

# 代用電荷法を用いた数値等角写像に関する 最近の話題

## Recent Topics on the Numerical Conformal Mapping Using the Charge Simulation Method

愛媛大学工学部 天野 要 (Kaname Amano)

岡野 大 (Dai Okano)

緒方秀教 (Hidenori Ogata)

Faculty of Engineering, Ehime University

名古屋大学大学院工学研究科 杉原正顕 (Masaaki Sugihara)

Graduate School of Engineering, Nagoya University

### 1 はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の1つであり、物理学や工学への応用も広い。しかし、その写像関数を初等関数で表現できる場合は限られている。そのような理由で、数値等角写像 (Numerical Conformal Mapping) は計算数学・数値解析における古典的な課題の一つである [7, 9, 12, 42].

例えば、Riemann の写像定理によれば、少なくとも2つの境界点を持つ任意の単連結領域  $D$  は互いに等角同値であり、いずれも単位円板領域に等角写像することができる。その写像関数  $w = f(z)$  は、 $D$  内の任意の1点を  $z_0$  とし、正規化条件  $f(z_0) = 0$ ,  $f'(z_0) > 0$  の下に一意に定まる。しかし、解の存在と一意性は知られていても、 $f(z)$  の近似写像関数を高い精度で効率よく構成することは決して簡単ではない。

多重連結領域の等角写像の問題は単連結領域の場合と様相が異なる。まず、単位円板領域のような単一の理想的な標準領域は存在しない。このことは等角写像が領域の多重度を保存することから明らかである。さらに、多重度を固定してもなお単一の標準領域は存在しない。相互に等角写像できるのはモジュラスと呼ばれる保存量が同じ領域間に限られる。そして、単連結領域の場合の単位円板領域に相当する標準領域として様々なスリット領域が用いられる。Nehari [19] は、典型的な標準領域として、

- (a) 平行スリット領域：互いに平行な直線スリットを伴う複素平面の全体,
- (b) 円弧スリット領域：原点を中心とする同心円弧状のスリットを伴う複素平面の全体,
- (c) 放射スリット領域：原点を中心とする放射状のスリットを伴う複素平面の全体,
- (d) 円弧スリット円板領域：同心円弧状のスリットを伴う円板領域,
- (e) 円弧スリット円環領域：同心円弧状のスリットを伴う円環領域

を挙げている (図1)。これらの領域は多重度が小さい場合には単連結領域や2重連結領

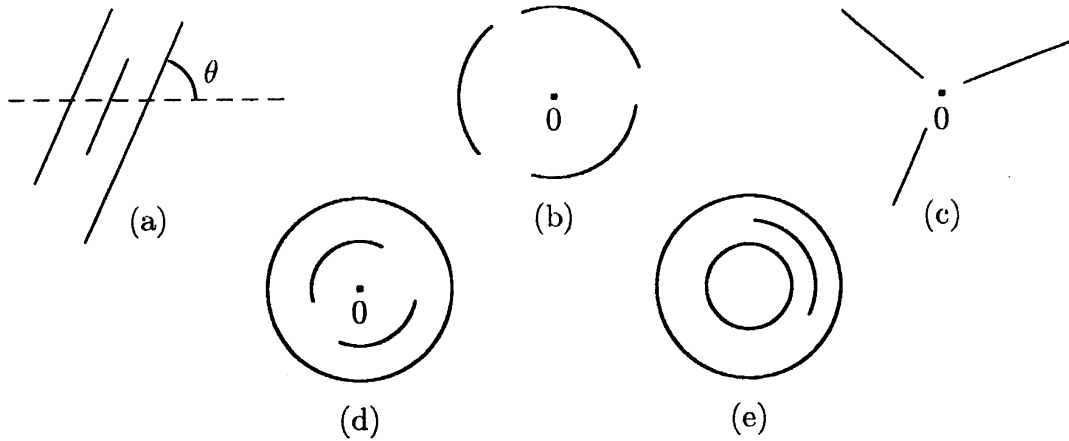


図 1: Nehari [19] の標準領域 : (a) 平行スリット領域, (b) 円弧スリット領域, (c) 放射スリット領域, (d) 円弧スリット円板領域, (e) 円弧スリット円環領域

域の標準領域となる. そして, 任意の領域はこれらの標準領域へ等角写像することができる. このように, 領域の幾何学的な形状に着目することによって, 多重度とモジュラスの値に依存しない標準領域の設定が可能である.

このような標準領域への等角写像は, 流体力学, 電磁気学, 電気工学等への応用上も重要な広く知られた問題である. しかし, 簡単で精度の高い数値計算法はあまり知られていなかった.

この報告では, 代用電荷法を用いた数値等角写像の方法を中心に, 代用電荷法と数値等角写像に関する我々の最近の研究を紹介する.

