for some }\nu(g)\in\mathbf{G}_m\}.$$

G の中心は $\mathsf{Z}:=\{z1_4\in G|z\in\mathbf{G}_m\}$ で与えられる。$\mathsf{G}_{\mathbf{A}}$ の勝手な元 g は

$$g=\gamma z_\infty u_f g_\infty,\quad \gamma\in\mathsf{G}_{\mathbf{Q}},z_\infty>0,u_f\in GSp(2,\widehat{\mathbf{Z}}),g_\infty\in Sp(2,\mathbf{R}),$$

と書け，しかも $Sp(2,\mathbf{R})\cap\mathsf{G}_{\mathbf{Q}}GSp(2,\widehat{\mathbf{Z}})=Sp(2,\mathbf{Z})$ なので，F は

$$F(\gamma z_\infty u_f g_\infty)=F(g_\infty),$$

を満たすように一意的に拡張される。同じく，φ も $GL(2)_{\mathbf{A}}$ 上に

$$\varphi(\gamma' z'_\infty u'_f g'_\infty)=\varphi(g'_\infty)\quad \gamma'\in GL(2,\mathbf{Q}),z'_\infty>0,u'_f\in GL(2,\widehat{\mathbf{Z}}),g_\infty\in SL(2,\mathbf{R}),$$

を満たすように一意的に拡張される。
以下で用いる G の部分代数群等を列挙しておこう。まず, $\mathsf{H} := \{h = (h_1, h_2) \in GL(2) \times GL(2) | \det(h_1) = \det(h_2)\}$ とおき,

$$H \ni h = (h_1, h_2) \mapsto \left(\begin{array}{cc|cc} a_1 & & b_1 & \\ & a_2 & & b_2 \\ \hline c_1 & & d_1 & \\ & c_2 & & d_2 \end{array}\right) \in G, \qquad h_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

によって G の部分代数群と見る。G の極大冪単部分群 N および H の極大冪単部分群 N^{H} として

$$\mathsf{N} := \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & * & * & * \\ & 1 & * & * \\ \hline & & 1 & \\ & & * & 1 \end{array}\right) \in G \right\}, \qquad \mathsf{N}^{\mathsf{H}} := \mathsf{N} \cap \mathsf{H}$$

をとる。また $GL(2)$ の Borel 部分群 B' を $\mathsf{B}' := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in GL(2) \right\}$ と固定する。$GL(2)_{\mathbf{A}}$ の極大コンパクト部分群 K' として $O(2) \times \prod_{p<\infty} GL(2, \mathbf{Z}_p)$ をとる。

(2.2) ゼータ積分. degree 8 L-関数の積分表示（ゼータ積分）を定義するために，まず, $GL(2)_{\mathbf{A}}$ 上の Eisenstein 級数を導入する。誘導表現の空間 $I(s)$ $(s \in \mathbf{C})$ を

$$I(s) := \{ f : GL(2)_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C} |\ \text{smooth, right } K'\text{-finite},$$
$$f(\begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} h_2) = \left|\frac{b_1}{b_2}\right|_{\mathbf{A}}^s f(h_2),\ \forall \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \in B'_{\mathbf{A}}, \forall h_2 \in GL(2)_{\mathbf{A}} \}$$

で定義する。$I(s)$ の有理型切断 $f : \mathbf{C} \times GL(2)_{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ を次のように定義する：

$$f(s, h_1) := \prod_v f_v(s, h_{1,v}),$$
$$f_\infty(s, \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}) := \Gamma_{\mathbf{R}}(2s + \lambda_2) \left|\frac{b_1}{b_2}\right|_\infty^s e^{\sqrt{-1}\lambda_2\theta},$$
$$f_p(s, \begin{pmatrix} b_1 & * \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} k'_p) := \zeta_p(2s) \left|\frac{b_1}{b_2}\right|_p^s, \quad k'_p \in GL(2, \mathbf{Z}_p).$$

