数理解析研究所講究録 1323 巻 2003 年 27-32

Motion of forced curvature flow on the strip domain

龍谷大学 理工学部
二宮 広和 (Hirokazu Ninomiya)†
Ryukoku University,
Department of Applied Mathematics and Informatics
東京工業大学大学院 情報理工学研究科
谷口 雅治 (Masaharu Taniguchi)
Tokyo Institute of Technology,
Department of Mathematical and Computing Sciences

自然界の多くの現象では，界面が観察されることが多い．いくつかの物理的・化学的な相が共存する際には，その境界として界面が現れる．物理的・化学的な相自信は観察しにくい状態でも，界面がその境界として観察されることもある．界面の動きは，相の動きを特徴的に表しており，界面の運動は，応用数学の重要な問題の一つである．

本講演では，平面 $\mathbf{R}^2$ 上の界面について考察する．まず，界面を定義しよう．$(\Gamma(t), \boldsymbol{\nu})$ が 界面 (*interface*) であるとは，以下を満たす $\mathbf{R}^2$ における集合の族 $\{D(t)\}$ が存在するときをさすことにする．

- $D(t)$ は連結な開集合で，$\Gamma(t) = \partial D(t)$ を満たす．
- $\boldsymbol{\nu}$ は，$\Gamma(t)$ における $D(t)$ の外向き単位法線ベクトルである．

この定義は，自己交差しないような界面に注目していることに注意する．

以下を満たすような界面 $(\Gamma(t), \boldsymbol{\nu})$ を考えよう．

$$V = H + k. \tag{1}$$

ここで，V は界面の法線速度，H は $\Gamma(t)$ の曲率，k は定数である．この方程式は，応用数学の様々な問題に現れる．例えば，Allen–Cahn 方程式の遷移相問題 [7], Ginzburg–Landau 方程式の平面に制限された渦の方程式 [5], BZ 反応 [13] などが挙げられる．$k = 0$ の場合は，曲線短縮方程式と呼ばれ，初期状態で自己交差しなければ，時間が経っても自己交差することなく “丸く” なりながら 1 点に収縮することが知られている ([8, 9] 参照)．$k \neq 0$ の場合は，初期状態で自己交差しなくても，時間が経つと自己交差することが分かる．

†この研究は，部分的に龍谷大学理工基金の補助を受けている．

界面が $y=u(x,t)$ というグラフで表現される場合には，方程式 (1) は，

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1+u_x^2} + k\sqrt{1+u_x^2} \qquad x \in \mathbf{R},\, t>0, \tag{2}$$

に帰着される．この方程式の解の存在と一意性は，知られている ([4, 5, 12, 14] 参照)．また，この方程式は最大値の原理が成り立つことに注意する ([16] 参照)．

次に，(1) の進行波を定義しよう．例として，$\boldsymbol{\nu} = {}^t(-\sin\theta, \cos\theta)$ を法線とする直線 $y = x\tan\theta$ つまり，$D(t) = \{y < x\tan\theta\}$ を考えよう $(0<\theta<\pi/2)$．この直線は，$\boldsymbol{\nu}$ 方向には，速度 k で進んでいるが，${}^t(0,1)$ 方向（y 軸方向）には速度 $k/\cos\theta$ で進んでいる．従って，進行波を定義する際には，速度も明記するのが望ましい．界面 $(\Gamma(t), \boldsymbol{\nu})$ が速度 $\boldsymbol{v}$ の進行波 (*traveling front*) とは $\Gamma(t) = \Gamma(0) + \boldsymbol{v}t$ を満たすときである．上の例は，速度 $k\boldsymbol{\nu}$ の進行波あるいは速度 ${}^t(0, k/\cos\theta_*)$ の進行波と区別することができる．特に混同のないときは，$\boldsymbol{v}$ を省略する．

Deckelnick 等は [5] で進行波の存在と初期値 u_0 の強い制限の下で安定性を示している．著者等は，[14, 15] において，Deckelnick 等の結果を拡張した以下のような結果を得た ([14, Proposition 1.1 および Theorem 1.2] 参照)．

定理 1 界面方程式 (1) の速度 ${}^t(0,c)$ の進行波は平行移動を除いて以下のいずれかである．

(i) 直線 $y = x\tan\theta_*$ あるいは直線 $y = -x\tan\theta_*$
(ii) 2 直線 $y = \pm x\tan\theta_*$ に漸近する進行波 $\Gamma_c(t)$
(iii) 速度 c が 0 の場合には半径 $1/|k|$ の円

