

Volterra 型積分-微分方程式における Runge-Kutta 法について

静岡理科大学 鈴木 千里 (Chisato Suzuki)
Shizuoka Institute of Science and Technology

1 はじめに

Volterra 型積分微分方程式 (VIDE) の初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), z(x)), & y(x_0) = y_0 \\ z(x) = \int_{x_0}^x g(x, s, y(s)) ds, & (x \in X = [x_0, x_T]) \end{cases} \quad (1)$$

の生物学, 物理学, 工学への重要な応用も多く, その数値解法の研究も多い (例えば [1], [2]). ここで $y \in \mathbb{R}^{d_1}, z \in \mathbb{R}^{d_2}, f: X \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}, g: X \times X \times \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$ はいずれも VIDE が一意解をもつために必要な適当な条件を満たしているものとする. d_1, d_2 は正の整数なら任意であるが, 議論の簡便化のために $d_1=1, d_2=1$ する. これによって以下の議論において本質を損なうことはない.

VIDE に対する数値解法の手法は概ね 2 つのタイプに分類できる. 1 つは VIDE を Volterra 方程式に変換して Volterra 方程式として解く方法, もう 1 つは常微分方程式 (ODE) の数値解法を VIDE に適用する方法である. 本稿では後者のタイプに属する数値解法について言及する. 具体的には常微分方程式に対する RK (Runge-Kutta) 法の VIDE への素直な適用を試みる. このような RK 法による接近としては, これまでに Pouzet (1960) を初めとして Lubich (1982, [7]) や Vermiglio (1988, [8]) などの研究があり, いずれも ODE-RK 法の展開と同様な次数条件に基づく方法である. 特に, Lubich (1982, [7]) は ODE-RK 法の理論における partitioned 法を適用して, VIDE に対する RK 法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r \mu_i k_i, \\ k_i = f(x_n + c_i, y_n + h \sum_{j=1}^r a_{ij} k_j, z_i + B_n(c_i)), & (i=1, 2, \dots, r), \\ z_i = h \sum_{j=1}^r b_{ij} g(x_n + d_{ij}h, x_n + c_jh, y_n + h \sum_{j=1}^r a_{ij} k_j) \end{cases}$$

のパラメータ $\{\mu_i\}, \{a_{ij}\}, \{b_{ij}\}, \{c_i\}, \{d_{ij}\}$ に対して, 一般的な次数方程式を求めている. ここで $B_n(c_i)$ は

$$B(x_n + c_i h) = \int_{x_0}^{x_n} g(x_n + c_i h, s, y(s)) ds$$

の近似である. しかし残念ながら文献 [7] では, 2 段 2 次の公式と 3 段 3 次の公式を除いて, 近似 $B_n(c_i)$ は得られていることを前提としている. したがって算法の安定性はこの近似スキームに依存することから, 安定性に関して問題が残される.

本研究の狙いは, 豊富な研究成果がある ODE-RK 法を VIDE に活用する方策を見出すことにある. この試みを素直に実現する方法は (1) 式の中の $z(x)$ の値を必要な精度で得られるようにしておくことであろう. 具体的には, ODE-RK 法の適用に際して数値解 y_n から y_{n+1} の計算において, 既得の数値解 y_0, y_1, \dots, y_n を利用して必要に応じた精度で

$$z(x_n + ch) = A(x_n + ch) + B(x_n + ch), \quad \left(A(x) = \int_{x_n}^x g(x, s, y(s)) ds, B(x) = \int_{x_0}^{x_n} g(x, s, y(s)) ds \right) \quad (2)$$

の計算が可能になることである。

本研究では、 $A(x)$ の近似には $g(x_n + ch, s, y(s))$ を補間近似する線形多段法の予測子の手法を用い、 $B(x)$ の近似には Newton-Cotes 型端点補正台形公式を用いる (付録 A 参照)。このような $B(x)$ に対する近似の考え方は Volterra 方程式の数値解法において Gregory 法として見ることができる (例えば Baker [4])。

また本稿では、構成した VIDE に対する RK 法の安定性の解析を行うと共に精度的な検証を数値的に行う。この安定性解析は線形 VIDE

$$y'(x) = \alpha y(x) + \beta \int_{x_0}^x y(s) ds$$

に対して行われる。なお安定性の解析については、Baker 等の網羅的な研究 (1979, [3]) や Vermiglio (1988, [8]) がある。本稿では安定性に関する必要な基本概念は Vermiglio [8] に準拠する。

2 VIDE-Runge-Kutta 法の構成

2.1 基本アイデア

VIDE の初期値問題 (1) において $z(x)$ が既知であれば、VIDE の初期値問題 (1) は通常の ODE の初期値問題に退化する。したがって、この仮定のもとでは ODE の初期値問題 $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ に対する (r 段)RK 法 (以降、これを ODE-RK 法と称する)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r \mu_i k_i, \\ k_1 = f(x_n, y_n), \\ k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad (i=2, 3, \dots, r) \end{cases} \quad (3)$$

を VIDE 初期値問題 (1) に容易に適用することが可能であって

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r \mu_i k_i, \\ k_1 = f(x_n, y_n, z(x_n)), \\ k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, z(x_n + c_i h)), \quad (i=2, 3, \dots, r) \end{cases}$$

が得られる。そこで既知量である y_0, y_1, \dots, y_n を用いて $z(x_n + c_i h)$ を上手く近似する術を考える。この場合、 s 次の ODE-RK 法を適用して得られる VIDE に対する RK 法が s 次を保証するためには、 $z(x_n + c_i h)$ を $O(h^s)$ の精度で得られれば十分である。

2.2 算法の導出

本小節では、(2) 式において定義された $A(x)$, $B(x)$ に対する近似スキムを与える。これにより $z(x_n + c_i h)$ の近似スキムが構成され、結果として VIDE に対する RK 法が構築される。

2.2.1 $A(x_n + c_i h)$ の近似

積分項 $A(x_n + c_i h)$ の近似を得るために、まず、それまでに得られていると仮定できる y_{n-k} ($k=0, 1, \dots, p$) を用いて $g(x_n + c_i h, x_{n-k}, y_{n-k})$ ($k=0, 1, \dots, p$) を評価し、これらを補間データとする p 次 Lagrange 補間

多項式によって被積分関数 g を近似する. その後, 積分を施せば $A(x_n+c_i h)$ に対する近似

$$A_n(c_i) = h \sum_{k=0}^p a_k(c_i) g(x_n+c_i h, x_{n-k}, y_{n-k}), \quad \left(a_k(c) = \int_0^c \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^p \frac{j+s}{j-k} ds, \quad (0 \leq k \leq p) \right) \quad (4)$$

が得られる. この近似の精度は $A(x_n+c_i h) - A_n(c_i) = O(h^{p+2})$ である.