この $I(s)$ の有理型切断 f に対して, Eisenstein 級数 $E(h_1, s, f)$ が

$$E(h_1, s, f) := \sum_{\gamma \in B'_{\mathbf{Q}} \backslash GL(2)_{\mathbf{Q}}} f(s, \gamma h_1), \quad h_1 \in GL(2)_{\mathbf{A}}$$

で定義される。これは $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束して, $s = 0, 1$ にのみ一意の極を持つ有理型関数として全 s-平面に解析接続される。また，関数等式 $E(h_1, s, f) = E(h_1, 1 - s, f)$ が成立する。$GSp(2) \times GL(2)$ に対する Novodvorsky のゼータ積分とは次のようなものである。

定義 2.1 (cf. [So]). ゼータ積分 $Z(s) := Z(s, F \otimes \varphi, f)$ を

$$Z(s) := \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{A}} \mathsf{H}_{\mathbf{Q}} \backslash \mathsf{H}_{\mathbf{A}}} F(h) E(h_1, s, f) \varphi(h_2) dh, \tag{2.1}$$

で定義する。これは, Eisenstein 級数の極 $s = 0, 1$ 以外で絶対収束し高々 $s = 0, 1$ のみに極を持つ有理型関数を定める。

$$F(z1_4g) = F(g), \quad \varphi(z1_2h_2) = \varphi(h_2), \qquad \forall z \in \mathbf{A}^\times, \forall g \in G_\mathbf{A}, \forall h_2 \in GL(2)_\mathbf{A}$$

であるので，被積分関数が $\mathsf{Z}_\mathbf{A}$-不変であることに注意しておこう。次の命題を述べるために F および φ の 大域的 Whittaker 関数 を導入する。非自明な指標 $\mathbf{e}_\mathbf{A} : \mathbf{A}/\mathbf{Q} \to \mathbf{C}^{(1)}$ を $\mathbf{e}_\mathbf{A}(x_\infty) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x_\infty)$ $(x_\infty \in \mathbf{R})$, $\mathbf{e}_\mathbf{A}(\mathbf{Z}_p) = \{1\}$ $(\forall p < \infty)$ により定める。そうして $\mathsf{N}_\mathbf{A}$ のユニタリ指標 $\psi_\mathbf{A} : \mathsf{N}_\mathbf{A} \to \mathbf{C}^{(1)}$ を

$$\psi_\mathbf{A}(\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n_0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & -n_0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & n_1 & n_2 \\ & 1 & n_2 & n_3 \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)) = \mathbf{e}_\mathbf{A}(-n_0 - n_3) \in \mathbf{C}^{(1)},$$

で定める。F の大域的 Whittaker 関数を

$$W_F(g) := \int_{\mathsf{N}_\mathbf{Q} \backslash \mathsf{N}_\mathbf{A}} F(ng)\psi_\mathbf{A}(n^{-1})dn, \quad g \in \mathsf{G}_\mathbf{A},$$

で定義する。同じく φ の 大域的 Whittaker 関数を

$$W_\varphi(h_2) := \int_{\mathbf{Q} \backslash \mathbf{A}} \varphi(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_2)\mathbf{e}_\mathbf{A}(-x)dx, \quad h_2 \in GL(2)_\mathbf{A},$$

で定義する。$GL(2) \times GL(2)$ の Rankin-Selberg-Jacquet と同様に，Eisenstein 級数を unfold することで次が証明される：

命題 2.2 (Basic identity, cf.[B2, §3]). 積分

$$\int_{\mathsf{Z}_\mathbf{A} \mathsf{N}^\mathsf{H}{}_\mathbf{A} \backslash \mathsf{H}_\mathbf{A}} W_F(h) W_\varphi(h_2) f(s, h_1) dh, \tag{2.2}$$

は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束して，$Z(s, F \otimes \varphi, f)$ に等しい。