ここで，$\theta_* = \arctan(\sqrt{c^2-k^2}/k)$ とする．その上，$\Gamma_c(t) = \{y = \varphi(x) + ct\}$ は

$$\begin{aligned} x(\theta;c) &:= \frac{\theta}{c} + \frac{k}{c\sqrt{c^2-k^2}} \log\left| \frac{1+\sqrt{\frac{c+k}{c-k}}\tan\frac{\theta}{2}}{1-\sqrt{\frac{c+k}{c-k}}\tan\frac{\theta}{2}} \right|, \\ y(\theta;c) &:= -\frac{1}{c}\log\left(\frac{c\cos\theta - k}{c-k}\right) \end{aligned}$$

と $\theta \in (-\theta_*, \theta_*)$ を用いて具体的に媒介変数表示できる．

進行波 $\Gamma_c(t)$ は “V-字型” であることに注意する．この V 字型進行波の存在は [3, 5, 7] でも調べられているが，具体的な表現は得られていなかった．

上の定理の証明は，

- 進行波は必ず進行速度に垂直な直線からのグラフになること
- (2) のすべての進行波は上記の３つに限ること

を示すことによって得られる (詳しくは, [14, Lemma 2.3] 参照). 実際, (2) の進行波は,

$$u_{xx} = f(u_x)$$

を満たすことを用いる. ここで,

$$f(v) := c(1+v^2) - k(1+v^2)^{3/2}$$

である.

定理 1 (ii) の場合, ２つの漸近線の傾きは $\pm\tan\theta_*$ であり, ２直線のなす角は $\theta^* := \pi - 2\theta_*$ となる. V 字型進行波 $\Gamma_c(t)$ の速度 c は, ２つの漸近線のなす角 θ^* (あるいは θ_*) を用いて $c = k/\cos\theta_*$ と一意的に決まる. これは, 漸近線 $y = \pm x\tan\theta_*$ が ${}^t(0,1)$ 方向に動く速度と一致している. この形の進行波は, BZ 反応でも観察される ([13]) ことから, 安定であることが予想される. 実際, V 字型進行波は安定であることが, [5, 15] で示されている. 先に述べたように [5] に課されている条件が強いので, [15] においてその条件をはずしている. その際, 定理 1 の具体的表現を有効に用いる必要がある.

定理 2 初期値 u_0 の摂動が

$$BC_0^1 := \{v \in C^1(\mathbf{R}) \mid \sup_{-\infty<x<\infty}(|v(x)| + |v_x(x)|) < \infty,\ \lim_{|x|\to\infty} v(x) = 0\}.$$

の内のとき, (2) の解から決まる V 字型進行解は漸近安定である. 更に, 大域的に漸近安定である.

[15] で示されている V 字型進行波の大域的漸近安定性とは, θ^* ($\theta^* < \pi$) で交わる２直線に漸近する界面を初期値とすると, 時間が無限大では V 字型進行波に収束する. この際, 平行移動の自由度なしで V 字型進行波に収束するので, Allen-Cahn 方程式などの進行波解の場合の漸近安定性 (軌道安定性) とは異なっていることに注意する.

しかし, 摂動の空間を BC_0^1 以外にすると安定でなくなることもある. 例えば, 空間

$$BC^1 := \{v \in C^1(\mathbf{R}) \mid \sup_{-\infty<x<\infty}(|v(x)| + |v_x(x)|) < \infty\},$$

を摂動の空間として選ぶと，時間が経っても V 字型進行波に収束しない．つまり，任意の $\epsilon > 0$ に対して，(1) を満たす界面 $\Gamma(t)$ で，

$$\mathrm{dist}(\Gamma(0), \Gamma_c(0)) \le 4\epsilon, \quad \Gamma(t) \cap \left(\Gamma_c(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right) \neq \emptyset, \quad \Gamma(t) \cap \left(\Gamma_c(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon \end{pmatrix} \right) \neq \emptyset$$

$(t \ge 0)$ を満たすようなものが存在する．このような例は，遠方で漸近線の周りを振動することによって構成している (詳細は [15, Theorem 4.1] 参照)．また，

$$\lim_{x \to \pm\infty} v(x) = p_\pm$$

のときには，V 字型進行波を平行移動したものに収束する．

また，[14, Lemma 3.2] で報告されているように，(1) は $x = 0$ で y 軸と平行になる速度 c の (半平面 $\{x > 0\}$ 上) 進行波 $\Gamma_c^*(t) = \{y = \varphi^*(x) + ct\}$ ももつ．具体的な媒介変数表示は以下の通りである．

$$\begin{aligned} x^*(\theta) &:= \frac{2\theta - \pi}{2c} + \frac{k}{c\sqrt{c^2 - k^2}} \log \frac{\left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} \tan\frac{\theta}{2} + 1\right)\left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} - 1\right)}{\left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} \tan\frac{\theta}{2} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{c+k}{c-k}} + 1\right)}, && (3) \\ y^*(\theta) &:= -\frac{1}{c} \log \frac{k - c\cos\theta}{k} && (4) \end{aligned}$$