2.2.2 $B(x_n+c_i h)$ の近似

$B(x_n+c_i h)$ に対する近似は $(y_n, y_{n-1}, \dots, y_0)$ を用いることによって Newton-Cotes 型端点補正台形公式

$$B_n(c_i) = h \sum_{k=0}^n w_k^m g(x_n+c_i h, x_k, y_k) \quad (5)$$

によって得られる (付録 A 参照). この積分公式の重み係数 $\{w_k^m\}$ はつぎのような都合の良い性質がある.

- (i) 両端の $m+1$ 個の w_k^m, w_{n-k}^m ($k=0, 1, \dots, m$) は積分区間の分割数 n に依存しない.
- (ii) $k=0, 1, \dots, m$ に対して $w_k^m = w_{n-k}^m$, また $k=m+1, m+2, \dots, n-m-1$ に対して $w_k^m = 1$.
- (iii) n が大きくなると台形公式と同程度に数値的に安定である.

特に m が偶数のとき, この近似の精度は $B(x_n+c_i h) - B_n(c_i) = O(h^{m+2})$ である.

2.2.3 VIDE-RK 公式

上述の 2 つの近似を用いて $z(x_n+c_i h)$ を近似するれば, VIDE (1) への ODE-RK 法の適用はつぎを導く.

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^r \mu_i k_i, \\ k_1 = f(x_n, y_n, z_n(c_1)), \\ k_i = f(x_n+c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j, z_n(c_i)), \\ z_n(c_i) = A_n(c_i) + B_n(c_i), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n(c_i) = h \sum_{k=0}^p a_k(c_i) g(x_n+c_i h, x_{n-k}, y_{n-k}), \\ B_n(c_i) = h \sum_{k=0}^n w_k^m g(x_n+c_i h, x_k, y_k) \end{array} \right. \quad (6)$$

この算法を (r 段 ODE-RK 法 (3) に随伴する) r 段 VIDE-RK 法と呼ぶことにする. なお, 精度に関しては次の定理が成立する.

定理 1 ODE-RK 法 (3) が $s (> 1)$ 次のとき, $\min(p, m) \geq s - 2$ ならば, 随伴する VIDE-RK 法 (6) の次数も s 次である. ■

2.3 具体例

具体例として, ODE の Euler 法, Heun 法, Ralston 法, 古典的 Runge-Kutta 法から導かれる VIDE-RK 法を以下に示す.

1 段 1 次 VIDE-RK 法: (Euler 法, $p=0, m=0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h k_1, \quad k_1 = f(x_n, y_n, z_n(0)), \\ z_n(0) = A_n(0) + B_n(0), \quad A_n(0) = 0, \quad B_n(0) = T_n(g; 0) \end{array} \right.$$

2 段 2 次 VIDE-RK 法: (Heun 法, $p=1, m=0$)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2), \\ k_1 = f(x_n, y_n, z_n(0)), \quad z_n(0) = A_n(0) + B_n(0), \\ k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1, z_n(1)), \quad z_n(1) = A_n(1) + B_n(1), \\ A_n(0) = 0, \quad A_n(1) = \frac{h}{2}(3g(x_n + h, x_n, y_n) - g(x_n + h, x_{n-1}, y_{n-1})), \\ B_n(0) = T_n(g; 0), \quad B_n(1) = T_n(g; 1) \end{array} \right.$$

3 段 3 次 VIDE-RK 法: (Ralston 法, $p=2, m=2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{9}(2k_1 + 3k_2 + 4k_3), \\ k_1 = f(x_n, y_n, z_n(0)), \quad z_n(0) = A_n(0) + B_n(0), \quad A_n(0) = 0 \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1, z_n(\frac{1}{2})), \quad z_n(\frac{1}{2}) = A_n(\frac{1}{2}) + B_n(\frac{1}{2}), \\ k_3 = f(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}hk_2, z_n(\frac{3}{4})), \quad z_n(\frac{3}{4}) = A_n(\frac{3}{4}) + B_n(\frac{3}{4}), \\ A_n(\frac{1}{2}) = \frac{h}{24}(17g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 7g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 2g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2})) \\ A_n(\frac{3}{4}) = \frac{h}{128}(159g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 90g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 27g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2})) \\ B_n(c) = h(\mu_0^2 g(x_n + ch, x_0, y_0) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_1, y_1) + \mu_2^2 g(x_n + ch, x_2, y_2)) + T_n(g; c) \\ \quad + h(\mu_2^2 g(x_n + ch, x_{n-2}, y_{n-2}) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_{n-1}, y_{n-1}) + \mu_0^2 g(x_n + ch, x_n, y_n)) \end{array} \right.$$

4 段 4 次 VIDE-RK 法: (古典的 RK 法, $p=2, m=2$)

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = f(x_n, y_n, z_n(0)), \quad z_n(0) = A_n(0) + B_n(0), \quad A_n(0) = 0 \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1, z_n(\frac{1}{2})), \quad z_n(\frac{1}{2}) = A_n(\frac{1}{2}) + B_n(\frac{1}{2}), \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2, z_n(\frac{1}{2})), \quad z_n(\frac{1}{2}) = A_n(\frac{1}{2}) + B_n(\frac{1}{2}), \\ k_4 = f(x_n + ch, y_n + \frac{1}{2}hk_3, z_n(1)), \quad z_n(1) = A_n(1) + B_n(1), \\ A_n(\frac{1}{2}) = \frac{h}{24}(17g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 7g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 2g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2})) \\ A_n(1) = \frac{h}{24}(46g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 32g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 10g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2})) \\ B_n(c) = h(\mu_0^2 g(x_n + ch, x_0, y_0) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_1, y_1) + \mu_2^2 g(x_n + ch, x_2, y_2)) + T_n(g; c) \\ \quad + h(\mu_2^2 g(x_n + ch, x_{n-2}, y_{n-2}) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_{n-1}, y_{n-1}) + \mu_0^2 g(x_n + ch, x_n, y_n)) \end{array} \right.$$

ここで, $T_n(g; c) = \frac{h}{2}g(x_n + ch, x_0, y_0) + h \sum_{k=1}^{n-1} g(x_n + ch, x_k, y_k) + \frac{h}{2}g(x_n + ch, x_n, y_n)$.

