数理解析研究所講究録 1324 巻 2003 年 107-116

Exact Hermitian Cubes and the Zagier Conjecture

九州大学・数理学研究院　竹田　雄一郎 (Yuichiro Takeda)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

Zagier は、有限次代数体の regulator 写像が polylogarithm とよばれる次の関数

$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}, \quad |z| < 1$$

の値をつかって記述できる、ということを予想した [10]。この予想については、Deligne と Beilinson による、混合モチーフの理論を用いての結果 [2] が有名だが、この小文では、Burgos と Wang による higher Bott-Chern form の理論を用いて、それと全く同じ結果が得られることを説明する。なお、ここでは、この報告集の筆者のもう一つの記事"Higher Arithmetic K-Theory"にでてきた記号を、断りなく使用する。

1. The higher Bloch group

はじめに、記号の定義をする。任意のアーベル群 M に対して、$M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする。Polylogarithm function $Li_k(z)$ (以後 polylog 関数とよぶ) は、複素平面上に meromorphic に解析接続され、$\mathbb{C} - \{0,1\}$ で正則な多価関数になる。一方、

$$P_m(z) = \mathcal{R}_m\left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{2^k B_k}{k!}(\log|z|)^k Li_{m-k}(z)\right)$$

は、$\mathbb{C} - \{0,1\}$ 上の一価な実解析関数になる。ここで $\mathcal{R}_m$ は、m が奇数のときは実数部分をとり、偶数のときは虚数部分をとるという意味で、B_k は k 番目の Bernoulli 数とする。

F を有限次代数体とする。Σ_F を F から複素数体への埋め込み全体のなす集合とし、X_F を Σ_F で生成される自由アーベル群とする。すると、Σ_F や X_F には複素共役 ι が自然に作用する。このとき、F の regulator 写像は次のような形に書ける。

$$\rho_F : K_{2m-1}(F)_{\mathbb{Q}} \to (X_F \otimes \mathbb{R}(m-1))^{\iota=\mathrm{id}}.$$

ここで、Zagier 予想の定式化に不可欠な、高次 Bloch 群の定義を述べよう。

$$\beta_2 : \mathbb{Q}[F^\times - \{1\}] \to F^\times_{\mathbb{Q}} \wedge F^\times_{\mathbb{Q}}$$

を $[x] \mapsto x \wedge (1-x)$ で定義する。この写像の kernel を $\mathcal{A}_2(F)$ で表し、$\mathcal{C}_2(F)$ を次の形で与えられる $\mathcal{A}_2(F)$ の部分加群とする。

$$\mathcal{C}_2(F) = \left\{ \sum_i n_i[x_i] \in \mathcal{A}_2(F); \sum_i n_i P_2(x_i^\sigma) = 0 \text{ for any } \sigma \in \Sigma_F \right\}.$$

商加群 $\mathcal{B}_2(F) = \mathcal{A}_2(F)/\mathcal{C}_2(F)$ を F の Bloch 群とよぶ。

次に、高次 Bloch 群を帰納的に定義する。$m \geq 3$ とし、$\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]$ の部分加群 $\mathcal{A}_{m-1}(F)$ と、さらにその部分加群 $\mathcal{C}_{m-1}(F)$ が、すでに定義されているとする。

$$\beta_m : \mathbb{Q}[F^\times - \{1\}] \to F_{\mathbb{Q}}^\times \otimes \left(\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F)\right)$$

を $\beta_m([x]) = x \otimes [x]$ で定義する。その kernel を $\mathcal{A}_m(F)$ で表し、$\mathcal{C}_m(F)$ を次のように与えられる $\mathcal{A}_m(F)$ の部分加群とする。

$$\left\{ \sum_i n_i[x_i] \in \mathcal{A}_m(F); \sum_i n_i P_m(x_i^\sigma) = 0 \text{ for any } \sigma \in \Sigma_F \right\}.$$

商加群 $\mathcal{B}_m(F) = \mathcal{A}_m(F)/\mathcal{C}_m(F)$ を F の m 次 Bloch 群とよぶ。

Conjecture 1.1 ([10]). $m \geq 2$ とする。有限次代数体 F の高次 *Bloch* 群と有理 K 群との間の同型 $\mathcal{B}_m(F) \simeq K_{2m-1}(F)_{\mathbb{Q}}$ で、*regulator* 写像との合成

$$\mathcal{B}_m(F) \simeq K_{2m-1}(F)_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\rho} (X_F \otimes \mathbb{R}(m-1))^{\bar{\iota}=\mathrm{id}}$$

