

線形弾性波動方程式の係数同定問題に対する随伴解法

茨城大学理学部数理科学科 代田 健二 (Kenji Shirota)

Department of Mathematical Sciences, Faculty of Science,
Ibaraki University

1 はじめに

本研究では、弾性波動方程式の係数同定問題について考察する。ここで弾性体は、等方性であるものを対象とする。取り扱う弾性問題としては3次元問題が本質的であるが、研究の初段階として、2次元問題である平面ひずみ問題について考えることにする。

$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n = 2$) を滑らかな境界を持つ有界領域とする。 u_i ($i = 1, 2$) [m] を x_i 方向への変位, ε_{ij} をひずみテンソルの ij 成分, σ_{ij} を応力テンソルの ij 成分とする。弾性体 Ω は平面ひずみ状態であることから、変位-ひずみの関係式、応力-ひずみの関係式は、それぞれ $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ となる。ここで ' j ' は $\partial/\partial x_j$ を意味し、 E [GPa] は Young 率, ρ は密度 [kg/m³], ν は Poisson 比である。また支配方程式は、次の波動方程式が成り立つとする:

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \tag{1}$$

ここで ' $\dot{\cdot}$ ' は $\partial/\partial t$ を意味し、 $T > 0$ は観測時間の長さである。Young 率 E は場所のみ依存する有界な可積分関数であるとし、

$$E(\mathbf{x}) \geq C > 0 \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \Omega \tag{2}$$

を満たすものとする。ただし C は、与えられた正定数である。また、初期値 $u_i(\cdot, 0)|_\Omega$, 初速度 $\dot{u}_i(\cdot, 0)|_\Omega$, 密度 $\rho(\mathbf{x})$, Poisson 比 $\nu(\mathbf{x})$ は既知であるとする。

弾性波動場における逆問題については、様々な問題 [2], [5] が考察されており、それらに対する数値解法についても研究されている [9]。本研究では、次の係数同定問題に対する数値解法について考える:

(IP) 与えられた N 組の変位 $\bar{u}_i^{(m)}$, 表面力 $\bar{S}_i^{(m)}$ ($m = 1, 2, \dots, N$) より Young 率 $E(\mathbf{x})$ を同定せよ。

問題 (IP) の解の一意性と安定性は、一般には理論的に保証されない。無限個の観測データの組 $\{\bar{u}_i^{(k)}, \bar{S}_i^{(k)}\}_{k=0,1,2,\dots}$ が与えられる場合 [5] や内部観測を含む場合 [8] には、理論的に一意性・条件付安定性が示されている。

問題 (IP) に対する数値解法として、本研究では随伴解法 [7] を採用する。この手法は、制御理論 [4] でしばしば用いられるものであるが、係数同定問題に適用できることを示す。元の問題 (IP) の解を、変分法により得られた汎関数の最小化問題の解により同定する。最小化関数を同定する方法としては、射影勾配法を基礎とした方法を提案する。また数値実験により、本手法の有効性を検討する。

2 随伴解法を基礎とした係数同定手法

支配方程式が (1) であり、かつ Young 率 E と表面変位 $\bar{u}_i^{(m)}$ が与えられた線形弾性問題を主問題と呼ぶことにし、 $u_i^{(m)}[E]$ をその解とする。また $\varepsilon_{ij}^{(m)}[E]$, $\sigma_{ij}^{(m)}[E]$ を、それぞれ主問題の解 $u_i^{(m)}[E]$ により導出されるひずみテンソル、応力テンソルの ij 成分とする。このとき未知の Young 率 E を、次の制約条件付き最小化問題を解くことにより同定する: 次に定義する汎関数 J を最小にする関数 E ($E(\mathbf{x}) \geq C > 0$) を見つけよ。

$$J(E) = \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^T \int_{\partial\Omega} |S_i^{(m)}[E] - \bar{S}_i^{(m)}|^2 ds dt,$$