更に異なる p, m を選ぶことによって, 1 つの ODE-RK 法から多くの異なる公式を得ることができる. 例えば, p, m の対 $(p; m)$ として $(1, 2), (3, 2), (1, 4), (2, 4), (3, 4)$ などを取ることによって, 古典的 Runge-Kutta 法から更に次のような 5 つの 4 段 VIDE-RK 法の公式群が得られる. (上述の 4 段 4 次 VIDE-RK 法 ($p=2, m=2$) と異なる個所は 2 重中括弧における内側の中括弧の所だけであることから, 以下ではその部分だけを表記する.), これらを (p, m) -4 段 VIDE-RK 法と称することにする.

(1,2)-4 段 3 次 VIDE-RK 法:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}h(5g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1})) \\ A_n(1) = \frac{h}{2}(3g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1})) \\ B_n(c) = h(\mu_0^2 g(x_n + ch, x_0, y_0) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_1, y_1) + \mu_2^2 g(x_n + ch, x_2, y_2)) + T_n(g; c) \\ \quad + h(\mu_2^2 g(x_n + ch, x_{n-2}, y_{n-2}) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_{n-1}, y_{n-1}) + \mu_0^2 g(x_n + ch, x_n, y_n)) \end{array} \right.$$

(3,2)-4 段 4 次 VIDE-RK 法:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(\frac{1}{2}) = \frac{h}{384} \left(198g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 187g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 107g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2}) \right. \\ \quad \left. - 25g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-3}, y_{n-3}) \right) \\ A_n(1) = \frac{h}{24} \left(55g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 59g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 37g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2}) \right. \\ \quad \left. - 12g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-3}, y_{n-3}) \right) \\ B_n(c) = h \left(\mu_0^2 g(x_n + ch, x_0, y_0) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_1, y_1) + \mu_2^2 g(x_n + ch, x_2, y_2) \right) + T_n(g; c) \\ \quad + h \left(\mu_2^2 g(x_n + ch, x_{n-2}, y_{n-2}) + \mu_1^2 g(x_n + ch, x_{n-1}, y_{n-1}) + \mu_0^2 g(x_n + ch, x_n, y_n) \right) \end{array} \right.$$

(1,4)-4 段 3 次 VIDE-RK 法 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(\frac{1}{2}) = \frac{h}{8} \left(5g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) \right) \\ A_n(1) = \frac{h}{2} \left(3g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) \right) \\ B_n(c) = h \left(\mu_0^4 g(x_n + ch, x_0, y_0) + \mu_1^4 g(x_n + ch, x_1, y_1) + \mu_2^4 g(x_n + ch, x_2, y_2) + \mu_3^4 g(x_n + ch, x_3, y_3) \right. \\ \quad \left. + \mu_4^4 g(x_n + ch, x_4, y_4) \right) + T_n(g; c) + h \left(\mu_4^4 g(x_n + ch, x_{n-4}, y_{n-4}) + \mu_3^4 g(x_n + ch, x_{n-3}, y_{n-3}) \right. \\ \quad \left. + \mu_2^4 g(x_n + ch, x_{n-2}, y_{n-2}) + \mu_1^4 g(x_n + ch, x_{n-1}, y_{n-1}) + \mu_0^4 g(x_n + ch, x_n, y_n) \right) \end{array} \right.$$

(2,4)-4 段 4 次 VIDE-RK 法 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(\frac{1}{2}) = \frac{h}{24} \left(17g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 7g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 2g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2}) \right) \\ A_n(1) = \frac{h}{24} \left(46g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 32g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 10g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2}) \right) \\ B_n(c) = h \left(\mu_0^4 g(x_n + ch, x_0, y_0) + \mu_1^4 g(x_n + ch, x_1, y_1) + \mu_2^4 g(x_n + ch, x_2, y_2) + \mu_3^4 g(x_n + ch, x_3, y_3) \right. \\ \quad \left. + \mu_4^4 g(x_n + ch, x_4, y_4) \right) + T_n(g; c) + h \left(\mu_4^4 g(x_n + ch, x_{n-4}, y_{n-4}) + \mu_3^4 g(x_n + ch, x_{n-3}, y_{n-3}) \right. \\ \quad \left. + \mu_2^4 g(x_n + ch, x_{n-2}, y_{n-2}) + \mu_1^4 g(x_n + ch, x_{n-1}, y_{n-1}) + \mu_0^4 g(x_n + ch, x_n, y_n) \right) \end{array} \right.$$

(3,4)-4 段 4 次 VIDE-RK 法 :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_n(\frac{1}{2}) = \frac{h}{384} \left(198g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 187g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 107g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2}) \right. \\ \quad \left. - 25g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-3}, y_{n-3}) \right) \\ A_n(1) = \frac{h}{24} \left(55g(x_n + \frac{1}{2}h, x_n, y_n) - 59g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-1}, y_{n-1}) + 37g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-2}, y_{n-2}) \right. \\ \quad \left. - 12g(x_n + \frac{1}{2}h, x_{n-3}, y_{n-3}) \right) \\ B_n(c) = h \left(\mu_0^4 g(x_n + ch, x_0, y_0) + \mu_1^4 g(x_n + ch, x_1, y_1) + \mu_2^4 g(x_n + ch, x_2, y_2) + \mu_3^4 g(x_n + ch, x_3, y_3) \right. \\ \quad \left. + \mu_4^4 g(x_n + ch, x_4, y_4) \right) + T_n(g; c) + h \left(\mu_4^4 g(x_n + ch, x_{n-4}, y_{n-4}) + \mu_3^4 g(x_n + ch, x_{n-3}, y_{n-3}) \right. \\ \quad \left. + \mu_2^4 g(x_n + ch, x_{n-2}, y_{n-2}) + \mu_1^4 g(x_n + ch, x_{n-1}, y_{n-1}) + \mu_0^4 g(x_n + ch, x_n, y_n) \right) \end{array} \right.$$

