

## GL<sub>n</sub> の ZELEVINSKI INVOLUTION について

平賀 郁

### 1. INTRODUCTION

$G$  を  $p$ -進体  $F$  上定義された連結な簡約可能代数群とし、 $G = G(F)$  とおく。 $R(G)$  を  $G$  の有限生成な許容表現のなす圏の Grothendieck 群とし、 $\Pi(G)$  を  $G$  の既約許容表現の同値類全体のなす集合とする。いま、 $G$  の minimal parabolic 部分群  $P_0$  とその Levi 部分群  $M_0$  を固定し、 $\mathcal{L}^G$  を  $G$  の standard Levi 部分群全体のなす集合とする。 $M \in \mathcal{L}^G$  に対し、

$$\begin{aligned} i_M^G &: R(M) \longrightarrow R(G) \\ r_M^G &: R(G) \longrightarrow R(M) \end{aligned}$$

を、誘導表現と Jacquet functor から定義される写像とし、 $r(M)$  を  $M$  の semisimple split  $F$ -rank とする。ここでは、[2] [5] に従い、Zelevinski involution を

$$D_G = \sum_{M \in \mathcal{L}^G} (-1)^{r(M)} i_M^G \circ r_M^G$$

と定義する。このとき

$$(1.1) \quad D_G \circ D_G = id$$

$$(1.2) \quad D_G \circ i_M^G = i_M^G \circ D_M$$

となることが知られている。 $\{M\}$  を  $M \in \mathcal{L}^G$  の associate Levi 部分群全体のなす集合とし、 $\pi \in \Pi(G)$  とする。 $r_M^G(\pi)$  が supercuspidal 表現の 0 でない和となっているとき、 $\pi$  は type  $\{M\}$  であるという。このとき、 $r(\pi) = r(M)$  とおく。 $R(G)_r \subset R(G)$  を  $r(\pi) = r$  をみたす既約表現  $\pi$  全体から生成される部分群とする。 $R(G) = \bigoplus_r R(G)_r$  である。また、各  $R(G)_r$  上の involution  $d_G$  を

$$d_G = (-1)^r D_G : R(G)_r \longrightarrow R(G)_r$$

と定める。 $D_G$  と同様に

$$(1.3) \quad d_G \circ d_G = id$$

$$(1.4) \quad d_G \circ i_M^G = i_M^G \circ d_M$$

が成り立つ。A. M. Aubert [2] [3] により次のことが証明されている。

定理 1.1.  $\pi \in \Pi(G)$  ならば、 $d_G(\pi) \in \Pi(G)$ 。また、 $G = GL_n$  ならば  $d_G$  は [8] の定義と一致する。

$W_F$  を  $F$  の Weil 群とし、 ${}^L G$  を  $G$  の  $L$ -群とする。 $L_F = W_F \times SU_2(\mathbb{C})$  とおき、

$$\psi : L_F \times SL_2(\mathbb{C}) = W_F \times SU_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$$

を Arthur parameter とする ([1] 参照)。 $SU_2$  と  $SL_2$  は  $\mathbb{C}$  上同型であるが、 $L_F$  の因子と Arthur parameter を定義する因子を区別する為に、ここでは使い分けることにする。J. Arthur [1] に従い、 $\Pi_\psi(G)$  を conjectural な  $A$ -packet とする。我々は、 $d(\psi)$  を

$$d(\psi)(w \times t \times u) = \psi(w \times u \times t), \quad w \in W_F, t, u \in SL_2(\mathbb{C}) = SU_2(\mathbb{C})$$

により定める。 $d(\psi)$  も Arthur parameter である。このとき、次のことが予想される。

予想 1.2.

$$\Pi_{d(\psi)}(G) = d_G(\Pi_\psi(G))。$$

$G = GL_n$  のときは、この予想は実質的に C. Moeglin と J.-L. Waldspurger [6] により証明されている。以下では、[6] と、予想 1.2 について解説する。