が

$$\sum_i n_i[x_i] \mapsto \left((\sqrt{-1})^{\alpha_m} \sum_i n_i P_m(x_i^\sigma) \right)_{\sigma \in \Sigma_F}$$

と表せるものが存在する。ただし α_m は、m が奇数のとき 0 で、偶数のとき 1 とする。

ここでは、条件をみたす写像 $\mathcal{B}_m(F) \to K_{2m-1}(F)_{\mathbb{Q}}$（これは Borel の定理から単射であることがわかるので、存在すれば一意的）の、higher Bott-Chern form の理論をつかった構成方法について述べる。

高次 Bloch 群について、筆者は次のように理解している。まず、写像 β_m の値域である $F_{\mathbb{Q}}^\times \otimes (\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F))$ については、$F_{\mathbb{Q}}^\times$ は $K_1(F)_{\mathbb{Q}}$ と同型で、$\mathcal{B}_{m-1}(F)$ は $(\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F))$ の部分加群である。したがって、もし Zagier 予想が $m-1$ で正しいと認めるならば、β_m の値域には $K_1(F)_{\mathbb{Q}} \otimes K_{2m-3}(F)_{\mathbb{Q}}$ が含まれている。K 理論は積をもつから、$\mathcal{B}_{m-1}(F)$ と $(\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F))$ の相違に目をつぶると、$F_{\mathbb{Q}}^\times \otimes$

$(\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F))$ の元から自然な形で $K_{2m-2}(F)_\mathbb{Q}$ の元をつくることができる。(実際は $K_{2m-2}(F)_\mathbb{Q} = 0$ だが、ここでは気にしない。)

ここで、空間のホモロジーとの類似で考えることにして、次の要請をする。今、$m-1$ で Zagier 予想が正しいことを仮定したが、$K_*(F)_\mathbb{Q}$ が何か空間のホモロジーとして表現されているとして、写像 $\mathcal{B}_{m-1}(F) \to K_{2m-3}(F)_\mathbb{Q}$ はただのホモロジー群への写像というだけではなくて、$\mathcal{B}_{m-1}(F)$ の元に対してその空間の $2m-3$ 次元の cycle を対応させていると仮定する。もちろん同型 $F_\mathbb{Q}^\times \simeq K_1(F)_\mathbb{Q}$ についても同じ要請をする。すると、$F_\mathbb{Q}^\times \otimes (\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F))$ の元から、その空間の $2m-2$ 次元の cycle をつくることができる。

次に写像 β_m 自身であるが、これは $F_\mathbb{Q}^\times \otimes (\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F))$ の元からつくられる cycle によって代表される $K_{2m-2}(F)_\mathbb{Q}$ の元が消えるとき、その cycle を bound する $2m-1$ 次元の chain を与えていると考えられる。すると、例えば二つの元 $a, b \in \mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]$ が $\beta_m(a) = \beta_m(b)$ をみたすならば、a と b は同じ $2m-2$ 次元の cycle を bound しているので、その差 $a-b$ は boundary をもたない、つまり $2m-1$ 次元の cycle になる。$\mathcal{B}_m(F)$ の元はこのような $a-b$ たちの集まりなので、こうして $\mathcal{B}_m(F)$ の元に対して空間の $2m-1$ 次元の cycle を対応させることができ、そのホモロジーをとることによって、$\mathcal{B}_m(F) \to K_{2m-1}(F)_\mathbb{Q}$ が得られる。

高次 Bloch 群に対するこのような見方は、全く数学的な厳密さを欠いている。しかし、高次算術的 K 理論の exact sequence も、これと同じ見方から説明することが可能である。つまり、Bloch 群の exact sequence

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{B}_m(F) \to \mathbb{Q}[F^\times - \{1\}] \to F_\mathbb{Q}^\times \otimes \left(\mathbb{Q}[F^\times - \{1\}]/\mathcal{C}_{m-1}(F)\right)$$

と算術的 K 理論の exact sequence

$$K_{n+1}(X) \to \widetilde{\mathfrak{D}}_{n+1}(X) \to \widehat{K}_n(X) \to K_n(X) \to 0.$$