ここで $S_i^{(m)}[E] := \sigma_{ij}^{(m)}[E]n_j$ は、 $u_i^{(m)}[E]$ により導出される表面力であり、 $\bar{\eta}$ は弾性体 Ω の代表的な速さである。このとき、 $J(E) = 0$ を満たす関数 E は、問題 (IP) の解になる。

制約条件付き最小化問題に対する数値解法は、様々なものが提案されている [3]。本研究では、射影勾配法 [6] を採用する: $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$E_{l+1}(\mathbf{x}) = E_l(\mathbf{x}) - \alpha_l d_l(\mathbf{x}). \quad (3)$$

ここで d_l は探索方向であり、

$$d_l(\mathbf{x}) := E_l(\mathbf{x}) - P(E_l - J'(E_l))(\mathbf{x})$$

により決定される。 P は、

$$P(E)(\mathbf{x}) := \begin{cases} E(\mathbf{x}) & (E(\mathbf{x}) \geq C) \\ C & (E(\mathbf{x}) < C) \end{cases}$$

により定義される写像であり、 J' は汎関数 J の第一変分

$$J(E + \delta E) - J(E) = \int_{\Omega} J'(E) \delta E dx + o(\|\delta J\|_{L^2(\Omega)}) \quad (4)$$

である。ここで $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ は、 L^2 ノルム $\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ を意味する。 α_l は、 $0 < \alpha_l \leq 1$ を満たす探索の幅である。初期推定 Young 率を制約条件 (2) を満たすように選べば、射影勾配法 (3) により逐次更新された E_l は制約条件を満たす。

射影勾配法 (3) を用いるには、第一変分 J' の具体的な導出が必要になる。第一変分の定義 (4) に基づき、その具体的な導出を試みる。

E を条件 (2) を満足する関数とし、 δE を $E(\mathbf{x}) + \delta E(\mathbf{x}) \geq C$ を満たす任意の変分とする。簡単な計算により

$$\begin{aligned} J(E + \delta E) - J(E) &= \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \left[\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left\{ 2 \left(S_i^{(m)}[E] - \bar{S}_i^{(m)} \right) \right\} \delta S_i^{(m)} ds dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt \right] \quad (5) \end{aligned}$$

となる. ただし $\delta S_i^{(m)} := S_i^{(m)}[E + \delta E] - S_i^{(m)}[E]$ とする. 第一変分を導出するために, $t = T$ を初期時刻とする次の初期値境界値問題を導入する:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \ddot{v}_i^{(m)} = \widehat{\sigma}_{ij,j}^{(m)} & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} (v_{i,j}^{(m)} + v_{j,i}^{(m)}) & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ \widehat{\sigma}_{ij}^{(m)} = \frac{E}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} & \text{in } \Omega \times [0, T), \\ v_i^{(m)} = w_i^{(m)}, \quad \dot{v}_i^{(m)} = 0 & \text{on } \Omega \times \{T\}, \\ v_i^{(m)} = 2 (S_i^{(m)}[E] - \overline{S}_i^{(m)}) & \text{on } \partial\Omega \times [0, T). \end{array} \right. \quad (6)$$

ここで関数 w_i は境界値問題

$$\left\{ \begin{array}{ll} \widetilde{\sigma}_{ij,j}^{(m)} = 0 & \text{in } \Omega, \\ \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} (w_{i,j}^{(m)} + w_{j,i}^{(m)}) & \text{in } \Omega, \\ \widetilde{\sigma}_{ij}^{(m)} = \frac{E}{1+\nu} \widetilde{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widetilde{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} & \text{in } \Omega, \\ w_i^{(m)} = 2 (S_i^{(m)}[E](\cdot, T) - \overline{S}_i^{(m)}(\cdot, T)) & \text{on } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (7)$$

の解である. このとき (5), (6) より

$$J(E + \delta E) - J(E) = \frac{\overline{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \left[\int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta\sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt + \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt \right] \quad (8)$$

となる. ここで $\delta\sigma_{ij}^{(m)} := \sigma_{ij}^{(m)}[E + \delta E] - \sigma_{ij}^{(m)}[E]$ とする.