## 2. MULTISEGMENT

この節では multisegment について復習する。 $X = \mathbb{Z}$  とおく。

$$\Delta = \{b, b+1, \dots, e-1, e\} \subset X$$

を segment とし、

$$b(\Delta) = b$$

$$e(\Delta) = e$$

とする。また、 $S$  を segment 全体のなす集合とする。いま、 $S$  を集合とすると、 $S$  の有限な multiset とは、写像

$$a : S \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

で support が有限なもののことである。このとき、 $a(s)$  を  $s \in S$  の重複度とよび、集合のときと同様に

$$|a| = \sum_{s \in S} a(s)$$

とする。また、写像

$$\lambda : \{1, 2, \dots, |a|\} \longrightarrow S$$

で  $|\lambda^{-1}(s)| = a(s)$  をみたすものを  $a$  の順序と呼ぶ。  $S$  の有限な multiset  $a$  を multisegment と呼ぶ。順序  $\lambda$  を考えるときは、  $\Delta_i = \lambda(i)$  とおいて、

$$a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_{|a|}\}$$

と書くことにする。また、  $X$  の multiset  $s(a)$  ( $a$  の support) を

$$s(a)(x) = \sum_{\substack{\Delta \in S \\ x \in \Delta}} a(\Delta)$$

により定める。  $\mathcal{M}$  を multisegment 全体のなす集合とする。

$\Delta_1, \Delta_2 \in S$  を segment とする。このとき、  $\Delta_1$  が  $\Delta_2$  に先行する (precede) とは、  $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  が条件

$$b(\Delta_1) + 1 \leq b(\Delta_2) \leq e(\Delta_1) + 1 \leq e(\Delta_2)$$

をみたすことである。(  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  と書く。 )  $\Delta_1 \rightarrow \Delta_2$  か  $\Delta_2 \rightarrow \Delta_1$  が成り立っているとき、  $\Delta_1$  と  $\Delta_2$  は連結している (linked) という。  $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$  とし、  $\Delta_i, \Delta_j \in a$  が連結しているとする。このとき、  $a$  のなかの  $\Delta_i, \Delta_j$  を  $\Delta_i \cup \Delta_j, \Delta_i \cap \Delta_j$  でとりかえる操作、つまり  $a$  から、

$$a' = (a \setminus \{\Delta_i, \Delta_j\}) \cup \{\Delta_i \cup \Delta_j, \Delta_i \cap \Delta_j\}$$

をつくる操作を elementary operation と呼ぶ。(但し、  $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$  のときは、  $\Delta_i \cup \Delta_j$  のみを付け加えることにする。)

我々は、 [6] に従い、  $\Delta_1, \Delta_2 \in S$  が「  $b(\Delta_1) > b(\Delta_2)$  」または、「  $b(\Delta_1) = b(\Delta_2)$  かつ  $e(\Delta_1) \geq e(\Delta_2)$  」をみたすとき、

$$\Delta_1 \geq \Delta_2$$

と書き、これにより  $S$  に順序をいれておく。以後  $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$  の順序は  $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \geq \Delta_t$  が成り立つようにいれておくことにする。また、  $\mathcal{M}$  に辞書式に順序をいれておく。つまり  $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\}$  と  $b = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_{t'}\}$  が  $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_{i-1} = \Delta'_{i-1}, \Delta_i > \Delta'_i$  をみたせば、  $a > b$  である。(  $\Delta_1 = \Delta'_1, \dots, \Delta_{t'} = \Delta'_{t'}, t > t'$  の場合も  $a > b$  とする。 ) いま、  $a' \in \mathcal{M}$  が  $a \in \mathcal{M}$  から elementary operation を繰り返して得られるものとする、  $a \geq a'$  がわかる。よってこの順序は [8, 7.1] の順序の拡張である。

$a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$  とする。  $\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r} \in a$  が次の条件 (1) (6) をみたすとき、  $\{\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r}\}$  は条件 (★) をみたしているという。