## 2 代用電荷法を用いた数値等角写像の原理と特徴

代用電荷法はポテンシャル問題の数値解法として知られている [16, 29]. 2次元 Laplace 方程式の場合には, 解である調和関数を対数ポテンシャル (Laplace 方程式の基本解) の 1 次結合で

$$g(x, y) = g(z) \simeq \sum_{i=1}^N Q_i \log |z - \zeta_i|, \quad z = x + iy \quad (1)$$

と表現する. ここに, 電荷点と呼ばれる極  $\zeta_i$  は問題の領域  $D$  の外部に配置する. そして, 電荷と呼ばれる未定係数  $Q_i$  を境界上に配置する拘束点で問題の境界条件を選点的に満たすように定める. この方法は簡単で, なめらかな境界条件の問題に対しては非常に高い精度を与える.

代用電荷法を数値等角写像に適用する場合には, まず等角写像の問題を 1 対の共役な調和関数 (すなわち, ある解析関数の実部と虚部) を求める問題に帰着し, これを複素対数ポテンシャルの 1 次結合で

$$g(x, y) + ih(x, y) = g(z) + ih(z) \simeq \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i), \quad z = x + iy \quad (2)$$

と近似する [1, 2]. そして, 近似写像関数が問題の等角写像の満たすべき条件を近似的に満たすように電荷の値を決定する. 代用電荷法を用いた数値等角写像には次のような長所がある.

- 原理とプログラミングや計算が簡単で, 曲線境界や非有界領域の問題に適している. また, 精度が高く, 誤差の評価が容易である.
- 特に, 「連続スキーム」の構成が可能である.

ここに, 連続スキームとは, 数値計算に複素対数関数の主値を用いても  $2\pi i$  の不連続が問題の領域にかからないような定式化のことである. この連続スキームによって近似写像関数は問題の領域で連続かつ解析的な表現形式を持つことができる. このような近似写像関数は, 関数論の理論がそのまま適用できるという意味で, 応用上も重要である.

上記の性質は一見当然のように思われるかも知れない. しかし, 数値等角写像の方法として著名な Symm の第 1 種 Fredholm 型の積分方程式法 [39, 40, 41] と比較すればあらためてその利点が明らかになる. 積分方程式法には, 代用電荷法の電荷に相当するソースが境界上に存在することに起因して, 幾つかの困難が存在する. まず, 連続スキームの構成が代用電荷法のように簡単ではない. 境界上では特異積分が必要で, 領域の内部と境界上で離散化した計算公式を使い分けなければならない. その場合には, 境界を含む領域全体で連続な解を得ることはそもそも困難である. このことは, 実際の計算スキームの提案という視点からは, 最大値の原理を利用して境界上で誤差評価を行うことの正当性にも疑問を投げかける.

しかし, 代用電荷法には次のような短所もある, とされてきた.

- 理論的な研究が不十分で, 電荷点の適切な配置等, 経験に依存する部分が少なくない.
- 特に, 境界上に角点や尖点を伴う領域, 薄い領域の外部問題やスリットを伴う領域, 周期的領域等への適用が困難である.

しかも, このような領域の問題は応用上もしばしば現れる.

### 3 最近の話題

#### 3.1 代用電荷法を用いた数値等角写像の方法

代用電荷法を用いた数値等角写像では, 有界または非有界な問題領域  $D$  (図 2) から前述のような標準領域 (図 1) への等角写像  $w = f(z)$  の近似写像関数  $F(z)$  を正規化条件と呼ばれる条件下で構成することが中心的な課題である.

我々は, 幾つかの Jordan 閉曲線の外側の非有界な多重連結領域から, (a) 平行スリット領域, (b) 円弧スリット領域, (c) 放射スリット領域への統一的な数値等角写像の方法を提案し, その有効性を数値実験的に検証した [3, 5]. ここに, 統一的とは, これらの等角写像の問題を同一の係数行列を持つ連立 1 次方程式に帰着させ, 未知数の 3 乗の計算量を要する  $LU$  分解を一度行えば, 未知数の 2 乗の計算量でそれぞれの等角写像の近似写像関数

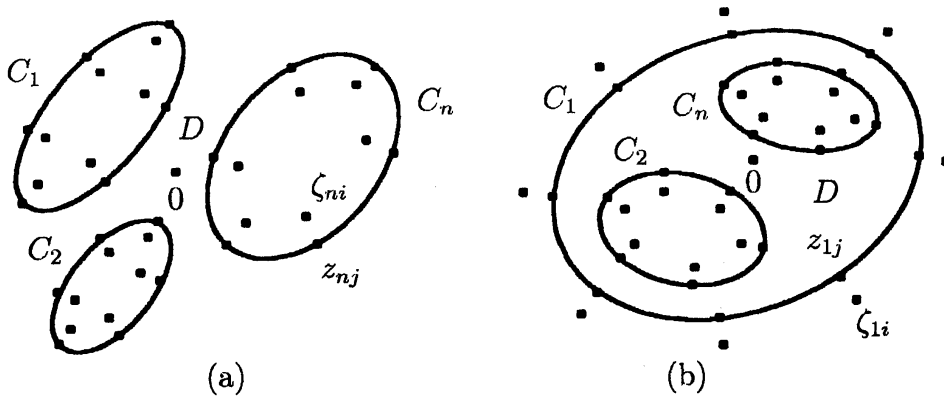


図 2: (a) 非有界, (b) 有界な多重連結領域と電荷点・拘束点の配置

が得られることを意味する。これらの等角写像によって、障害物を伴う一様流，渦流，湧き出し（吸い込み）流という 3 種のポテンシャル流，およびその重ね合わせ，の解析が可能である。