Gauss の発散定理から, すべての m に対して,

$$\int_0^T \int_{\Omega} v_i^{(m)} \delta\sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt = \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \delta\sigma_{ij}^{(m)} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} v_i^{(m)} \rho \delta \ddot{u}_i^{(m)} dx dt$$

が成り立つ. ただし $\delta u_i^{(m)} := u_i^{(m)}[E + \delta E] - u_i^{(m)}[E]$ である. また Hooke 則より

$$\begin{aligned} \delta\sigma_{ij}^{(m)} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} &= \left\{ \frac{\delta E}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu \delta E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{ij}^{(m)}[E] \\ &\quad + \left\{ \frac{\delta E}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu \delta E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \delta\varepsilon_{ij}^{(m)} + \widehat{\sigma}_{ij}^{(m)} \delta\varepsilon_{ij}^{(m)}. \end{aligned}$$

である. したがって, すべての m に対して,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta\sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \delta\varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{\sigma}_{ij}^{(m)} \delta\varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} v_i^{(m)} \rho \delta \ddot{u}_i^{(m)} dx dt \end{aligned} \quad (9)$$

となる. ここで Gauss の発散定理および $\delta u_i^{(m)}|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0$, $\widehat{\sigma}_{ij,j}^{(m)}|_{\Omega \times [0, T]} = \rho \dot{v}_i^{(m)}|_{\Omega \times [0, T]}$ であることから,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \widehat{\sigma}_{ij}^{(m)} \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt &= \int_0^T \left(\int_{\partial\Omega} (\widehat{\sigma}_{ij}^{(m)} n_j) \delta u_i^{(m)} ds dt - \int_{\Omega} \widehat{\sigma}_{ij,j}^{(m)} \delta u_i^{(m)} dx \right) dt \\ &= - \int_0^T \int_{\Omega} \rho \dot{v}_i^{(m)} \delta u_i^{(m)} dx dt. \end{aligned} \quad (10)$$

よって (9) および (10) から,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ v_i^{(m)} \rho \delta \ddot{u}_i^{(m)} - \rho \dot{v}_i^{(m)} \delta u_i^{(m)} \right\} dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

さらに $\delta u_i^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = 0$, $\delta \dot{u}_i^{(m)}(\mathbf{x}, 0) = 0$, $v_i^{(m)}(\mathbf{x}, T) = w_i^{(m)}(\mathbf{x})$, $\dot{v}_i^{(m)}(\mathbf{x}, T) = 0$ であることから,

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left\{ v_i^{(m)} \rho \delta \ddot{u}_i^{(m)} - \rho \dot{v}_i^{(m)} \delta u_i^{(m)} \right\} dx dt = \int_{\Omega} w_i^{(m)}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \delta \dot{u}_i^{(m)}(\mathbf{x}, T) dx. \quad (12)$$

したがって (11) および (12) より, すべての m に対して,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\partial\Omega} v_i^{(m)} \delta \sigma_{ij}^{(m)} n_j ds dt \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \int_{\Omega} w_i^{(m)}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \delta \dot{u}_i^{(m)}(\mathbf{x}, T) dx \end{aligned} \quad (13)$$

となる.