- (1)  $d = e(\Delta_{i_0})$  は  $\Delta_1, \dots, \Delta_t$  にあらわれる数のうち最大のもの。
- (2)  $\Delta_{i_0}$  は  $e(\Delta) = d$  をみたす  $a$  の segment  $\Delta$  のうちで最大のもの。
- (3)  $e(\Delta_{i_p}) = d - p$ ,  $p = 1, \dots, r$ 。
- (4)  $\Delta_{i_p} \rightarrow \Delta_{i_{p-1}}$ ,  $p = 1, \dots, r$ 。
- (5) 各  $\Delta_{i_p}$  ( $p = 1, \dots, r$ ) は (3), (4) の条件をみたすもののうち最大のものの。

(6)  $e(\Delta) = d - r - 1$  かつ  $\Delta \rightarrow \Delta_{i_r}$  をみたす  $a$  の segment  $\Delta$  は存在しない。

$a$  が空でなければ、条件 (★) をみたす segment の集合  $\{\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r}\}$  で空でないものが存在する (segment の集合として一意的)。 $\Delta = \{b, \dots, e\} \in \mathcal{S}$  とするとき、

$$\Delta^- = \{b, \dots, e - 1\}$$

とおく。 $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$  とするとき、[6] に従い、 $a^\# \in \mathcal{M}$  を次のように定める。まず、条件 (★) をみたす  $\{\Delta_{i_0}, \dots, \Delta_{i_r}\}$  をとる。ここで、multisegment  $a' = \{\Delta'_1, \dots, \Delta'_t\}$  を

$$\Delta'_i = \begin{cases} \Delta_i^-, & i \in \{i_0, \dots, i_r\} \\ \Delta_i, & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定める。(但し、 $i \in \{i_0, \dots, i_r\}$  が  $b(\Delta_i) = e(\Delta_i)$  をみたしているときは、 $\Delta_i^- = \emptyset$  は  $a'$  から取り除くことにする。) また、 $d = e(\Delta_{i_0})$  とし、 $\Delta_1^\# = \{d - r, \dots, d\}$  とおく。 $a'$  が空でなければ、同様に条件 (★) をみたすものを  $a'$  からとり、 $\Delta_2^\#$  と  $a''$  を定めることができる。以下、同じ操作を  $a''$  が空になるまで繰り返していくことにより、

$$a^\# = \{\Delta_1^\#, \dots, \Delta_t^\#\}$$

を定めることができる。

例 2.1.  $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\}$ ,

$$\Delta_1 = \{t - 1, \dots, s - 1 + t - 1\}$$

$$\Delta_2 = \{t - 2, \dots, s - 1 + t - 2\}$$

⋮

$$\Delta_t = \{0, \dots, s - 1\}$$

とする。このとき、 $a^\# = \{\Delta_1^\#, \dots, \Delta_s^\#\}$ ,

$$\Delta_1^\# = \{s - 1, \dots, t - 1 + s - 1\}$$

$$\Delta_2^\# = \{s - 2, \dots, t - 1 + s - 2\}$$

⋮

$$\Delta_s^\# = \{0, \dots, t - 1\}$$

である。

3.  $GL_n$  の表現

$GL_n$  の minimal parabolic 部分群  $P_0$  とその Levi 部分群  $M_0$  を

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_0 = \left\{ \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\}$$

とおく。いま  $\pi_i$  ( $i = 1, \dots, s$ ) を  $GL_{r_i}(F)$  の有限生成な許容表現とするとき、

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_s = \text{Ind}_P^{GL_n}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_s)$$

により  $GL_n$  の表現を定める。但し、 $n = r_1 + \cdots + r_s$  で、 $GL_{r_1} \times \cdots \times GL_{r_s}$  を

$$(g_1, \dots, g_s) \in GL_{r_1} \times \cdots \times GL_{r_s} \longrightarrow \begin{pmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_s \end{pmatrix} \in GL_n$$