には、形式的な類似が存在する。ここで注意したいことは、"Higher Algebraic K-theory" では、整数環の上で定義されたスキームに対して算術的 K 理論を定義したが、$\mathbb{Q}$ 上で定義された多様体でも、全く同じ議論でその算術的 K 群を定義して exact sequence を証明することができる、ということである。特に $X = \operatorname{Spec} F$ かつ $n = 2m-2$ として、上の exact sequence を $\mathbb{Q}$ 係数に拡大すると、

$$(2) \qquad 0 \to K_{2m-1}(F)_\mathbb{Q} \xrightarrow{\rho} (X_F \otimes \mathbb{R}(m-1))^{\bar{\iota}=\mathrm{id}} \to \widehat{K}_{2m-2}(F)_\mathbb{Q} \to 0$$

が得られる。ここで、左の写像は F の regulator 写像である。したがって、もし (1) から (2) への exact sequence の間の自然な写像を構成することができれば、Zagier の予想のうち、Bloch 群から K 群への写像の構成の部分は証明できるだろう、というのがもともとの筆者の発想であった。実際、代数体の奇数次の算術的 K 群は通常の K 群と同型で、算術的 K 群は積構造をもつので、写像 $\mathcal{B}_{m-1}(F)\to K_{2m-3}(F)_{\mathbb{Q}}$ の存在を仮定すると、

$$\Phi : F_{\mathbb{Q}}^{\times}\otimes\mathcal{B}_{m-1}(F)\to K_1(F)_{\mathbb{Q}}\otimes K_{2m-3}(F)_{\mathbb{Q}}\simeq\widehat{K}_1(F)_{\mathbb{Q}}\otimes\widehat{K}_{2m-3}(F)_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\cup}\widehat{K}_{2m-2}(F)_{\mathbb{Q}}$$

も既に存在している。したがって、示したいことは、次の二つである。一つは、β_m の像は $F_{\mathbb{Q}}^{\times}\otimes\mathcal{B}_{m-1}(F)$ に含まれないので、Φ の定義域を、β_m の像を含むように拡張することである。二つめは、その拡張された写像 $\widetilde{\Phi}$ の定義域を I_m としたときに、図式

$$\begin{array}{ccc}
(X_F\otimes\mathbb{R}(m-1))^{\bar{\iota}=\mathrm{id}} & \longrightarrow & \widehat{K}_{2m-2}(F)_{\mathbb{Q}}\\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\widetilde{\Phi}}\\
\mathbb{Q}[F^{\times}-\{1\}] & \xrightarrow{\beta_m} & I_m
\end{array}$$

が可換になることを示すことである。ここで、左の上向き写像は、Zagier 予想にでてきた、polylog 関数からつくられる写像

$$\sum_i n_i[x_i]\mapsto\left((\sqrt{-1})^{\alpha_m}\sum_i n_i P_m(x_i^{\sigma})\right)_{\sigma\in\Sigma_F}$$

である。この可換図式が証明できれば、上下の写像の kernel をとることによって、$\mathcal{B}_m(F)$ から $K_{2m-1}(F)_{\mathbb{Q}}$ への写像が構成できる。こうして高次 Bloch 群から K 群への写像を帰納的に構成していく、というのが、筆者の最初のアイデアだった。

2. The main results

主結果を述べる前に、もう一度 McCarthy の結果 [7] と、Burgos-Wang の結果 [5] を思い出そう。X を $\mathbb{Q}$ 上で定義された非特異代数多様体とする。X 上の hermitian vector bundle とは、X 上の vector bundle E と、その $X(\mathbb{C})$ 上への拡張 $E(\mathbb{C})$ の複素共役で不変な hermitian metric h の組 (E,h) のことである。X 上の hermitian vector bundle からつくられる exact cube を、X 上の exact hermitian cube という。X 上で定義された exact hermitian cube からつくられる $\mathbb{Q}$ 加群の複体を、$\widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_*(X)$ で表す。すると、McCarthy の定理 [7] により、

この複体のホモロジーは X の有理 K 群と同型になる。

$$H_n(\widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_*(X)) \simeq K_n(X)_{\mathbb{Q}}.$$