したがって (8), (13) から,

$$\begin{aligned} &J(E + \delta E) - J(E) \\ &= \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \widehat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \widehat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &\quad + \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_{\Omega} w_i^{(m)}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \delta \dot{u}_i^{(m)}(\mathbf{x}, T) dx + \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt. \end{aligned}$$

ここで、適切な条件の下では、

$$\int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \hat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \delta \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt = o(\|\delta E\|_{L^2(\Omega)}),$$

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} |\delta S_i^{(m)}|^2 ds dt = o(\|\delta E\|_{L^2(\Omega)})$$

となることが保証される。よって、

$$\begin{aligned} & J(E + \delta E) - J(E) \\ &= \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^T \int_{\Omega} \delta E \left\{ \frac{1}{1+\nu} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \hat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{ij}^{(m)} dx dt \\ &+ \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_{\Omega} w_i^{(m)}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \delta u_i^{(m)}(\mathbf{x}, T) dx + o(\|\delta E\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (14)$$

正確な第一変分を導出するためには、(14)の右辺第二項について更に計算を進める必要があるが、これ以上の計算は困難である。そこで、右辺第一項を第一変分の近似と見なし、第一変分の代わりに使用することにする：

$$\bar{J}(E) = \frac{\bar{\eta}}{N} \sum_{m=1}^N \int_0^T \left\{ \frac{1}{1+\nu} \hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)} + \frac{\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \hat{\varepsilon}_{kk}^{(m)} \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{ij}^{(m)} dt.$$

関数 $\bar{J}(E)$ を導入したことにより、最小化過程 (3) は次のように変更される： $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$E_{l+1}(\mathbf{x}) = E_l(\mathbf{x}) - \alpha_l \bar{d}_l(\mathbf{x}). \quad (15)$$

ここで探索方向 \bar{d}_l は、

$$\bar{d}_l(\mathbf{x}) := E_l(\mathbf{x}) - P(E_l - \bar{J}(E_l))(\mathbf{x})$$

により定められる。(15)は、正確には射影勾配法ではない。しかし、初期 Young 率を (2) を満たすように選べば、すべての E_l が条件を満たすことを保証できる。

問題 (IP) に対する数値解法として、次のアルゴリズムを提案する：

数値計算アルゴリズム

1. 初期 Young 率 E_0 ($E_0(\mathbf{x}) \geq C > 0$) を与える。
2. $l = 0, 1, 2, \dots$ に対して
 - (a) N 組の主問題を解き、 $\varepsilon_{ij}^{(m)}[E_l]$ および $S_i^{(m)}[E_l]$ を求める。
 - (b) N 組の境界値問題 (7) を解き、 $w_i^{(m)}[E_l]$ を求める。
 - (c) N 組の初期値境界値問題 (6) を解き、 $\hat{\varepsilon}_{ij}^{(m)}[E_l]$ を求める。
 - (d) 関数 $\bar{J}(E_l)$ を求める。
 - (e) 探索方向 \bar{d}_l を決定する。
 - (f) Young 率 E_l を更新する： $E_{l+1} = E_l - \alpha_l \bar{d}_l$ 。

3 計算例

計算アルゴリズムを使った簡単な例を示す。弾性体 Ω を半径 $L = 1$ [m] の円板とし、密度 $\rho = 1.0 \times 10^3$ [kg/m³], Poisson 比 $\nu = 0.3$ とする。真の Young 率 E [GPa] を

$$E(x_1, x_2) = 0.5e^{-20(x_1^2+x_2^2)} + 2.0$$

(図 1) とする。弾性体 Ω の代表的な速さとしては、表面上の横波の速さを採用する:

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \Big|_{\partial\Omega} = 8.77 \times 10^2 \text{ [m/s]}.$$

観測時間の長さは、 $T = 2.6/\bar{\eta} = 2.96 \times 10^{-3}$ とする。初期変位 $u_i^{(m)}(\cdot, 0)|_{\Omega} = 0.0$, 初期速度 $\dot{u}_i^{(m)}(\cdot, 0)|_{\Omega} = 0.0$ とする。また条件 (2) の定数 C は、1.9 [GPa] と仮定する。