により、 $GL_n$  の standard Levi 部分群  $M$  とみなし、対応する standard parabolic 部分群を  $P$  としている。 $GL_r(F)$  の quasi-character  $\nu$  を

$$\nu(g) = |\det(g)|_F, \quad g \in GL_r(F)$$

により定める。 $\Delta = \{b, \dots, e\} \in \mathcal{S}$  を segment とし、 $\rho$  を  $GL_r(F)$  の supercuspidal 表現とするとき、 $\langle \Delta \rangle_\rho$  を  $\rho\nu^b \times \cdots \times \rho\nu^e$  の unique な既約部分表現とする。ここでは Langlands 分類を扱うので、 $\rho\nu^b \times \cdots \times \rho\nu^e$  の unique な既約商表現を  $[\Delta]_\rho$  と書くことにする。これは  $\rho\nu^e \times \cdots \times \rho\nu^b$  の unique な既約部分表現でもある。

**例 3.1.**  $\Delta = \{0, 1\}$  を segment、 $\rho = \nu^{-\frac{1}{2}}$  を  $GL_1(F)$  の quasi-character とするとき、 $\langle \Delta \rangle_\rho$  は  $GL_2(F)$  の trivial 表現で、 $[\Delta]_\rho$  は  $GL_2(F)$  の Steinberg 表現となっている。

次の命題は、I. N. Bernstein の定理 [8, Theorem 9.3] である (下の (3.1) 参照)。

**命題 3.2.**  $GL_n(F)$  の既約許容表現  $\pi$  が離散系列である為の必要十分条件は  $\pi$  がある  $[\Delta]_\rho$  と同値になることである。

$a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\} \in \mathcal{M}$  を multisegment とするとき、

$$\pi\langle a \rangle_\rho = \langle \Delta_1 \rangle_\rho \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle_\rho$$

$$\pi[a]_\rho = [\Delta_1]_\rho \times \cdots \times [\Delta_t]_\rho$$

と書くことにする。また、 $\langle a \rangle_\rho$  を  $\pi \langle a \rangle_\rho$  の unique な既約部分表現とする。我々は、Langlands 分類を扱うので、 $S$  の順序として、 $b(\Delta_1) + e(\Delta_1) > b(\Delta_2) + e(\Delta_2)$  ならば  $\Delta_1 > \Delta_2$  となるものを取り、 $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \dots \geq \Delta_t$  と並べる方が良いが、[8, Proposition 6.4 (2)] と同様にして、この順序で並べた場合の誘導表現と  $\pi[a]_\rho$  は同値な表現となることがわかる。このことから、 $\pi[a]_\rho$  は unique な既約商表現  $[a]_\rho$  をもち、multisegment  $a$  と既約表現  $[a]_\rho$  との対応は Langlands 分類と一致することが分かる。

いま、 $a = \{\Delta\}$  とするとき、

$$(3.1) \quad d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho = \langle a^\sharp \rangle_\rho$$

となることは難しくないが ([2] [8] 参照)、一般の multisegment  $a \in \mathcal{M}$  に対しても C. Moeglin と J.-L. Waldspurger [6] により次の定理が証明されている。

**定理 3.3.**

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = \langle a^\sharp \rangle_\rho.$$

以下で、我々は、

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho$$

を示すが ([8, Conjecture 10.3] 参照)、そこで、[6] で証明に使われた Oesterlé による議論を真似る。証明には直接使わないが、まず最初に Oesterlé の結果 [6, Proposition 12] を解説する。次の命題は、[8, Proposition 9.13] から分かる。

**命題 3.4.**  $\Delta = \{b, \dots, e\} \in \mathcal{S}$  とする。いま、

$$a_\Delta = \{\Delta\}^\sharp = \{\{e\}, \{e-1\}, \dots, \{b\}\} \in \mathcal{M}$$

とおくと、

$$\langle a_\Delta \rangle_\rho = \sum (-1)^{|a_\Delta| - |b|} \pi \langle b \rangle_\rho$$

が成り立つ。但し、和は  $a_\Delta$  から elementary operation を繰り返して得られる  $b \in \mathcal{M}$  をはしる。

**命題 3.5 (Oesterlé).** ある supercuspidal 表現  $\rho$  に対し、

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = \langle a^\sharp \rangle_\rho, \quad \forall a \in \mathcal{M}$$