ここで $B_n(c)$ に現れる係数 μ_i^m の値は付録 A を用いて計算すれば次の表のようになる。

m	μ_0^m	μ_1^m	μ_2^m	μ_3^m	μ_4^m
2	-1/8	1/6	-1/24	—	—
4	-49/288	77/240	-7/30	73/720	-3/160

3 安定性解析

安定性解析は線形 Volterra 積分微分方程式 (略して LVIDE)

$$y'(x) = \lambda y(x) - \mu \int_{x_0}^x y(s) ds, \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}) \quad (7)$$

に対する VIDE-RK 法 (6) の安定性解析を行う。

3.1 特性多項式

VIDE-RK 法 (6) を LVIDE (7) に適用すれば、直ちに $n+1$ 階の線形差分方程式

$$y_{n+1} = S(\delta)y_n - \eta \sum_{j=0}^n \alpha_j^n y_{n-j}, \quad (\delta = \lambda h, \eta = \mu h^2)$$

ここで $S(\lambda h) = 1 + \lambda h \Gamma$ は ODE-RK 法の安定関数であり、 α_j^n は

$$\alpha_j^n = \begin{cases} \sum_{k=1}^r \Gamma_k a_j(c_k) + \Gamma w_{n-j}^m, & (0 \leq j \leq p), \\ \Gamma w_{n-j}^m, & (p < j \leq n), \end{cases}$$

$$\Gamma = \sum_{k=1}^r \Gamma_k, \quad \Gamma_k = \begin{cases} \mu_k + \lambda h \mu_{k+1} a_{k+1,k} + \sum_{j=1}^{r-k} (\lambda h)^j \Gamma_{jk}, & (1 \leq k \leq r-1) \\ \mu_r, & (k=r) \end{cases}$$

$$\Gamma_{jk} = \sum_{p_j=k+2}^r \mu_{p_j} \left(\sum_{p_{j-1}=k+2}^{p_j-1} \sum_{p_{j-2}=k+2}^{p_{j-1}-1} \cdots \sum_{p_2=k+2}^{p_3-1} \left(\sum_{p_1=k+1}^{p_2-1} \left(\prod_{i=1}^{j-1} a_{p_{i+1}, p_i} \right) a_{p_1, k} \right) \right),$$

によって与えられる。LVIDE に対する VIDE-RK 法の安定解析を行うには、この高階差分方程式を直接扱うことは必ずしも得策でない。そこで n を 1 つ進めた y_{n+2} と y_{n+1} との差を取るによって得られる次の $q+2$ ($q = \max(p, m)$) 階線形差分方程式を考える。

$$y_{n+2} = (1 + S(\delta))y_{n+1} - S(\delta)y_n - \eta \sum_{j=0}^{q+1} \beta_j y_{n-j+1} \quad (8)$$

ここで

$$\beta_j = \begin{cases} \sum_{k=1}^r \Gamma_k a_0(c_k) + \Gamma w_0^m, & (j=0) \\ \sum_{k=1}^r \Gamma_k (a_j(c_k) - a_{j-1}(c_k)) + \Gamma (w_j^m - w_{j-1}^m), & (1 \leq j \leq p) \\ -a_p(c_k) + \Gamma (w_{p+1}^m - w_p^m), & (j=p+1) \\ \Gamma (w_j^m - w_{j-1}^m), & (p+1 < j \leq m) \\ \Gamma (1 - w_m^m), & (j=m+1) \end{cases}$$

この線形差分方程式の特性多項式はつぎの通りである。

$$\rho(z) = (z-1)(z - S(\delta))z^q + \eta \psi(z), \quad \left(\psi(z) = \sum_{j=0}^{q+1} \beta_j z^{q-j+1} \right) \quad (9)$$

なお、上で定義された ψ は VIDE に固有なものであり、この ψ を VIDE-RK 法の特性関数と呼ぶ。

3.2 安定性定理

最初に議論に必要な幾つかの概念の導入を図り、安定性について議論する。

定義 1 (漸近安定領域) LVIDE (7) の解が漸近的安定であるような $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$ の対の全体 $S = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}\}$ を方程式の漸近安定領域という。■

命題 1 LVIDE (7) の漸近安定領域は $S = \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : \Re \lambda < 0, \mu > 0\}$ である。[8] ■

定義 2 (絶対安定領域) 任意の初期値の LVIDE (7) において, 刻み幅 h の VIDE-RK 法の数値解 y_n が $y_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) を満たすような係数 λ と μ に関する対 $(h\lambda, h^2\mu) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ の全体をその VIDE-RK 法の絶対安定領域という. ■

定理 2 (安定特性) S_{ODE} を ODE-RK 法の絶対安定領域とすると, その方法に随伴する VIDE-RK 法の特異関数 ψ が $\psi(1) \neq 0$ を満たすなら, ある $\eta_0 > 0$ が存在して, 直積部分集合 $S_{ODE} \times (0, \eta_0) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ は VIDE-RK 法の絶対安定領域に含まれる. ■

証明 $(\delta, \eta) \in S_{ODE} \times (0, \eta_0)$ のとき, $z \in U^c = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\} \Rightarrow \rho(z) \neq 0$ を示す. まず仮定により $\rho(1) = \eta\psi(1) \neq 0$ であることと, ρ の連続性により, 或る ε -開近傍 $V_\varepsilon(1) = \{z \in \mathbb{C} : |1-z| < \varepsilon\}$ があって $z \in V_\varepsilon(1) \Rightarrow \rho(z) \neq 0$ が成立する. したがって, 後は $z \in U^c \setminus V_\varepsilon(1)$ に対して $\rho(z) \neq 0$ を示せば良い. そこで, $U_V = \{w = z^{-1} \in \mathbb{C} : z \in U^c \setminus V_\varepsilon(1)\}$, $\hat{\rho}(w) = w^{q+2}\rho(w^{-1})$ とし, $w \in U_V$ に対して $\hat{\rho}(w) \neq 0$ を示す.