我々は，また，有界な多重連結領域から，(d) 円弧スリット円板領域と (e) 円弧スリット円環領域への数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験的に検証した [4, 32, 35]。数値実験では，Reichel [36] が第 1 種 Fredholm 型の積分方程式法のソース密度に Fourier-Galerkin 法を適用した場合と同じ 3 重連結領域を扱って，積分方程式法より 1～2 桁高い精度が得られている。

一連の研究の結果，Nehari の標準スリット領域への簡単で精度の高い数値等角写像が可能になった。提案した方法は，要素技術の組み合わせにより，他の様々な標準領域への数値等角写像に適用することが可能である。このような標準領域として，例えば，円弧スリットと放射スリットを同時に伴う円板領域，円環領域や，円板の外部にスリットを伴うような領域等がある。これらの領域への等角写像によって，例えば導体と絶縁体が同時に存在するような電流場の解析が可能になる。

以下に，代用電荷法を用いた数値等角写像の方法を非有界な多重連結領域の場合を例に多少具体的に記す。まず， $z (= x + iy)$  平面上の Jordan 閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の外側の無限遠点を含む非有界な  $n$  重連結領域を  $D$  とし (図 2(a))， $D$  から  $w (= u + iv)$  平面上の虚軸に平行 ( $\theta = \pi/2$ , 実部一定) または実軸に平行 ( $\theta = 0$ , 虚部一定) な平行スリット領域への等角写像を考える。その写像関数をそれぞれ  $w = f_u(z)$  または  $w = f_v(z)$  とし，区別する必要のない場合には添字  $u, v$  を省略する。これらの等角写像は無限遠点における Laurent 級数が

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (3)$$

という形である，すなわち  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) = 1$ , 定数項  $a_0 = 0$ , という正規化条件の下に一意に定まる。写像の結果， $C_1, C_2, \dots, C_n$  は  $u = u_1, u_2, \dots, u_n$  または  $v = v_1, v_2, \dots, v_n$  上に位置する平行スリットに移る。スリットの位置と長さは正規化条件によって写像関数とともに定まる。

同様に，同じ領域  $D$  から円弧スリット領域と放射スリット領域への等角写像を考える。その写像関数をそれぞれ  $w = f_c(z)$  および  $w = f_r(z)$  とし，区別する必要のない場合に

は添字  $c, r$  も省略する. 領域  $D$  内の 1 点を原点として, これらの等角写像は  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) = 1$  なる正規化条件の下に一意に定まる. 無限遠点における条件は Laurent 級数が

$$f(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots \quad (4)$$

という形であることを意味する. 写像の結果,  $C_1, C_2, \dots, C_n$  は原点を中心とする半径が  $r = r_1, r_2, \dots, r_n$  なる円弧スリットまたは偏角が  $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  なる放射スリットに移る. スリットの位置と長さは正規化条件によって写像関数とともに定まる.

これらの写像関数を

$$f_u(z) = z + g(z) + ih(z), \quad (5)$$

$$f_v(z) = z + i(g(z) + ih(z)), \quad (6)$$

$$f_c(z) = z \exp(g(z) + ih(z)), \quad (7)$$

$$f_r(z) = z \exp(i(g(z) + ih(z))) \quad (8)$$

と表現する. ここに,  $g(z)$  と  $h(z)$  は  $D$  で共役な調和関数で, 写像に対する幾何学的な制約から, 境界条件

$$\operatorname{Re} f_u(z) = g(z) + x = u_m, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im} f_v(z) = g(z) + y = v_m, \quad (10)$$

$$\log |f_c(z)| = g(z) + \log |z| = \log r_m, \quad (11)$$

$$\arg f_r(z) = g(z) + \arg z = \theta_m \quad (z \in C_m; m = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

を満たさなければならない. 無限遠点における正規化条件はいずれも

$$g(\infty) + ih(\infty) = 0 \quad (13)$$

となる. 原点における正規化条件  $f_c(0) = f_r(0) = 0$  の成立は明らかである. したがって, 解の存在と一意性から, それぞれ問題はこのような 1 対の共役な調和関数  $g(z), h(z)$  をスリットの位置 (または半径, 偏角)  $u_m, v_m, r_m, \theta_m$  とともに求めることに帰着する.