観測境界値は、表面力 $\bar{S}_i^{(m)}|_{\partial\Omega_m \times (0, T]} = -p(t)n_i$, $\bar{S}_i^{(m)}|_{(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_m) \times (0, T]} = 0.0$ を境界値とする線形弾性波動問題を、時間方向を Newmark 法 [1], 空間方向を三角形一次要素 (図 2) により近似計算し、その境界上での近似値を採用した。ここで、

$$\partial\Omega_m = \left\{ (\cos \theta, \sin \theta) \mid -\frac{\pi}{50} < \theta - (m-1)\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{50} \right\}$$

であり、

$$p(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{12.5\pi\bar{\eta}}{L}t\right) & \left(0 \leq t \leq \frac{0.16L}{\bar{\eta}}\right) \\ 0.0 & \left(t > \frac{0.16L}{\bar{\eta}}\right) \end{cases}$$

である。観測境界値組数は $N = 3$ とする。アルゴリズム中の初期値境界値問題は、時間方向に Newmark 法, 空間方向に三角形一次要素 (図 2) を用いて近似計算する。

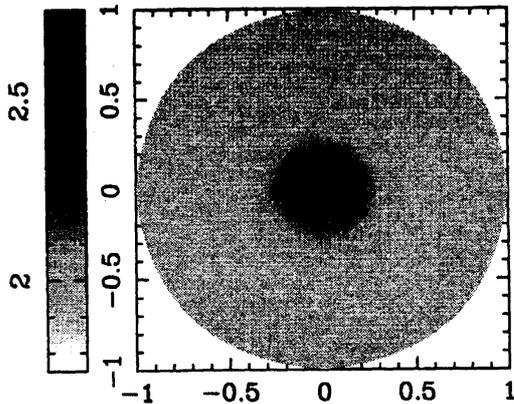


図 1: 真の Young 率

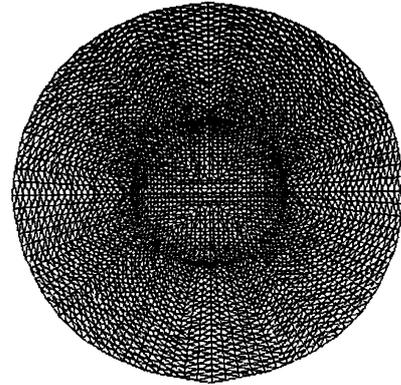


図 2: 有限要素分割 (5250 要素)

初期 Young 率 E_0 を一定の値 2.15 [GPa] としたとき、計算結果は図 3 のとおりである。また、各要素における相対誤差は図 4 に示す通りであり、相対誤差の最大値は 6.76 % であった。これら図が示すとおり、同定結果は真の Young 率分布に良好な一致を見せた。この結果は、提案したアルゴリズムが、滑らかな分布を持つ Young 率に対して効果的であることを示唆している。

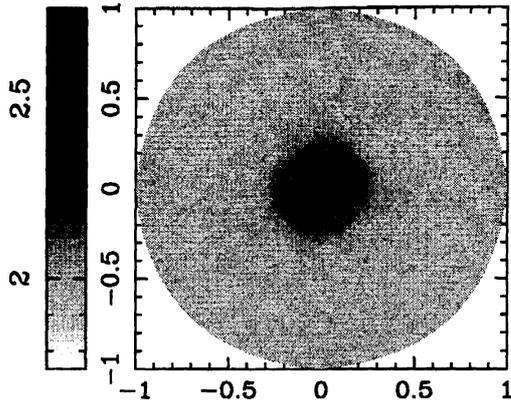


図3: 同定 Young 率分布 (29 ステップ)