いま $\hat{\psi}(w) = w^{q+1}\psi(w^{-1})$ とすれば, $\hat{\rho}(w)$ は $\hat{\rho}(w) = (1-w)(1-S(\delta)w) + \eta w \hat{\psi}(w)$ と表せ, 評価

$$|\hat{\rho}(w)| \geq |(1-w)(1-S(\delta)w)| - \eta |w \hat{\psi}(w)| \geq |(1-w)(1-S(\delta)w)| - \eta |\hat{\psi}(w)|$$

が容易に得れる. このとき U_V はコンパクト集合であり, また仮定により $|S(\delta)| < 1$ であることから, 任意の $w \in U_V$ に対して $|(1-w)(1-S(\delta)w)| \geq \gamma$, ($w \in U_V$) が成り立つような定数 $\gamma > 0$ が存在し, 評価

$$|\hat{\rho}(w)| \geq \gamma - \eta |\hat{\psi}(w)| \geq \gamma - \eta \max_{w \in U_V} |\hat{\psi}(w)|$$

が得られる. このとき $\chi = \max_{w \in U_V} |\hat{\psi}(w)|$ とし, $\eta_0 = \gamma/\chi$ とすれば, 任意の $w \in U_V$ に対して

$$|\hat{\rho}(w)| \geq \gamma - \eta \chi > \gamma - \eta_0 \chi = 0, \quad (\eta \in (0, \eta_0))$$

が成立する. ■

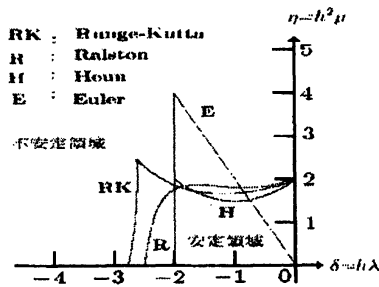


図 1: 各種 VIDE Runge-Kutta 法の絶対安定領域

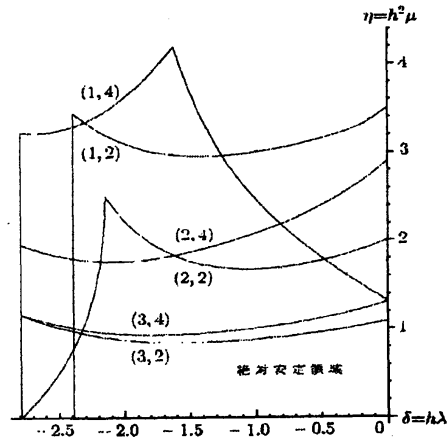


図 2: (p, m) -4 段 VIDE-RK 法の絶対安定領域

3.3 特性多項式の具体例

具体的な幾つかの VIDE-RK 法に対する特性関数 $\psi(z)$ とそれらの絶対安定領域が示される.

1 段 1 次 VIDE-RK 法: (Euler 法, $p=0, m=0$): $\psi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$

2 段 2 次 VIDE-RK 法: (Heun 法, $p=1, m=0$): $\psi(z) = \frac{1}{2}(5+\delta)z^2 - \frac{1}{4}(2-\delta)z + \frac{1}{4}$

2 段 2 次 VIDE-RK 法 (Heun 法, $p=2, m=2$): $\psi(z) = \frac{64+9\delta}{48}z^3 - \frac{40-19\delta}{48}z^2 + \frac{32-5\delta}{48}z - \frac{8-\delta}{48}$

3 段 3 次 VIDE-RK 法 (Ralston 法, $p=2, m=2$): $\psi(z) = \beta_0 z^3 - \beta_1 z^2 + \beta_2 z - \beta_3$

$$\beta_0 = \frac{1}{288}(335+122\delta+18\delta^2), \beta_1 = \frac{1}{288}(117-18\delta-38\delta^2), \beta_2 = \frac{1}{288}(93+6\delta-10\delta^2), \beta_3 = \frac{1}{288}(23+2\delta-2\delta^2)$$

4 段 4 次 VIDE-RK 法 (古典的 RK 法, $p=2, m=2$): $\psi(z) = \beta_0 z^3 - \beta_1 z^2 + \beta_2 z - \beta_3$

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{576}(672+244\delta+70\delta^2+9\delta^3), & \beta_1 = \frac{1}{576}(240-36\delta-28\delta^2+19\delta^3) \\ \beta_2 = \frac{1}{576}(192+12\delta-2\delta^2-5\delta^3), & \beta_3 = \frac{1}{576}((4-\delta)(12+4\delta+\delta^2)) \end{cases}$$

図 1 には $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に射影された 1 段 1 次 VIDE-RK 法 (Euler 法, $p=\phi, m=0$), 2 段 2 次 VIDE-RK 法 (Heun 法, $p=2, m=2$), 3 段 3 次 VIDE-RK 法 (Ralston 法, $p=2, m=2$), 4 段 4 次 VIDE-RK 法 (古典的 RK 法, $p=2, m=2$) の絶対安定領域が示されている。

p, m をパラメータとして古典的 RK 法から構成される幾つかの (p, m) -4 段 VIDE-RK 公式に対する特性多項式を下記に示し, $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に射影したそれらの絶対安定領域を図 2 に示す。

(1,2)-4 段 VIDE-RK 法の特性多項式: $\psi(z) = \beta_0 z^3 + \beta_1 z^2 - \beta_2 z + \beta_3$

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{192}(3\delta^3 + 22\delta^2 + 76\delta + 200), & \beta_1 = \frac{1}{576}(19\delta^3 + 40\delta^2 + 84\delta - 24), \\ \beta_2 = \frac{1}{576}(5\delta^3 + 14\delta^2 + 36\delta + 24), & \beta_3 = \frac{1}{576}(\delta^3 + 4\delta^2 + 12\delta + 24). \end{cases}$$

(3,2)-4 段 VIDE-RK 法の特性多項式: $\psi(z) = \beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 - \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4$

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{4608}(72\delta^3 + 585\delta^2 + 2052\delta + 5864), & \beta_1 = \frac{1}{1152}(38\delta^3 + 31\delta^2 - 28\delta - 968), \\ \beta_2 = \frac{1}{2304}(20\delta^3 - 67\delta^2 - 348\delta - 2232), & \beta_3 = \frac{1}{1152}(2\delta^3 - 25\delta^2 - 108\delta - 584), \\ \beta_4 = \frac{1}{4608}(25\delta^2 + 100\delta + 488). \end{cases}$$

(1,4)-4 段 VIDE-RK 法の特性多項式: $\psi(z) = \beta_0 z^5 + \beta_1 z^4 - \beta_2 z^3 + \beta_3 z^2 + \beta_4 z + \beta_5$