注意 2.3. [No-1], [No-2] には, (2.1) 式は (表立っては) 現れず, はじめから (2.2) 式を考察対象としている。

今，F および φ は Hecke-eigen であると仮定しているから

$$W_F(g) = \prod_v W_v(g_v), \quad \text{for } g = (g_v) \in \mathsf{G}_\mathbf{A},$$
$$W_\varphi(h_2) = \prod_v W'_v(h_{2,v}), \quad \text{for } h_2 = (h_{2,v}) \in GL(2)_\mathbf{A}.$$

と局所 Whittaker 関数の積に分解することがわかる。$Z(s)$ も

$$Z(s) = \prod_v Z_v(s), \qquad Z_v(s) := \int_{\mathsf{Z}_{\mathbf{Q}_v} \mathsf{N}^\mathsf{H}_{\mathbf{Q}_v} \backslash \mathsf{N}_{\mathbf{Q}_v}} W_v(h_v) W'_v(h_{2,v}) f_v(s, h_1) dh_v,$$

と局所因子の積に分解する。さて，§1 の記号を使うと，

$$W_\infty|_{Sp(2,\mathbf{R})} = W_F^{(\infty)}, \quad c(k,l) = \prod_{p<\infty} W_F^{(p)}(\left(\begin{array}{cc|cc} kl & & & \\ & l & & \\ \hline & & k^{-1} & \\ & & & 1 \end{array}\right))$$

$$W'_\infty|_{SL(2,\mathbf{R})} = W_\varphi^{(\infty)} \qquad a(l) = \prod_{p<\infty} W_\varphi^{(p)}(\begin{pmatrix} l & \\ & 1 \end{pmatrix})$$

であることは容易に確められる。これから，

$$L(s, F\otimes\varphi) = \prod_{p<\infty} Z_p(s),$$

であることがわかる。

ここで，$Z_p(s)$ が 8 次の Euler 因子になることを確認しておこう。F (resp. φ) の $G_{\mathbf{Q}_p}$ (resp. $GL(2)_{\mathbf{Q}_p}$) による右移動たちは $\mathrm{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (resp. $GL(2)_{\mathbf{Q}_p}$) の不分岐主系列表現を生成している。その佐武パラメータを $A_p \in GSp(2,\mathbf{C})$ (resp. $B_p \in GL(2,\mathbf{C})$) とする。不分岐 Whittaker 関数の明示公式 ([C-S],[Ka]) を使うと，$Z_p(s)$ が計算できる：

命題 2.4 ([B2]). $Z_p(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束して，定数倍を除いて，

$$Z_p(s) = \left[\det(1 - A_p \otimes B_p p^{-s})\right]^{-1},$$

である。

ともかく，

$$Z(s) = Z_\infty(s) \times L(s, F\otimes\varphi)$$

であることがわかった。ここで左辺は高々 $s = 0, 1$ にのみ一位の極を持つ有理型関数であり，また Eisenstein 級数の関数等式から，$Z(s) = Z(1-s)$ である。従って，次の命題を示せば証明が終わる：

命題 2.5. $Z_\infty(s)$ は $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束し $L_\infty(s, F\otimes\varphi)$ に定数倍を除いて一致する。

(2.3) Whittaker 関数の明示公式. $Z_\infty(s)$ を計算するためには，Whittaker 関数の明示公式を必要とする。まず，既に述べたように，$W'_\infty|SL(2,\mathbf{R}) = W_\varphi^{(\infty)}$ であり，また，$W'_\infty(zh_2) = W'_\infty(h_2)$ なので，小節 (1.1) で与えたように

$$W'_\infty(\begin{pmatrix} y_1 y_2 & \\ & y_2 \end{pmatrix}) = y_1^{\lambda_1/2} e^{-2\pi y_1}.$$