この共役な調和関数  $g(z), h(z)$  に代用電荷法を適用して, 複素対数関数の 1 次結合で

$$g(z) + ih(z) \simeq G(z) + iH(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li}) \quad (14)$$

と近似する. ここに,  $Q_0$  は複素定数で, 電荷点  $\zeta_{li}$  は  $D$  の外部すなわち  $C_l$  の内側に  $N_l$  個ずつ配置する. そして, この近似関数 (14) に近似写像関数の満たすべき (i) 1 価性条件, (ii) 正規化条件, (iii) 拘束条件 (電荷と同数の拘束点上で課された選点的な境界条件) を課し, さらに適当な変形を行って (詳細は省略する), 最終的には次のように連続スキームを得ることができる.

曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  がそれぞれの内側の 1 点  $\zeta_{10}, \zeta_{20}, \dots, \zeta_{n0}$  に対して星形であれば, 近似写像関数を

$$F_u(z) = z + G(z) + iH(z), \quad (15)$$

$$F_v(z) = z + i(G(z) + iH(z)), \quad (16)$$

$$F_c(z) = z \exp(G(z) + iH(z)), \quad (17)$$

$$F_r(z) = z \exp(i(G(z) + iH(z))), \quad (18)$$

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left( \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{l0}} \right) \quad (19)$$

と表現することができる。電荷  $Q_{11}, Q_{12}, \dots, Q_{nN_n}$  とスリットの位置  $S_1, S_2, \dots, S_n$  は  $N_1 + N_2 + \dots + N_n + n$  元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log \left| \frac{z_{mj} - \zeta_{li}}{z_{mj} - \zeta_{l0}} \right| - S_m = -t_{mj} \quad (20)$$

$$(z_{mj} \in C_m; j = 1, 2, \dots, N_m; m = 1, 2, \dots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n) \quad (21)$$

を解いて求まる。ここに、 $F_u(z)$ ,  $F_v(z)$ ,  $F_c(z)$ ,  $F_r(z)$  に対してそれぞれ

$$S_m = U_m, \quad t_{mj} = x_{mj}, \quad (22)$$

$$S_m = V_m, \quad t_{mj} = y_{mj}, \quad (23)$$

$$S_m = \log R_m, \quad t_{mj} = \log |z_{mj}|, \quad (24)$$

$$S_m = \Theta_m, \quad t_{mj} = \arg z_{mj} \quad (25)$$

である。

閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  が星形であるとは限らない一般の場合にも同様に簡潔な連続スキームを構成することができる。

実軸となす角度が  $\theta$  の場合の平行スリット領域への等角写像  $f_\theta(z)$  の近似写像関数  $F_\theta(z)$  は、 $F_u(z), F_v(z)$  から、

$$F_\theta(z) = e^{i\theta} (\cos \theta F_v(z) - i \sin \theta F_u(z))$$

と合成することができる。異なる  $\theta$  の値ごとに連立 1 次方程式を解き直す必要はない。

領域  $D$  は有界ではないが、解析関数の最大値の定理から、近似写像関数  $F_u(z), F_v(z), F_\theta(z)$  の絶対誤差と  $F_c(z), F_r(z)$  の相対誤差は境界上で最大値を取ることが分かる。図 3 は半径が異なる 3 つの円板の外部領域  $D$  から、(a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域への数値等角写像の例である。誤差は、近似写像関数のスリットからのずれを指標として、それぞれ  $10^{-7}, 10^{-4}, 10^{-5}$  ( $N = 64$ ) 程度である。

### 3.2 代用電荷法と数値等角写像の応用

代用電荷法を用いた数値等角写像は表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を与える。この性質を利用すれば、関数論の理論を適用して、ポテンシャル流中に置かれた障害物の周囲に生じる淀み点の位置や障害物に働く力を簡単に計算することができる。