$\mathcal{F}$ を X 上の exact hermitian n-cube、$\mathcal{G}$ を X 上の exact hermitian m-cube とすると、各成分の tensor product をとることによって、X 上の exact hermitian $(n+m)$-cube $\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}$ を定義することができる。これは複体 $\widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_*(X)$ の積を導く。したがって、$H_*(\widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_*(X))$ には積構造が入るが、上の McCarthy の同型によって、それは K 群の積構造と一致する。

X が $\mathbb{Q}$ 上完備のとき、exact hermitian n-cube $\mathcal{F}$ からその Bott-Chern form $\mathrm{ch}(\mathcal{F})$ への対応は、複体の写像

$$\mathrm{ch}: \widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_*(X) \to \mathcal{D}_*(X)$$

を導き、両辺のホモロジーをとって得られる写像

$$K_n(X)_{\mathbb{Q}} \simeq H_n(\widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_*(X)) \to H_n(\mathcal{D}_*(X)) \simeq \oplus_p H_{\mathcal{D}}^{2p-n}(X;\mathbb{R}(p))$$

は、X の regulator 写像と一致する。

X が $\mathbb{Q}$ 上完備でないとき、$\mathrm{ch}_n(\mathcal{F})$ を $X(\mathbb{C})$ 上の微分形式として定義することはできるが、もうこれは X の regulator 写像を記述しない。その理由は、higher Bott-Chern form が含まれる微分形式の複体を、適切に定義できないことにある。($\mathcal{D}^*(X,p)$ は形式的に定義できるが、X のよいコホモロジーを定義しない。) しかし X が非特異曲線のとき、

$$\mathrm{ch}_{n-1}(\partial\mathcal{F}) = -d\,\mathrm{ch}_n(\mathcal{F})$$

が $n \geq 2$ のときになりたつ。したがって、X 上の higher Bott-Chern form は、$n \geq 2$ のとき、X の K 群から X の de Rham コホモロジーへの写像を与える。

さて、先に Zagier 予想に対する筆者のアイデアを述べたが、実際の構成の方法は、少なくとも見かけの上では、それとは大きく異なっている。これは当初のアイデアが誤りだったわけではなくて、それを実現しようと考えていくにつれて、算術的 K 理論をつかわない、よりよい表現の仕方を見つけた、ということである。では、ここで Bloch 群から K 群への写像を構成するための実際の戦略を説明しよう。

最初に、polylog 関数がみたす微分方程式を見つける。次に、higher Bott-Chern form をとるとちょうどその微分方程式になるような $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} - \{0,1,\infty\}$ 上の exact hermitian cube の方程式をつくる。そして、polylog 関数がその微分方程式の解であることをつかって、その exact hermitian cube の方程式も解けること、そしてその解の Bott-Chern form が polylog 関数で書けることを示す。この exact hermitian cube の方程式の解は、exact cube の複体

の中で closed ではないが、その解を $\mathcal{A}_m(F)$ に制限すると Spec F の exact hermitian cube として closed になって $K_{2m-1}(F)_{\mathbb{Q}}$ の元を与える。

この方法を実行するための鍵のひとつが、higher Bott-Chern form の積公式である。

Proposition 2.1. [8, Thm.4.2] *$\mathcal{F}$ を X 上の exact hermitian n-cube、$\mathcal{G}$ を X 上の exact hermitian m-cube とすると、*

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}_{n+m}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{G}) &= \mathrm{ch}_n(\mathcal{F})\bullet\mathrm{ch}_m(\mathcal{G}) + (-1)^{n+1}d_{\mathcal{D}}(\mathrm{ch}_n(\mathcal{F})\vartriangle\mathrm{ch}_m(\mathcal{G}))\\ &\quad + (-1)^n\,\mathrm{ch}_{n-1}(\partial\mathcal{F})\vartriangle\mathrm{ch}_m(\mathcal{G}) - \mathrm{ch}_n(\mathcal{F})\vartriangle\mathrm{ch}_{m-1}(\partial\mathcal{G})\end{aligned}$$

がなりたつ。ここで、$x\in\mathcal{D}^{2p-n}(X,p)$ と $y\in\mathcal{D}^{2q-m}(X,q)$ に対して、

$$x\bullet y = \begin{cases} x\wedge y, & nm=0,\\ (-1)^n(\partial x^{(p-1,p-n)} - \overline{\partial}x^{(p-n,p-1)})\wedge y & \\ \qquad + x\wedge(\partial y^{(q-1,q-m)} - \overline{\partial}y^{(q-m,q-1)}), & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