である。Oda [O] は，$Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittake 関数 $W_F^{(\infty)}$ は，ベクトル v_d の離散系列表現 $D_{(-\lambda_2,-\lambda_1)}$ の中での特徴づけから，$Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Whittake 関数 $W_F^{(\infty)}$ の動径成分の満たす微分方程式系を構成し，それの Euler 型の積分表示を得た。さて，筆者は Whittaker 関数の類似物である新谷関数の研究中に Whittake 関数 W_∞ の動径成分が次のような Mellin-Barnes 型の積分表示を持つことに気がついた。(σ_1, σ_2) を

(2.3) $$\sigma_1 + \sigma_2 + 1 > 0 \quad \text{かつ} \quad \sigma_1 > 0 > \sigma_2.$$

をみたすようにとる。すると $C \in \mathbf{C}^\times$ を定数として

$$W_\infty\left(\begin{pmatrix} y_1y_2^2 & & & \\ & y_1y_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & y_2 \end{pmatrix}\right) = e^{-2\pi y_1}\int_{L(\sigma_1)} ds_1 \int_{L(\sigma_2)} ds_2 (4\pi^3 y_1 y_2^2)^{(-s_1+\lambda_2+1)/2}$$

$$\times\, (4\pi y_1)^{(-s_2+\lambda_1)/2}\Gamma\left(\frac{s_1+s_2-2\lambda_2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1+s_2+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-s_2}{2}\right))(s_1)_{\lambda_1-\lambda_2},$$

である。ここで積分路 $L(\sigma_j)$ $(j=1,2)$ は $\sigma_j - \sqrt{-1}\infty$ から $\sigma_j + \sqrt{-1}\infty$ へ向かう垂直な路である。

注意 2.6. Whittaker 関数をはじめとする，簡約リー群上の一般化された球関数のうち Mellin-Barnes 型の積分表示を持つものがいろいろ知られてきている。２階の超幾何微分方程式をみたすものは，もちろんこの中に入るが，ほかにも [B1]($GL(3,\mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数), [H] ($Sp(2,\mathbf{R})$ 上の Fourier-Jacobi 型球関数), [Mo-1]($Sp(2,\mathbf{R})$ 上の新谷関数) などがある。経験則として，Mellin-Barnes 型の積分表示は，局所的なゼータ積分の計算に適しているようである。

(2.4) $Z_\infty(s)$ の計算 (定理の証明の完結). $H_\mathbf{R}$ 上の測度を岩澤分解して

$$Z_\infty(s) = \int_0^\infty \frac{dy_1}{y_1}\int_0^\infty \frac{dy_2}{y_2} W_\infty\left(\begin{pmatrix} y_1y_2^2 & & & \\ & y_1y_2 & & \\ & & 1 & \\ & & & y_2 \end{pmatrix}\right) W'_\infty\left(\begin{pmatrix} y_1y_2 & \\ & y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$y_1^{s-2} y_2^{2s-2},$$

となる。後はここに上述の明示公式を代入して計算して，$L_\infty(s, F\otimes\varphi)$ に一致することを見ればよい。$\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で絶対収束することは，Stirling の公式を用いた被積分関数の評価よりわかる (この部分の計算は [Mo-2] を参照のこと)。なお計算の途中で

補題 2.7 (Barnes' 1st Lemma [W-W, p.289]).

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_L \Gamma(a+s)\Gamma(b+s)\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)ds = \frac{\Gamma(a+c)\Gamma(a+d)\Gamma(b+c)\Gamma(b+d)}{\Gamma(a+b+c+d)}.$$

ここで，積分路 L は $-\sqrt{-1}\infty$ から出発して，$\Gamma(a+s)\Gamma(b+s)$ の極を左に，$\Gamma(c-s)\Gamma(d-s)$ の極を右にみて，$+\sqrt{-1}\infty$ へ向かう路である。