この解が定理 2 の大域的漸近安定性を示すために用いられている．

上の例が示しているように，全領域と半平面では，進行波の種類に若干の違いがある．次に帯領域での運動を考える．つまり，界面がグラフで描ける場合には以下の方程式を満たす．

$$u_t = \frac{u_{xx}}{1 + u_x^2} + k\sqrt{1 + u_x^2} \qquad x \in (0, 1),\ t > 0, \tag{5}$$

初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x) \qquad x \in (0, 1) \tag{6}$$

境界条件

$$u_x(0, t) = \tan\alpha_0,\ u_x(1, t) = \tan\alpha_1, \qquad t > 0. \tag{7}$$

Altschuler–Wu [1, 2] は初期条件 (6), 境界条件 (7) をもつ次の方程式

$$u_t = a(u_x)_x \tag{8}$$

の解の挙動を考察した．ここで $a(\cdot)$ は滑らかで $a' > 0$ とする．彼らは，すべての解は，全領域における進行波のある部分に収束することを示した．

方程式 (5) は (8) の範疇でないが，同様の結果が成り立つことが分かる．

方程式 (5)-(7) の帯領域上での進行波 $y = u(x) + ct$ は，α_i $(i = 0, 1)$ により一意的に決まる．実際，関数

$$F(c) := \int_{\tan\alpha_0}^{\tan\alpha_1} \frac{dv}{f(v)}$$

を用いて速度 c は

$$F(c) = 1$$

と表される．簡単な解析から $\alpha_1 > \alpha_0$ のとき，$F(c)$ が単調減少，$\alpha_1 < \alpha_0$ のとき，単調増加であることが分かる．こうして，c の一意的存在が分かり，収束先の進行波の一意的存在が従う．

参考文献

[1] S. J. Altschuler and L.-F. Wu, Convergence to translating solutions for a class of quasilinear parabolic boundary problems, *Math. Ann.*, **295**, (1993) 761–765.

[2] S. J. Altschuler and L.-F. Wu, Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle, *Calc. Var.*, **2**, (1994) 101–111.

[3] P. K. Brazhnik, Exact solutions for the kinematic model of autowaves in two-dimensional excitable media, *Physica D*, **94**, (1996) 205–220.

[4] K.-S. Chou and Y.-C. Kwong, On quasilinear parabolic equations which admit global solutions for initial data with unrestricted growth, *Calc. Var. Partial Differential Equations* **12-3**, (2001), 281–315.

[5] K. Deckelnick, C. M. Elliott, and G. Richardson, Long time asymptotics for forced curvature flow with applications to the motion of a superconducting vortex, *Nonlinearity* **10** (1997), 655–678.

[6] K. Ecker, and G. Huisken, Mean curvature evolution of entire graphs, *Ann. of Math.* **130-3** (1989), 453–471.

[7] P. C. Fife, *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces* (CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math. 53), SIAM (1988).

[8] M. Gage, and R. S. Hamilton, The heat equation shrinking convex plane curves, *J. Diff. Geom.* **23** (1986), 69–96.

[9] M. A. Grayson, The heat equation shrinks embedded plane curves to round points, *J. Diff. Geom.* **26** (1987), 285–314.

[10] M. A. Grayson, A short note on the evolution of a surface by its mean curvature, *Duke Math. J.* **58** (1989), 555–558.

[11] HUISKEN, Nonparametric mean curvature evolution with boundary conditions, *J. Differential Equations*, **77**, (1989) 369–378.

[12] O.A., Ladyženskaja, V.A. Solonnikov, and N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Translations of Mathematical Monographs 24, Providence RI, (1968), American Mathematical Society.

[13] V. Pérez-Muñuzuri, M. Gómez-Gesteira, A. P. Muñuzuri, V. A. Davydov, and V. Pérez-Villar, V-shaped stable nonspiral patterns, *Physical Review E* **51-2** (1995), 845–847.

[14] H. Ninomiya and M. Taniguchi, Traveling curved fronts of a mean curvature flow with constant driving force, in "*Free boundary problems: theory and applications, I*" *GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* **13** (2000), 206–221.

[15] H. Ninomiya and M. Taniguchi, Stability of traveling curved fronts in a curvature flow with driving force, to appear in *Methods and Application of Analysis.*

[16] M. H. Protter and H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, (1984) Springer-Verlag.