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{6912}(95\delta^3 + 740\delta^2 + 2580\delta + 6888), & \beta_1 = \frac{1}{34560}(1427\delta^3 + 3548\delta^2 + 8484\delta + 5448), \\ \beta_2 = \frac{1}{5760}(133\delta^3 + 472\delta^2 + 1356\delta + 2232), & \beta_3 = \frac{1}{3456}(19\delta^3 + 76\delta^2 + 228\delta + 456), \\ \beta_4 = \frac{1}{34560}(119\delta^3 + 476\delta^2 + 1428\delta + 2856), & \beta_5 = \frac{1}{1280}(\delta^3 + 4\delta^2 + 12\delta + 24). \end{cases}$$

(2,4)-4 段 VIDE-RK 法の特性多項式: $\psi(z) = \beta_0 z^5 + \beta_1 z^4 - \beta_2 z^3 + \beta_3 z^2 + \beta_4 z + \beta_5$

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{6912}(95\delta^3 + 788\delta^2 + 2772\delta + 7752), & \beta_1 = \frac{1}{34560}(1427\delta^3 + 2828\delta^2 + 5604\delta - 7512), \\ \beta_2 = \frac{1}{5760}(133\delta^3 + 352\delta^2 + 876\delta + 72), & \beta_3 = \frac{1}{3456}(19\delta^3 + 52\delta^2 + 132\delta + 24), \\ \beta_4 = \frac{1}{34560}(119\delta^3 + 476\delta^2 + 1428\delta + 2856), & \beta_5 = \frac{1}{1280}(\delta^3 + 4\delta^2 + 12\delta + 24). \end{cases}$$

(3,4)-4 段 VIDE-RK 法の特性多項式: $\psi(z) = \beta_0 z^5 + \beta_1 z^4 - \beta_2 z^3 + \beta_3 z^2 + \beta_4 z + \beta_5$

$$\begin{cases} \beta_0 = \frac{1}{13824}(190\delta^3 + 1651\delta^2 + 5844\delta + 16968), & \beta_1 = \frac{1}{34560}(1427\delta^3 + 2078\delta^2 + 2604\delta - 22152), \\ \beta_2 = \frac{1}{11520}(266\delta^3 + 329\delta^2 + 252\delta - 7176), & \beta_3 = \frac{1}{3456}(19\delta^3 - 23\delta^2 - 168\delta - 1440), \\ \beta_4 = \frac{1}{69120}(238\delta^3 + 1327\delta^2 + 4356\delta + 13032), & \beta_5 = \frac{1}{1280}(\delta^3 + 4\delta^2 + 12\delta + 24). \end{cases}$$

4 数値例

ここでは先に具体例として幾つか示した VIDE-RK 法を具体的な VIDE の問題に適用して, 数値的観点から, それらの方法の精度について検討する。

数値例 1 次数のチェックを目的として、つぎの方程式に古典的 Runge-Kutta 法, Ralston 法, Heun 法 ($r=2, p=1, m=0$), Euler 法を適用する.

$$y'(x) = -x + (\lambda(x^2-1) + x)y(x) + \lambda^2 \int_0^x xsy(s) ds, \quad y(0) = 1, \quad (\lambda = 1)$$

この方程式の厳密解は $y = \exp(-\lambda x)$ である. この方程式に対し $x=2$ における適用結果と真値 $y(2)=0.13533\dots$ との比較をつぎの表に与える. 表中の ratio は積分刻み幅 h で計算した $x_N=2$ での数値解 y_N の絶対誤差と積分刻み幅 $h/2$ で計算した $x_{2N}=2$ での数値解 y_{2N} の絶対誤差の比であり,

$$\text{ratio} = \frac{|y(2) - y_N|}{|y(2) - y_{2N}|}$$

と定義されたものである. 表中の ratio の値を見ると, Euler 法を除いて順調にそれぞれの次数が確保されていることが分かる. 一方, Euler 法は必ずしも有効でないことが分かる. しかし Euler 法でも $x = 1$ 位までの区間なら ratio=2 が保障される. なお, 下表の中には比較のために Lubich の 2 段 2 次 VIDE-RK 法を適用した結果が記載されている.

	4 段 4 次 VD-RK	3 段 3 次 Ralston	2 段 2 次 Heun	1 段 1 次 Euler	2 段 2 次 Lubich
刻み幅 h	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)
1/32	7.70E-05 (16.8)	1.21E-04 (—)	6.82E-02 (—)	5.20E-01 (—)	2.12E-02 (4.11)
1/64	4.71E-06 (16.4)	1.25E-05 (9.65)	4.57E-03 (4.25)	3.20E-01 (1.63)	5.00E-03 (4.23)
1/128	2.91E-07 (16.2)	1.49E-06 (8.41)	2.89E-03 (4.19)	1.79E-01 (1.78)	1.20E-03 (4.17)
1/256	1.81E-08 (16.1)	1.84E-07 (8.06)	1.81E-04 (4.11)	9.54E-02 (1.88)	2.97E-04 (4.10)
1/512	1.13E-09 (16.0)	2.30E-08 (8.00)	1.13E-05 (4.06)	4.92E-02 (1.84)	7.22E-05 (4.05)
1/1024	7.05E-11 (16.0)	2.88E-09 (8.00)	7.05E-05 (4.03)	2.50E-02 (1.97)	1.79E-05 (4.03)

下表には (2) 式で定義された $B(x)$ の近似に用いられる補間多項式の次数 p と, 同じく $A(x)$ の近似の指標である m をパラメータに取って得られる 4 段 VIDE-RK 法による数値結果が示される.