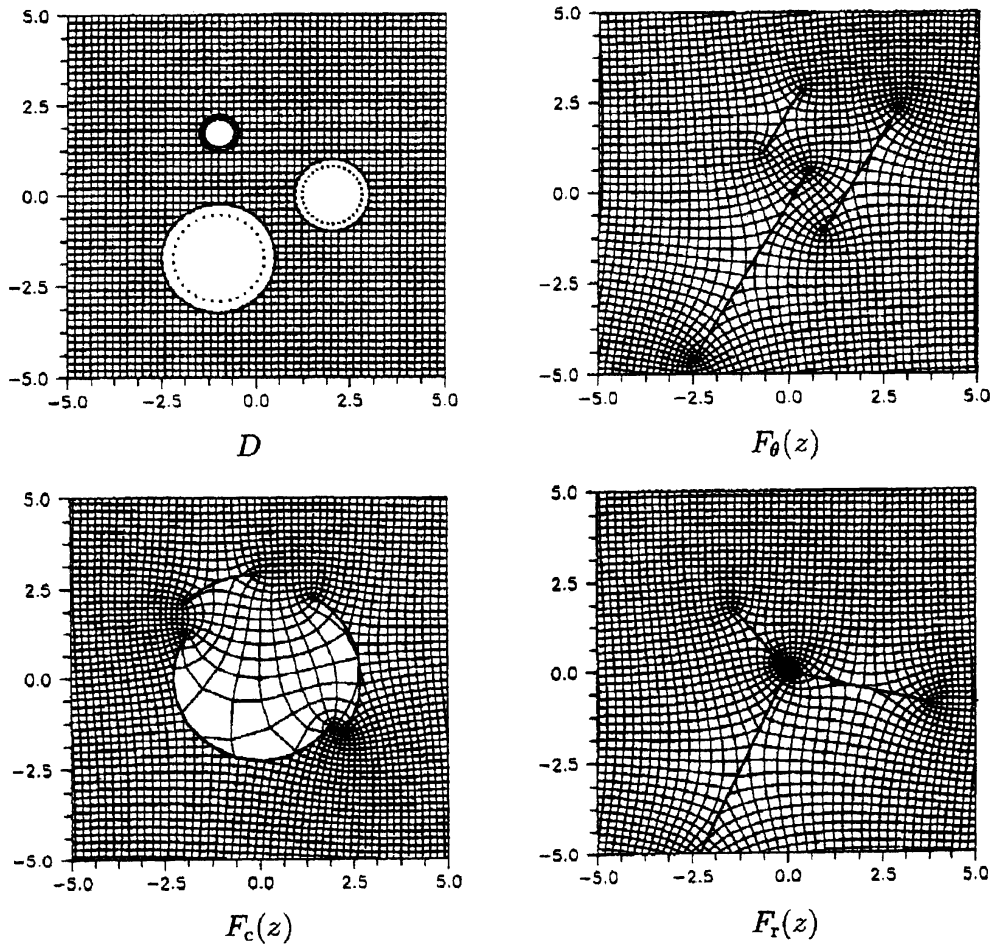


図 3: 非有界な多重連結領域  $D$  から, (a)  $F_\theta(z)$ : 平行スリット領域 ( $\theta = \pi/3$ ), (b)  $F_c(z)$ : 円弧スリット領域, (c)  $F_r(z)$ : 放射スリット領域への数値等角写像

例えば, 文献 [31] では平行流中の障害物の周囲に生じる淀み点を扱った. 障害物に対応する滑らかな閉曲線  $C$  を  $z = z(t)$  とパラメータ表現すれば, 平行スリット領域への近似写像関数  $F_\theta(z)$  を用いて,  $\theta$  方向の平行流の淀み点を  $p(t) = \text{Re}(\exp(-i\theta)F_\theta(z(t)))$  の極値 (最小値と最大値) を与える点, すなわち  $p'(t) = 0$  なる  $z(t)$ , で近似することができる. 極値の探索にはニュートン法  $t_{i+1} = t_i - p'(t_i)/p''(t_i)$  を用いているが, 解析的な近似導関数  $F'(z), F''(z)$  が利用できるので,  $p'(t)$  と  $p''(t)$  の計算に数値微分は不要である. 数値実験ではこの簡単な方法で高い精度が得られた. 障害物の数が増えても, 流れの種類が変わっても, 計算法の原理は同じである.

また, 文献 [25] では, 平行流中の物体に働く力の計算法を提案した. 流体力学では, 2次元ポテンシャル流中の物体に働く力を与える Blasius の公式が知られている. これは複素速度ポテンシャルの複素積分を用いて物体に働く力を表現するものである. 複素速度ポテンシャルを代用電荷法で近似し, この近似ポテンシャルを Blasius の公式に代入すれば, 電荷の位置と大きさのデータを用いて物体に働く力を簡単に近似計算する公式が得られる. 数値実験から, この公式は少ない計算量で十分な精度を達成することが確認されて

その他、代用電荷法を、Poisson 方程式 [13, 14], 実関数近似 [30], トロイダル・プラズマの閉じ込め磁場の解析 [38] 等に応用し、いずれも良好な結果が得られている。最後の課題は数学的には Laplace 方程式の外部 Cauchy 問題に対応している。

### 3.3 困難とされてきた問題への代用電荷法の適用

前述のように、代用電荷法には様々な長所がある。しかし、境界上に角点や尖点を伴う問題、薄い領域の外部問題やスリットを伴う領域の問題、周期的領域の問題、等には適用が困難であるとされてきた。最近、このような領域の問題に対して幾つかの重要な成果が得られている。ここでは、(i) 境界上に角点を伴う領域の数値等角写像、(ii) スリットを伴う領域の数値等角写像、(iii) 周期的領域の問題に対する代用電荷法について、その概要を記す。

境界上に角点を伴う領域の数値等角写像 [22, 26] では、写像関数を特異性の部分と解析的な部分に分けて記述し、後者に対して代用電荷法を適用する。その結果、全体として精度の高い近似写像関数が得られる。この方法によって、代用電荷法を用いた数値等角写像は鋭角的な角点を伴う翼の周囲のポテンシャル流のような問題に対しても適用できることになった [23]。数値実験でも良好な結果が得られている。