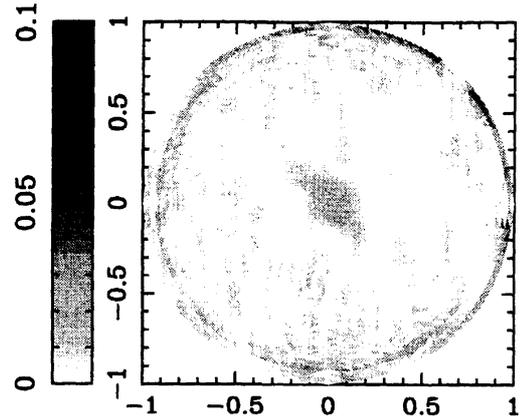


図4: 相対誤差分布

最初の数値実験では、滑らかな分布を持つ Young 率について提案手法を検証した。しかし、実用問題において Young 率分布は、不連続に変化することが多い。ここでは、不連続な分布を持つ Young 率について提案手法を適用し、有効性を検証する。

弾性体 Ω を半径 $L = 1$ [m] の円板とし、密度 $\rho = 1.0 \times 10^3$ [kg/m³], Poisson 比 $\nu = 0.3$ とする。真の Young 率 E [GPa] は、

$$E(x_1, x_2) = \begin{cases} 2.25 & (0 \leq |x_1| + |x_2| < 0.2) \\ 2.0 & (0.2 < |x_1| + |x_2| < 1.0) \end{cases}$$

(図5) とする。代表的な速さ $\bar{\eta}$ としては、弾性体表面での横波の速さ

$$\bar{\eta} = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \Big|_{\partial\Omega} = 8.77 \times 10^2 \text{ [m/s]}$$

を採用する。観測時間の長さは、 $T = 2.6/\bar{\eta} = 2.96 \times 10^{-3}$ とする。初期変位 $u_i^{(m)}(\cdot, 0)|_{\Omega} = 0.0$, 初期速度 $\dot{u}_i^{(m)}(\cdot, 0)|_{\Omega} = 0.0$ とする。条件 (2) の定数 C は、1.9 [GPa] と仮定する。観測境界値は、順問題を時間方向は Newmark 法、空間方向は三角形一次要素 (図6) により近似計算し、得られた近似値を採用する。観測境界値組数は $N = 3$ とする。

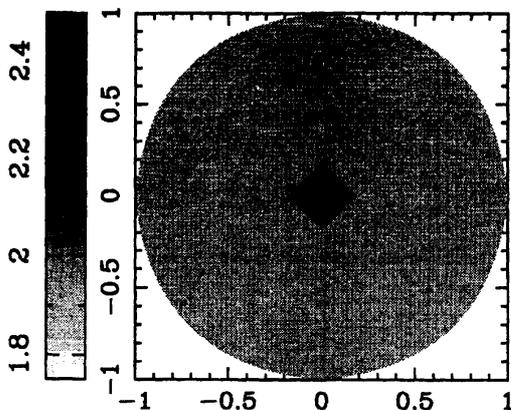


図5: 真の Young 率分布

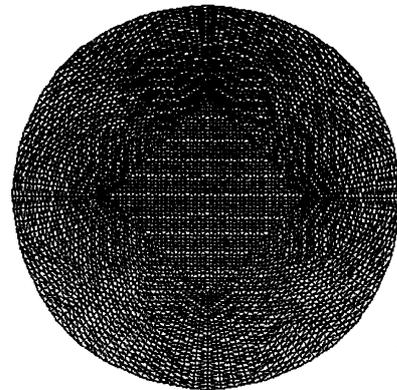


図6: 有限要素分割 (要素数: 6250)

初期 Young 率 E_0 を一定の値 2.0 [GPa] としたときの同定結果は、図 7 のとおりである。各要素における相対誤差の分布は、図 8 のとおりである。相対誤差の最大値は 7.15% であった。外部材料に対する同定精度は良好であったが、内部材料に対する精度は不満足な結果であった。特に不連続部分の同定については、満足な結果を得ることができなかった。この結果は、不連続な分布を持つ Young 率を高精度で同定するためには、提案手法を改良する必要があることを示している。