	$p=1, m=2$	$p=3, m=2$	$p=1, m=4$	$p=2, m=4$	$p=3, m=4$
刻み幅 h	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)
1/32	5.29E-04(8.68)	1.80E-05(7.29)	6.60E-03(15.3)	6.00E-03(16.0)	6.06E-03(16.0)
1/64	6.38E-05(8.30)	1.39E-06(12.9)	4.28E-04(15.4)	3.60E-04(16.7)	3.63E-04(16.7)
1/128	7.84E-06(8.13)	9.50E-08(14.7)	3.00E-05(14.3)	2.18E-05(16.5)	2.20E-05(16.5)
1/256	9.72E-07(8.06)	6.18E-09(15.4)	2.33E-06(12.9)	1.34E-06(16.3)	1.35E-06(16.3)
1/512	1.21E-07(8.03)	3.94E-10(15.7)	2.05E-07(11.4)	8.31E-08(16.1)	8.78E-08(16.1)
1/1024	1.51E-08(8.02)	2.48E-11(15.9)	2.03E-08(10.1)	5.17E-12(16.1)	5.21E-09(16.1)

数値例 2 つぎの方程式は Chang[6] が 2 次の数値解を補外によって高精度化を図る解法の検証例に用いてものである.

$$y'(x) = 1 + \sin(x) - y(x) + \int_0^x \sin(x-s)y(s)ds, \quad y(0) = 0$$

この方程式に数値例 1 で用いた同じ解法を Chang とほぼ同一の実行条件で適用する. なお厳密解は $y=x$ である. この方程式に対して $x=1$ における適用結果と真値との比較をつぎの表に与える. 表中の Heun 法の所のカッコ内には Chang の補外前の結果を, Ralston 法の所のカッコ内には Chang の補外後の結果を示してある. この比較からは補外よりも 3 次 Ralston 法を直接適用する方が幾分良い結果が得られていることが分かる. 全般的な傾向としては奇数次の解法が本来の性能以上の精度を示していることを指摘しておく.

	4 段 4 次 VD-RK	3 段 3 次 Ralston	2 段 2 次 Heun	1 段 1 次 Euler
刻み幅 h	絶対誤差	絶対誤差 (Chang 補外後)	絶対誤差 (Chang 補外前)	絶対誤差
0.1	1.17E-06	1.13E-06 (—)	2.83E-04 (5.93E-04)	5.64E-04
0.05	4.18E-08	4.54E-08 (4.78E-07)	1.08E-04 (1.49E-04)	1.45E-04
0.025	9.48E-10	1.44E-09 (2.97E-08)	3.21E-05 (3.72E-05)	3.67E-05

下表には $B(x)$ の近似に用いられる補間多項式の次数 p と $A(x)$ の近似の指標である m をパラメータに取って得られる 4 段 VIDE-RK 法による数値結果が示される。

h	$p=1, m=2$	$p=2, m=2$	$p=3, m=2$	$p=1, m=4$	$p=2, m=4$	$p=3, m=4$
刻み幅	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)
1/32	5.15E-06(8.1)	4.27E-09(43)	2.36E-08(8.18)	3.58E-06(4.5)	1.57E-06(16.6)	1.55E-06(16.8)
1/64	6.36E-07(8.1)	4.73E-11(90)	1.84E-09(12.8)	5.40E-07(6.6)	9.63E-08(16.3)	9.46E-08(16.4)
1/128	7.91E-08(8.0)	3.75E-12(13)	1.26E-10(14.6)	7.31E-08(7.4)	5.98E-09(16.1)	5.85E-09(16.2)
1/256	9.86E-09(8.0)	4.42E-13(8.5)	8.22E-12(15.3)	9.49E-09(7.7)	3.73E-10(16.0)	3.64E-10(16.1)
1/512	1.23E-09(8.0)	3.41E-14(13)	5.25E-13(15.7)	1.21E-09(7.8)	2.33E-11(16.0)	2.27E-11(16.0)
1/1024	1.54E-10(8.0)	0.00E-00(∞)	2.95E-14(17.8)	1.52E-10(8.0)	1.45E-12(16.1)	1.42E-12(16.0)

数値例 3 つぎは Feldstein 等 [5] からの下記の非線形 VIDE への適用を試みる。

$$y'(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2} \exp(x^2) + \int_0^x xs \exp(y(s)) ds, \quad y(0) = 0$$

この方程式の厳密解は $y=x^2$ である。この方程式に対して $x=2$ における適用結果と真値との比較をつぎの表に与える。なお、下記の表の中には比較のために Lubich の 2 段 2 次 VIDE RK 法を適用した結果が記載されている。

	4 段 4 次 VD-RK	3 段 3 次 Ralston	2 段 2 次 Heun	1 段 1 次 Euler	2 段 2 次 Lubich
刻み幅 h	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)
1/32	2.74E-02 (-)	2.53E-02 (-)	1.72E-01 (-)	5.20E-01 (-)	9.58E-01 (2.77)
1/64	2.06E-03 (13.3)	2.01E-03 (13.2)	8.87E-02 (1.94)	2.23E-00 (1.30)	2.80E-01 (3.42)
1/128	1.39E-04 (14.8)	1.30E-04 (14.8)	2.78E-02 (3.19)	1.52E-00 (1.46)	7.32E-02 (3.82)
1/256	9.04E-06 (15.4)	8.41E-06 (15.4)	7.68E-03 (3.62)	9.40E-01 (1.62)	1.85E-02 (3.96)
1/512	5.75E-07 (15.7)	5.36E-07 (15.7)	2.02E-03 (3.81)	5.36E-01 (1.75)	4.63E-03 (3.99)
1/1024	3.63E-08 (15.9)	3.38E-08 (15.8)	5.17E-04 (3.90)	2.89E-01 (1.85)	1.16E-03 (4.00)

下表には $B(x)$ の近似に用いられる補間多項式の次数 p と $A(x)$ の近似の指標である m をパラメータに取って得られる 4 段 VIDE-RK 法による数値結果が示される。

	$p=1, m=2$	$p=3, m=2$	$p=1, m=4$	$p=2, m=4$	$p=3, m=4$
刻み幅 h	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)	絶対誤差 (ratio)
1/32	1.57E-01(4.91)	3.20E-05(2087)	1.41E-01(4.06)	1.15E-02(3.59)	1.63E-02(11.2)
1/64	2.36E-02(6.65)	3.04E-04(0.11)	2.27E-02(6.21)	1.13E-03(10.2)	1.24E-03(13.1)
1/128	3.16E-03(7.47)	3.22E-05(9.44)	3.11E-03(7.30)	8.50E-05(13.3)	8.66E-05(14.3)
1/256	4.08E-04(7.75)	2.50E-06(12.9)	4.05E-04(7.68)	5.78E-06(14.7)	5.75E-06(15.1)
1/512	5.17E-05(7.89)	1.72E-07(14.5)	5.15E-05(7.86)	3.76E-07(15.4)	3.71E-07(15.5)
1/1024	6.51E-06(7.94)	1.13E-08(15.2)	6.50E-06(7.92)	2.40E-08(15.7)	2.36E-08(15.7)