であり、

$$x\vartriangle y = \begin{cases} 0, & nm=0,\\ \displaystyle\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} a_{i,j}^{n,m}x^{(p-n+i-1,p-i)}\wedge y^{(q-m+j-1,q-j)}, & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

である。ただし $a_{i,j}^{n,m}$ は以下のような有理数である。

$$a_{i,j}^{n,m} = 1 - 2\binom{n+m}{n}^{-1}\sum_{\alpha=0}^{i-1}\binom{n+m-i-j+1}{n-\alpha}\binom{i+j-1}{\alpha}.$$

では、より詳しく筆者の方法を述べよう。まず、polylog 関数の微分方程式であるが、$P_m(z)$ では exact cube の方程式からくるようなよい方程式をつくることができない。ここでは、$P_m(z)$ のかわりに、次のような一価関数を用いる。

$$I_m(z) = \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-\log|z|)^j}{j!}Li_{m-j}(z)$$

とし、

$$L_m(z) = \mathcal{R}_m\left(\sum_{0\le 2r<m}\frac{(-1)^r}{2^r r!}\frac{(\log|z|)^{2r}}{(2m-3)(2m-5)\cdots(2m-2r-1)}I_{m-2r}(z)\right)$$

とする。m が 3 以下のとき、この新しい関数 $L_m(z)$ は $P_m(z)$ と一致するが、$m \geq 4$ のときはそうでない。$m \geq 2$ のとき、$L_m(z)$ と $P_m(z)$ の間には次の関係式がなりたつ。

$$L_m(z) = \sum_{0 \leq 2i < m-1} \left(\sum_{r=0}^{i} \frac{(-1)^r}{2^r r!} \frac{1}{(2m-3)(2m-5)\cdots(2m-2r-1)\times(2i-2r+1)!} \right) (\log|z|)^{2i} P_{m-2i}(z).$$

ここで、右辺の中に $(\log|z|)^{m-1}P_1(z)$ の項がでてこないことに注意してほしい。この事実から、任意の元 $\sum_i n_i[x_i] \in \mathcal{A}_m(F)$ と $\sigma \in \Sigma_F$ に対して、

$$\sum_i n_i P_m(x_i^\sigma) = \sum_i n_i L_m(x_i^\sigma)$$

がなりたつことがわかる。このことは、高次 Bloch 群を定義したり Zagier 予想を定式化するときに、$P_m(z)$ をつかっても $L_m(z)$ をつかっても全く同じであることを意味している。

次の定理は、ただ計算するだけで証明できる。

Theorem 2.2. $m \geq 2$ のとき、$L_m(z)$ は、次の微分方程式をみたす。

$$(-1)^m dL_m(z) = Im\left(\frac{dz}{z}\right) L_{m-1}(z) - \frac{\sqrt{-1}}{2m-3} \log|z|(\bar{\partial} L_{m-1}(z) - \partial L_{m-1}(z)).$$

以下、$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ とする。z を X のパラメーターとする、つまり、X は $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Q}[z, 1/z, 1/(1-z)]$ と書けているとする。$f \in \mathcal{O}_X^\times$ に対して、$\langle f \rangle$ を次のような X 上の exact hermitian 1-cube とする。

$$0 \to \overline{\mathcal{O}_X} \xrightarrow{f} \overline{\mathcal{O}_X}.$$

ただし、$\overline{\mathcal{O}_X}$ は自然な metric の入った、X の定数層である。

Proposition 2.3. 次の条件をみたす $h_n(z) \in \widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_{2n-1}(X)$ が各 $n \geq 1$ に対して存在する。

(1) $h_1(z) = \langle z \rangle$.
(2) $\partial h_n(z) = \sum_{i=1}^{n-1} h_i(z) \otimes h_{n-i}(z)$.
(3) $n \geq 2$ のとき、$\mathrm{ch}_{2n-1}(h_n(z)) = 0$.