スリットを伴う領域の数値等角写像 [33, 34] では、Joukowski 変換を利用して、問題の領域を閉曲線の外部領域に写像し、写像後の領域に対して代用電荷法に基づく方法を適用する。または、問題の領域に即して Joukowski 変換と同様な効果を持つ変換を考える。これらの研究は、村島・久原の Riemann 面上の代用電荷法 [15] を数値等角写像に応用したもので、薄い領域の外部問題に対しても適用可能である。

以上の研究では、実際に数値解を構成する場面では、いずれも単独の点電荷による対数ポテンシャルの 1 次結合という従来の代用電荷法を用いている。しかし、この方法は空間周期性を持つ領域の問題、すなわち、周期的境界条件を課された偏微分方程式の問題に対しては適用が困難（多重度が大きい場合）または不可能（無限多重度の場合）である。

文献 [21] では、回転対称性を持つ（すなわち、有限多重度の場合の）非有界な多重連結領域から、円弧スリット領域と放射スリット領域への数値等角写像の方法を扱っている。この場合には、式 (14) を（定数項を除いて）

$$G(z) + iH(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i e^{i2\pi(l-1)/n}) = \sum_{i=1}^N Q_i \log(z^n - \zeta_i^n) \quad (26)$$

と変形することができる。その結果、解くべき連立 1 次方程式の未知数は  $1/n$  に低減され、より少ない計算量でより高い精度を得ることができる。

文献 [24] は、無限多重度の空間周期性を持つ領域の問題に対して適用可能な新しい型の代用電荷法を提案し、その有効性を数値実験的に検証したものである。具体的には、複素平面上で互いに交わることなく周期  $a (> 0)$  で 1 次元的に並んだ Jordan 閉曲線の外側の非有界領域から、周期的に無限個の平行スリットを伴う複素平面への等角写像を考える。この問題は 1 対の共役な調和関数に関する周期的境界値問題に帰着される。しかし、電荷



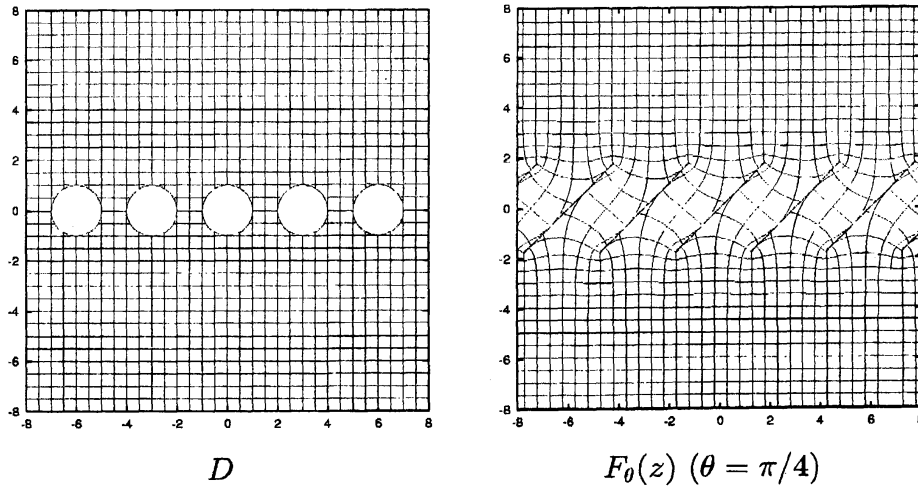


図 4: 周期的領域の数値等角写像

を周期的に無限個配置して,

$$G(z) + iH(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i \pm ma) \quad (27)$$

としても, 右辺の無限級数は一般に収束しない. そこで, 対数特異性の位置と大きさの情報を保ったままこの無限級数を変形して,

$$G(z) + iH(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \log \sin \left[ \frac{\pi}{a} (z - \zeta_i) \right] \quad (28)$$

という形の近似を導く. この近似を用いることによって, 少ない計算量で高い精度の近似写像関数を構成することができる (図 4). この文献には周期的に並んだ障害物を過ぎる 2次元ポテンシャル流への応用例も記されている.

文献 [28] では, 2次元周期的に配置された障害物を過ぎる遅い粘性流の問題, 数学的には Stokes 方程式の周期的境界値問題, を扱っている. Stokes 方程式に対しては Stokes 源 (Stokeslet) と呼ばれる基本解, すなわち, 単独の点荷重によって引き起こされる粘性流の解が知られている. しかし, Stokes 源の重ね合わせでこのような周期的境界値問題の解を近似することは困難である. そこで, 文献 [24] と同様, この問題に対しても周期的なソースによる基本解, 具体的には Hasimoto [8] による Stokes 方程式の周期的基本解, を用いた近似解法を提案している. さらに, この代用電荷法で得られるデータを用いて粘性流中の障害物に働く力を計算する方法も示している.