が成り立つならば、すべての  $\rho$  に対して同じ式が成り立つ。特に、 $\rho$  を  $GL_1(F)$  の trivial 表現として、上の式が成り立てば、すべての  $GL_r(F)$  ( $r \geq 1$ ) の supercuspidal 表現  $\rho$  に対しても、上の式が成り立つ。

$d_G$  の定義をみると、 $\pi \langle a \rangle_\rho$  における既約表現の重複度についての結果が必要に思われるが、以下の証明ではそこを回避する議論をする。 $s$  を  $X$  の有限な multiset とし、 $R(s)_\rho$  を  $\{\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$  から生成される  $R(G)$  の部分群とする。 $d_G(R(s)_\rho) = R(s)_\rho$  であることはすぐに分

かる。いま、 $T_1$  を  $R(s)_\rho$  の基底  $\{\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$  に対する  $d_G$  の行列表示とし、 $T_2$  を基底  $\{\pi\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$  に対する  $d_G$  の行列表示とする。また、 $P$  をこの二つの基底の間の変換行列とする。Multisegmentの順序を使い基底の元を並べると、[8, Theorem 7.1] により、 $P$  は対角成分が全て 1 の上半三角行列になることが分かる。

**補題 3.6.**  $T_2$  は  $\rho$  によらない。

**証明.**  $a = \{\Delta_1, \dots, \Delta_t\}$  とすると、(1.4) と (3.1) により、

$$\begin{aligned} d_G(\pi\langle a \rangle_\rho) &= d_G(\langle \Delta_1 \rangle_\rho \times \cdots \times \langle \Delta_t \rangle_\rho) \\ &= \langle a_{\Delta_1} \rangle_\rho \times \cdots \times \langle a_{\Delta_t} \rangle_\rho \end{aligned}$$

となるが、ここで、命題 3.4 より

$$\langle a_\Delta \rangle_\rho = \sum (-1)^{|a_\Delta| - |b|} \pi\langle b \rangle_\rho$$

なので、 $T_2$  は  $\rho$  によらず決まっている。  $\square$

いま、 $T_2 = P^{-1}T_1P$  だが、 $d_G$  が既約表現の間の置換をひきおこすので  $T_1$  は置換行列となり、これは  $T_2$  の Bruhat 分解を与えている。よって、 $T_1$  は  $T_2$  から一意的に決まるので、補題 3.6 より、 $T_1$  が  $\rho$  によらないことが分かる。(行列  $P$  自身が  $\rho$  によっているかどうかは証明に必要ない。)  $\square$

以下、同様の議論により、 $d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho$  を示していく。まず、(1.4) と (3.1) により、次の補題が示される。

**補題 3.7.**

$$d_G(\pi\langle a \rangle_\rho) = \pi[a]_\rho。$$

また、(3.1) と同様に

$$[a_\Delta]_\rho = \langle \Delta \rangle_\rho = d_G(\langle a_\Delta \rangle_\rho)$$

がいえる。よって、命題 3.4 を次のように言い換えることができる。

**命題 3.8.**

$$[a_\Delta]_\rho = \sum (-1)^{|a_\Delta| - |b|} \pi[b]_\rho。$$

但し、和は  $a_\Delta$  から elementary operation を繰り返して得られる  $b \in M$  をはしる。

**命題 3.9.**

$$d_G(\langle a \rangle_\rho) = [a]_\rho。$$

**証明.**  $s$  を  $X$  の multiset とし、 $R(s)_\rho$  の基底として、 $\{\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$ 、 $\{[a]_\rho \mid s(a) = s\}$ 、 $\{\pi\langle a \rangle_\rho \mid s(a) = s\}$ 、 $\{\pi[a]_\rho \mid s(a) = s\}$  をとる。命題 3.5 の証明と同様に  $M$  の順序を使い基底の元を並べておく。いま、 $P_1$  を基底  $\{\langle a \rangle_\rho\}$  と基底  $\{\pi\langle a \rangle_\rho\}$  の間の変換行列とし、 $P_2$  を基底  $\{[a]_\rho\}$