を用いる。

注意 2.8. (1) ここで述べたような，L-関数の積分表示理論において，無限素点における寄与"$Z_\infty(s)$" が $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ 絶対収束することは，Whittaker 関数等の挙動を一般的に考察することで証明されることもある (本稿の場合は無理のようである)。しかしながら，全 s-平面に有理型に解析接続されることすることは，そのような Whittaker 関数の一般論だけ決して示すことのできないものである。従って，L-関数の解析接続という大域的な結果を得るためには，Whittaker 関数の明示的な形を決めることは不可欠であることを強調しておく。

(2) ここでは，簡単のため F や φ が"full modular" の場合に定理を定式化したが，Soudry([So]) の証明した局所関数等式を用いれば，より一般の状況で同様の結果を証明できる。

(3) F 及び φ が実素点で spherical な主系列表現を生成している場合にも，$Z_\infty(s)$ が Niwa([Ni-1, 定理 2],[Ni-2, Theorem 3]) によって計算されている。

References

[B1] Bump, D., *Automorphic forms on* $GL(3, \mathbf{R})$, Lecture Notes in Mathematics **1083**, Springer-Verlag (1984).

[B2] Bump, D., The Rankin-Selberg method: a survey. Number theory, trace formulas and discrete groups, 49-109, Academic Press, (1989).

[C-S] Casselman, W and Shalika, J. A., The unramified principal series of p-adic groups. II. The Whittaker function. Compositio Math. 41 (1980), 207-231.

[F] Furusawa, M, On the L-functions for $GSp(2) \times GL(2)$ and their special values, J. reine angew. Math.**438**, 187-218 (1993).

[H] Hirano, M, Fourier-Jacobi type spherical functions for discrete series representations of $Sp(2, \mathbf{R})$, Compositio Math. **128**, 177-216, (2001).

[Ka] Kato, S, P 進体上の Chevalley 群の class-1 Whittaker 函数, 東京大学修士論文 (1978).

[Mo-1] Moriyama, T., Spherical functions for the semisimple symmetric pair $(Sp(2, \mathbf{R}), SL(2, \mathbf{C}))$. Canad. J. Math. **54**, 828-865, (2002).

[Mo-2] Moriyama, T., A remark on Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **9**, 627-635 (2002)

[Mo-3] Moriyama, T., Entireness of the spinor L-functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$, preprint (2002).

[Mo-4] Moriyama, T., $Sp(2, \mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と Novodvorsky のゼータ積分について, 数理解析研究所講究録 **1281**,「保型形式およびそれに付随するデイリクレ級数の研究」, 1-13, (2002).

[Ni-1] Niwa, S, 次数 2 の Siegel modular の Whittaker function, 数理解析研究所講究録 **792**, 26-38 (1992).

[Ni-2] Niwa, S,Commutation Relations of Differential operators and Whittaker Functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, Proc. Japan Acad. **71** Ser A. 189-191, (1995).

[No-1] Novodvorsky, M. E. , Fonctions J pour $GSp(4)$. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **280**, A191-A192, (1975).

[No-2] Novodvorsky, M. E. , Automorphic L-functions for symplectic group $GSp(4)$. Proc. Sympos. Pure Math. **33** Part 2, 87-95, (1979).

[O] Oda, T., An explicit integral representation of Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$ for large discrete series representations, Tôhoku Math. J. **46**, 261-279 (1994).

[Sh] Shalika, J. A. , The multiplicity one theorem for GL_n, Ann. of Math. **100**, 171–193 (1974).

[So] Soudry, D, The L and γ factors for generic representations of $GSp(4, k) \times GL(2, k)$ over a local non-Archimedean field k., Duke Math. J. **51**, 355–394, (1984).

[Wa] Wallach, N.: Asymptotic expansions of generalized matrix entries of representations of real reductive groups.. Lecture Notes in Mathematics **1024**, Springer-Verlag, 287-369, (1983).

[W-W] Whittaker, E. T. and Watson, G. N., *A course of modern analysis*, Reprint of the fourth (1927) edition, Cambridge University Press, (1996).

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-Ku, Tokyo 153-8914, Japan

E-mail address: `moriy-to@ms.u-tokyo.ac.jp`