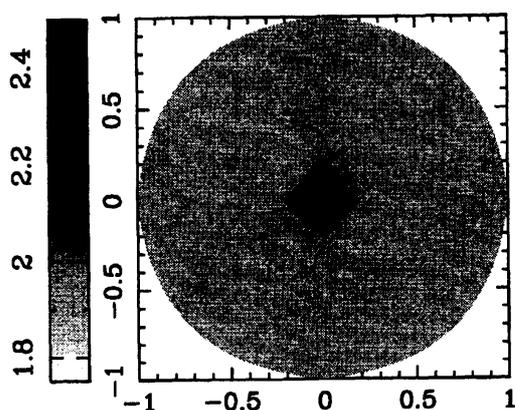


図 7: 同定 Young 率分布 (22 ステップ)

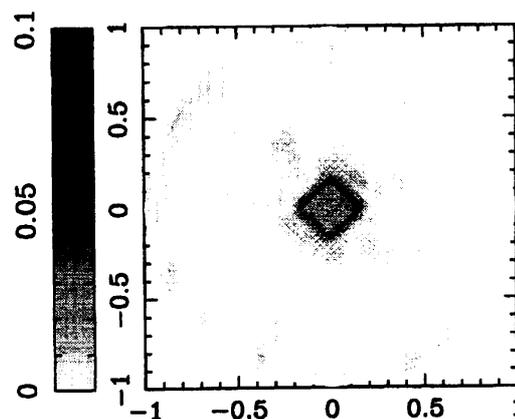


図 8: 相対誤差分布

4 まとめ

本研究では、弾性波動方程式の係数同定問題に対する数値解法について考察した。対象とする弾性体は、線形かつ等方性であるものとした。弾性問題としては、研究の初段階として、2次元問題である平面ひずみ問題について考察した。同定対象とする弾性係数は、Young 率のみとし、Poisson 比、密度は既知であると仮定した。未知 Young 率を同定する手法として、境界値逆問題の数値解法として提案された随伴解法を採用した。この手法により、元の係数同定問題を制約条件付き最小化問題に帰着させた。最小化関数を求める方法としては、制約条件付き最小化問題で用いられる手法の一つである射影勾配法を採用した。射影勾配法を用いるにあたっては、第一変分を具体的に導出する必要がある。しかし導出は困難であるため、本研究では第一変分の近似を導入した。また、提案した数値計算アルゴリズムについて数値実験をおこない、滑らかな分布を持つ Young 率については精度よく同定できることを確認した。しかし、不連続な分布を持つ Young 率に対しては、満足できる同定結果を得ることはできなかった。不連続な分布を持つ Young 率に対しても高い精度の結果が得られるよう、今後計算アルゴリズムを改良する必要がある。

参考文献

- [1] K. J. Bathe and E. L. Wilson, *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976.
- [2] 小林編著, 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- [3] 今野浩, 山下浩, 非線形計画法, OR ライブラリー 6, 日科技連出版社, 1978.

- [4] R. Lattes and J. L. Lions, *The Method of Quasi-reversibility: Applications to Partial Differential Equations*, American Elsevier Publishing Company Inc., New-York, 1969.
- [5] 中村玄, 弾性体の逆問題の数学解析, 月刊 地球, Vol.24, No.2, pp.132–145, 2002.
- [6] 志水清孝, 最適制御の理論と計算法, コロナ社, 1994.
- [7] K. Shirota and K. Onishi, Adjoint method for numerical solution of inverse boundary value and coefficient identification problems, *Survey on Mathematics in Industries*, accepted.
- [8] 山本昌宏, ラメの方程式に対する逆問題: 有限回の観測によるラメ係数, 密度の決定, 第 51 回理論応用力学講演会講演論文集, pp.603–604, 2002.
- [9] H. Yoshikawa, N. Nishimura, and S. Kobayashi, On the determination of ultrasonic waves emitted from transducers using laser measurements with applications to defect determination problems, *Journal of Applied Mechanics*, JSCE, Vol.4, pp.145–152, 2001.