と基底  $\{\pi[a]_\rho\}$  の間の変換行列とする。命題 3.5 の証明と同様に  $P_1$  は対角成分が 1 の上半三角行列となるが、Langlands 分類により、 $P_2$  も対角成分が 1 の上半三角行列となることが分かる。ここで、 $d_G$  を基底  $\{[a]_\rho\}$  をもつ空間  $R(s)_\rho$  から基底  $\{[a^\sharp]_\rho\}$  をもつ空間  $R(s)_\rho$  への写像とみたときの行列表示を  $T_1$  とし、 $d_G$  を基底  $\{\pi[a]_\rho\}$  をもつ空間  $R(s)_\rho$  から基底  $\{\pi[a]_\rho\}$  をもつ空間  $R(s)_\rho$  への写像とみたときの行列表示を  $T_2$  とする。このとき、補題 3.7 により  $T_2$  は単位行列であることがわかる。ここで、 $T_1 = P_2 T_2 P_1^{-1} = P_2 P_1^{-1}$  で  $T_1$  は置換行列なので、 $T_1$  が単位行列であることがいえる。□

命題 3.9 により、定理 3.3 を次のように言い換えることができる。

系 3.10.

$$d_G([a]_\rho) = [a^\sharp]_\rho.$$

#### 4. $GL_n$ の A-PACKET

いま  $d_G$  と  $i_M^G$  は可換なので、Arthur parameter  $\psi$  が elliptic のときのみを考えればよい。よって、Arthur parameter

$$\psi = \tau \times \rho_s \times \rho_t : W_F \times SU_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$$

が  $W_F \times SU_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C})$  の既約表現であると仮定する。ここで、 $\tau$  は  $W_F$  の  $r$  次元の既約表現で、 $\rho_s$  は  $s$  次元の  $SU_2(\mathbb{C})$  の既約表現、 $\rho_t$  は  $t$  次元の  $SL_2(\mathbb{C})$  の既約表現とする。既約表現  $\tau$  に対応する  $GL_r(F)$  の supercuspidal 表現を  $\sigma$  とし、

$$\rho = \sigma \nu^{-\frac{s-t+2}{2}}$$

$$n = rst$$

とおく。このとき、 $a \in \mathcal{M}$  を例 2.1 のようにとると、

$$\Pi_\psi(GL_n) = \{[a]_\rho\}$$

$$\Pi_{d(\psi)}(GL_n) = \{[a^\sharp]_\rho\}$$

であることが分かる。いま、系 3.10 により、

$$d_G([a]_\rho) = [a^\sharp]_\rho$$

なので、次の定理がいえる。

定理 4.1.  $G = GL_n$  のとき、予想 1.2 は正しい。

#### REFERENCES

- [1] Arthur, J. Unipotent automorphic representations: conjectures. *Orbites unipotentes et représentations, II*. Astérisque 171-172 (1989), 13–71.
- [2] Aubert, A.-M. Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif  $p$ -adique. *Trans. Amer. Math. Soc.* 347 (1995), no. 6, 2179–2189.



- [3] Aubert, A.-M. Erratum: "Duality in the Grothendieck group of the category of finite-length smooth representations of a  $p$ -adic reductive group" *Trans. Amer. Math. Soc.* 348 (1996), no. 11, 4687–4690.
- [4] Bernstein, I. N.; Zelevinsky, A. V. Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. I. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 10 (1977), no. 4, 441–472.
- [5] Kato, S. Duality for representations of a Hecke algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.* 119 (1993), no. 3, 941–946.
- [6] Mœglin, C.; Waldspurger, J.-L. Sur l'involution de Zelevinski. *J. Reine Angew. Math.* 372 (1986), 136–177.
- [7] Zelevinski, A. V. The  $p$ -adic analogue of the Kazhdan-Lusztig conjecture. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 15 (1981), no. 2, 9–21, 96.
- [8] Zelevinsky, A. V. Induced representations of reductive  $p$ -adic groups. II. On irreducible representations of  $GL(n)$ . *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 13 (1980), no. 2, 165–210.

*E-mail address:* hiraga@kusm.kyoto-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY,  
KYOTO 606-8502, JAPAN