### 3.4 代用電荷法に関する基礎的研究

代用電荷法では, 電荷点・拘束点の選び方が計算精度に大きく影響する. 最悪の場合, 解くべき連立 1 次方程式が可解ではなくなることもある. 典型的な幾つかの 2次元領域に対しては, 桂田・岡本 [10, 11], 西田 [20], 室田 [17, 18] 等が代用電荷法が速く収束するよ

うな電荷点・拘束点の選び方を理論的に示している．例えば，円板領域の場合，電荷点・拘束点を同心円上に等間隔に配置すれば，連立1次方程式は一意解を持ち，近似解は点数に対して指数関数的に真の解に収束する．

文献 [27] では，代用電荷法の不変スキーム [17, 18] に現れる連立1次方程式が従来の研究より緩い条件で一意解を持つことを理論的に示している．例えば，円板領域の場合，電荷点・拘束点を同心円上にとれば，必ずしも等間隔でなくても連立1次方程式の一意解の存在は保証される．また，この文献には，3次元以上の高次元領域に対して代用電荷法を適用した場合に現れる連立1次方程式が一意解を持つ条件も示されている．高次元領域の問題に対する代用電荷法の理論的研究はこれが最初であると考えられる．

## 4 おわりに

代用電荷法と数値等角写像に関する我々の最近の研究は次のように整理することができる [6]．

1. 代用電荷法を適用して，Nehari の標準領域への簡単で精度の高い数値等角写像の方法を提案し，その有効性を数値実験的に検証した．
2. この数値等角写像を流体力学等の問題に応用して，その有用性を検証した．
3. 従来は困難とされてきた様々な領域の問題に対する代用電荷法の適用法を提案した．
4. 代用電荷法に現れる連立1次方程式の一意可解性を比較的一般的な条件で証明した．

数値等角写像に関してはいずれも連続スキームの構成法を明示している．

上記以外にも，代用電荷法と数値等角写像に関して言及すべき最近の研究は多い．例えば，櫻井・杉浦 [37] による電荷数低減法の研究は，より簡潔で精度の高い近似写像関数の構成を可能にするという意味で応用上も重要である．ここでは，そのような多くの研究を割愛した．また，言及した研究についても参考文献は少数の代表的なものに留めた．

我々は，これらの研究は基本解の重ね合わせという古典的な方法を計算機時代にふさわしい現代的な方法として甦らせるものである，と考えている．代用電荷法と数値等角写像に関しては今後さらに研究すべき課題が少なくない．

## 参考文献

- [1] 天野 要：代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法，情報処理学会論文誌，Vol. 28, No. 7, pp. 697–704 (1987).
- [2] Amano, K.: A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, J. Comput. Appl. Math., Vol. 53, No. 3, pp. 353–370 (1994).
- [3] Amano, K.: A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains, SIAM J. Sci. Comput., Vol. 19, No. 4, pp. 1169–

- 1187 (1998).
- [4] 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教: 代用電荷法による円弧スリット単位円板領域への数値等角写像の方法, 情報処理学会論文誌, Vol. 41, No. 4, pp. 998-1008 (2000).
- [5] 天野 要, 岡野 大, 緒方秀教, 下平博巳, 杉原正顯: 代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法, 情報処理学会論文誌, Vol. 42, No. 3, pp. 385-395 (2001).
- [6] 天野 要: 代用電荷法と数値等角写像に関する総合的研究, 平成 12~14 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (B)(2)) 研究成果報告書, 平成 15 年 3 月.
- [7] Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*, Springer, Berlin (1964).
- [8] Hasimoto, H.: On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres, *J. Fluid. Mech.*, Vol. 5, pp. 317-328 (1959).
- [9] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 3, John Wiley & Sons, New York (1986).
- [10] Katsurada, M. and Okamoto, H.: A mathematical study of the charge simulation method I, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math.*, Vol. 35, No. 3, pp. 507-518 (1988).
- [11] Katsurada, M and Okamoto, H.: The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem, *Computers Math. Appl.*, Vol. 31, No. 1, pp. 123-137 (1996).
- [12] Kythe, P. K.: *Computational Conformal Mapping*, Birkhäuser, Boston (1998).
- [13] 森下 博, 小林尚弘, 高市英明, 天野 要, 四ツ谷晶二: 代用電荷法によるポアソン方程式の数値計算, 情報処理学会論文誌, Vol. 38, No. 8, pp. 1483-1491 (1997).
- [14] 森下 博, 天野 要, 四ツ谷晶二: 代用電荷法によるポアソン方程式の数値計算法の改良, 情報処理学会論文誌, Vol. 40, No. 9, pp. 3337-3344 (1999).
- [15] 村島定行, 久原秀夫: リーマン面上のグリーン関数の重ね合せによる二次元ラプラス方程式の近似解法, 情報処理, Vol. 21, No. 5, pp. 455-467 (1980); Murashima, S. and Kuhara H.: An approximate method to solve two-dimensional Laplace's equation by means of superposition of Green's functions on a Riemann surface, *J. Inform. Process.*, Vol. 3, No. 3, pp. 127-139 (1980).
- [16] 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京 (1983).