最後に、上述の (p, m) -4 段 VIDE-RK 法の数値結果は本学情報システム学科 4 年生水谷剛君の卒業論文の一部分から引用した。ここに水谷剛君に感謝する。

5. 参考文献

- [1] J. A. Jerri: Introduction to integral equations and applications, Second Edition, John Wiley & Sons, INC, 1999.
- [2] C. T. H. Baker: The numerical treatment of integral equations, Clarendon, Oxford, 1977.
- [3] C. T. H. Baker, A. Makroglou, E. Short: Region of stability in the numerical treatment of Volterra integro-differential equations, SIAM J., Numer. Anal., Vol. 16, No.6, pp.890-910, 1979.
- [4] C. T. H. Baker: Stability region in the numerical treatment of Volterra integral equations, SIAM J., Numer. Anal., Vol.15, pp.394-417, 1979.
- [5] A. Feldstein, J. R. Sopka: Numerical methods for nonlinear Volterra integro-differential equations, SIAM J., Numer. Anal., Vol.11, No.4, pp.394-417, 1979.
- [6] S. H. Chang: On certain extrapolation methods for the numerical solution of integro-differential equations,

Math. Comp., Vol.39, No.159, pp.165-171, 1982.

[7] Ch. Lubich: Runge-Kutta theory for Volterra integro-differential equations, Numer. Math., Vol.40, pp.119-135, 1982.

[8] R. Vermiglio: Natural continuous extensions of Runge-Kutta methods for Volterra integro-differential equations, Numer. Math., Vol.53, pp.439-458, 1988.

付録 A : Newton-Cotes 型端点補正台形公式

$m=2t$ ($t \in \mathbb{N}$) とし, m (すなわち t) は固定して考える. このとき m と分割数 n との関係に応じて 3 つの場合, (i) $n=m$, (ii) $2m \geq n > m$, (iii) $n > 2m$ に分けて考える.

(i) $n = m$	(ii) $2m \geq n > m$	(iii) $n > 2m$
$w_k^m = \begin{cases} \frac{1}{2} + \mu_0^m + \mu_m^m, & (k=0) \\ 1 + \mu_k^m + \mu_{m-k}^m, & (0 < k < n) \\ \frac{1}{2} + \mu_m^m + \mu_0^m, & (k=n) \end{cases}$	$w_k^m = \begin{cases} \frac{1}{2} + \mu_0^m, & (k=0) \\ 1 + \mu_k^m, & (0 < k < n-m) \\ 1 + \mu_k^m + \mu_{n-k}^m, & (n-m \leq k \leq m) \\ 1 + \mu_{n-k}^m, & (m < k < n) \\ \frac{1}{2} + \mu_0^m, & (k=n) \end{cases}$	$w_k^m = \begin{cases} \frac{1}{2} + \mu_0^m, & (k=0) \\ 1 + \mu_k^m, & (0 < k \leq m) \\ 1, & (m < k < n-m) \\ w_{n-k}^m, & (n-m \leq k \leq n) \end{cases}$

なお表の中の各 μ_k^m は

$$\mu_k^m = -d_k \sum_{j=1}^t \frac{b_{2j}}{(2j)!} \hat{G}_{k,2j-1}(0), \quad \left(d_0=1, d_k = \frac{(-1)^k}{k} \binom{m}{k}, k=0, 1, \dots, m \right)$$

により計算できる. ここで, $\hat{G}_{k,j}(0)$ ($k=0, 1, \dots, m$) は $\hat{G}_{k,0}(s)=1$ を初期関数とする j に関する関数漸化式

$$\hat{G}_{k,j}(s) = \hat{G}_{k,j-1}^i(s) + \hat{g}_k(s) \hat{G}_{k,j-1}(s), \quad \left(\hat{g}_k(s) = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^m \frac{1}{s-p} \right)$$

を用いて計算することができる. 表で示された重み係数をもつ積分公式

$$T_n^m(f) = h \sum_{k=0}^n w_k^m f(x_k), \quad \left(x_k = x_0 + kh, h = \frac{x_n - x_0}{n} \right)$$

に対して, つぎの定理が成り立つ.

定理 A1. $m=2t$ ($t \in \mathbb{N}$) とする. このとき, 滑らかな関数 $f(x)$ ($x \in (x_0, x_n)$) に対して

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx - T_n^m(f) = h^{m+2} E_m(f) + h^{m+2} H_m(f) + O(h^{m+3})$$

が成立する. なお $E_m(f), H_m(f)$ はつぎのように定義されている.

$$\begin{cases} E_m(f) = \sum_{j=1}^t \frac{b_{2j}}{(2j)!} \frac{2j-1}{m+1} \hat{G}_{0,2j-2}(0) \times \left(f^{(m+1)}(\xi_0) - f^{(m+1)}(\xi_n) \right), \\ H_m(f) = \frac{b_{m+2}}{(m+2)!} \left(f^{(m+1)}(x_0) - f^{(m+1)}(x_n) \right). \end{cases}$$

ここで b_j は j 次 Bernoulli 数である. また ξ_0, ξ_n は区間 (x_0, x_n) 内の適当な点である. ■

この定理は積分公式 $T_n^m(f)$ の精度が少なくとも $O(h^{m+2})$ であることを保証している. つぎの定理は積分公式 T_n^m のノルムの評価に関するものであり, n が十分大きければ, そのノルムは台形公式のノルムに漸近することを示している. すなわち n が十分大きければ, $T_n^m(f)$ の数値的安定性は台形則並みであることを保証している.

定理 A2. $m=2t$ ($t \in \mathbb{N}$) は固定する. このとき n が大きければ T_n^m のノルムに対して次の評価が成立する.

$$\|T_n^m\| \leq (x_n - x_0) \left(1 + \frac{2^{m+1}}{n} A_t \left(\|B_m\| - \frac{3}{2} \right) \right)$$

ここで $\|B_m\| = \sum_{i=0}^m |b_i|$, $A_t = \max_{0 \leq k \leq t} \left(\max_{1 \leq j \leq t} \frac{|\hat{G}_{k,2j-1}(0)|}{(2j)!} \right)$. ■