- [17] 室田一雄：代用電荷法におけるスキームの「不変性」について，情報処理学会論文誌，Vol. 34, No. 3, pp. 533-535 (1993).
- [18] Murota, K.: Comparison of conventional and “invariant” schemes of fundamental solutions method for annular domains, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 12, No. 1, pp. 61-85 (1995).
- [19] Nehari, Z.: Conformal Mapping, McGraw-Hill, New York (1952).
- [20] 西田 詩：2次元楕円領域における代用電荷法の数学的及び数値的考察，日本応用数理学会論文誌，Vol. 5, No. 3, pp. 185-198 (1995).
- [21] 緒方秀教，鵜久森聡，岡野 大，天野 要：回転対称性をもつ多重連結領域に対する数値等角写像，日本応用数理学会年会講演予稿集，pp. 94-95 (2001).
- [22] Ogata, H.: Numerical conformal mapping of domains with corner-type singularities, 応用数学合同研究集会報告集，pp. 119-124 (2001).
- [23] Ogata, H. and Amano, K.: An aerofoil study by the charge simulation method, 第6回環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム講演予稿集，pp. 29-34 (2002).
- [24] Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Numerical conformal mapping of periodic structure domains, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 19, No. 2, pp.257-275 (2002).
- [25] Ogata, H., Okano, D. and Amano, K.: Computations of the forces on obstacles in two-dimensional potential flows by the charge simulation method, Information, Vol. 5, No. 3, pp. 307-318 (2002).
- [26] Ogata, H. and Kiyosawa, Y.: Numerical conformal mapping of bounded simply-connected domains with corner-type singularities by the charge simulation method, 応用数学合同研究集会報告集，pp. 135-140 (2002).
- [27] Ogata, H., Okano, D., Sugihara, M. and Amano, K.: Unique solvability of the linear system appearing in the invariant scheme of the charge simulation method, Japan J. Indust. Appl. Math., Vol. 20, No. 1, pp. 17-32 (2003).
- [28] Ogata, H., Amano, K., Sugihara, M. and Okano, D.: A fundamental solution method for viscous flow problems with obstacles in a periodic array, J. Comput. Appl. Math., Vol. 152, No. 1-2, pp. 411-425 (2003, to appear).
- [29] 岡本 久，桂田祐史：ポテンシャル問題の高速解法，応用数理，Vol. 2, No. 3, pp. 212-230 (1992).
- [30] 岡野 大，緒方秀教，天野 要，井上哲男：代用電荷法による実関数の近似，情報処理学会論文誌，Vol. 39, No. 12, pp. 3337-3340 (1998).

- [31] Okano, D., Ogata, H. and Amano, K.: Stagnation point analysis by the numerical conformal mapping using the charge simulation method, *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 50, pp. 303–309, Hokusensha, Tokyo (2001).
- [32] 岡野 大, 牧 直正, 緒方秀教, 天野 要: 代用電荷法による円弧スリット円環領域への数値等角写像の方法, *情報処理学会論文誌*, Vol. 43, No. 5, pp. 1382–1389 (2002).
- [33] Okano, D., Terazono, M., Ogata, H. and Amano, K.: Numerical conformal mapping from domains with multiple slits onto the canonical slit domains by the charge simulation method, *Information*, Vol. 6, No. 1, pp. 107–118 (2003).
- [34] Okano, D., Ogata, H. and Amano, K.: A method of numerical conformal mapping of curved slit domains by the charge simulation method, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 152, No. 1-2, pp. 441–450 (2003, to appear).
- [35] Okano, D., Ogata, H., Amano, K. and Sugihara, M.: Numerical conformal mappings of bounded multiply-connected domains by the charge simulation method, *J. Comput. Appl. Math.* (to appear).
- [36] Reichel, L.: A fast method for solving certain integral equations of the first kind with application to conformal mapping, *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1-2, pp. 125–142 (1986).
- [37] 櫻井鉄也, 杉浦 洋: Padé近似を用いた数値等角写像の計算法, *情報処理学会論文誌*, Vol. 43, No. 9, pp. 2959–2962 (2002).
- [38] 関 正治, 天野 要: 代用電流法による二重連結領域の数値等角写像とトロイダル・プラズマ閉じ込め磁場の解析, *北海道情報大学紀要*, Vol. 13, No. 2, pp. 13–32 (2002).
- [39] Symm, G. T.: An integral equation method in conformal mapping, *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250–258 (1966).
- [40] Symm, G. T.: Numerical mapping of exterior domains, *Numer. Math.*, Vol. 10, pp. 437–445 (1967).
- [41] Symm, G. T.: Conformal mapping of doubly-connected domains, *Numer. Math.*, Vol. 13, pp. 448–457 (1969).
- [42] Trefethen, L. N. (ed.): *Numerical Conformal Mapping*, North-Holland, Amsterdam (1986); *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 14, No. 1-2 (1986).