例えば、$\{z\} \cup \{z\}$ は $K_2(X)$ の元として 2-torsion になるので、$\langle z \rangle \otimes \langle z \rangle$ はある X 上の exact hermitian 3-cube によって bound されるが、$h_2(z)$ はちょうどそれにあたる。具体

的に $h_2(z)$ は、

$$
\begin{tikzcd}
\overline{\mathcal{O}_X} \arrow[rr, "z"] \arrow[dr, "z"] \arrow[dd, "z"'] & & \overline{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, "z"] \arrow[dd, "z"' near start] & \\
& \overline{\mathcal{O}_X} \arrow[rr, "z"] \arrow[dd, "1" near start] & & \overline{\mathcal{O}_X} \arrow[dd, "1"] \\
\overline{\mathcal{O}_X} \arrow[rr, "z"] \arrow[dr, "1"'] & & \overline{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, "1"'] & \\
& \overline{\mathcal{O}_X} \arrow[rr, "z"] & & \overline{\mathcal{O}_X}
\end{tikzcd}
$$

の $\frac{1}{2}$ 倍である。$n \geq 3$ では、もう $h_n(z)$ をこのように図示することはできないが、exact hermitian $(2n-1)$-cube の一次結合として具体的に表示することができる。

Theorem 2.4. $m \geq 1$ に対して、次の条件をみたす $\mathcal{L}_m(z) \in \widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_{2m-1}(X)$ が存在する。

(1) $\mathcal{L}_1(z) = -2\langle 1-z \rangle$.

(2) $m \geq 2$ のとき、$\partial \mathcal{L}_m(z) = \sum_{i=1}^{m-1} 2^i h_i(z) \otimes \mathcal{L}_{m-i}(z)$.

(3) $\mathrm{ch}_{2m-1}(\mathcal{L}_m(z))^{(0)}$ を $\mathrm{ch}_{2m-1}(\mathcal{L}_m(z))$ の次数 0 の部分とすると、

$$\mathrm{ch}_{2m-1}(\mathcal{L}_m(z))^{(0)} = (\sqrt{-1})^{\alpha_m} L_m(z)$$

がなりたつ。ただし α_m は、前に述べたように、m が奇数のとき 0 で、偶数のとき 1 とする。

証明のあらましを説明しよう。上の条件をみたす $\mathcal{L}_1(z), \cdots, \mathcal{L}_{m-1}(z)$ が存在すると仮定すると、$\sum_{i=1}^{m-1} 2^i h_i(z) \otimes \mathcal{L}_{m-i}(z)$ は closed であることがわかる。Higher Bott-Chern form の積公式をつかうと、$i \geq 2$ のとき $\mathrm{ch}_{2i-1}(h_i(z)) = 0$ だから、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ch}_{2m-2}\left(\sum_{i=1}^{m-1} 2^i h_i(z) \otimes \mathcal{L}_{m-i}(z)\right) = 2\,\mathrm{ch}_{2m-2}(\langle z \rangle \otimes \mathcal{L}_{m-1}(z)) \\
&= (-\sqrt{-1})^{\alpha_m}\left(Im\left(\frac{dz}{z}\right) L_{m-1}(z) - \frac{\sqrt{-1}}{2m-3} \log|z|(\bar{\partial} L_{m-1}(z) - \partial L_{m-1}(z))\right) \\
&= -(\sqrt{-1})^{\alpha_m} dL_m(z).
\end{aligned}
$$

がいえる。$m \geq 2$ のとき、higher Bott-Chern form からきまる写像

$$\mathrm{ch}_{2m-2} : K_{2m-2}(X)_{\mathbb{Q}} \to H^1_{dR}(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}(m-1))^{\bar{\iota}=\mathrm{id}}$$

は単射になることがわかるので、結局 $\sum_{i=1}^{m-1} 2^i h_i(z) \otimes \mathcal{L}_{m-i}(z)$ は exact、つまりある $\mathcal{L}_m(z) \in \widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_{2m-1}(X)$ の boundary として表せることがわかる。すると、

$$d\,\mathrm{ch}_{2m-1}(\mathcal{L}_m(z))^{(0)} = -\,\mathrm{ch}_{2m-2}(\partial \mathcal{L}_m(z)) = (\sqrt{-1})^{\alpha_m} dL_m(z)$$

なので、ある定数 $a_m \in \mathbb{R}(m-1)$ があって、

$$\mathrm{ch}_{2m-1}(\mathcal{L}_m(z))^{(0)} = (\sqrt{-1})^{\alpha_m} L_m(z) + a_m$$

と書ける。この定数を 0 にしてもよいことが、$\mathbb{Q}$ の regulator 写像の像に関する Borel の定理 [3] をつかって示すことができる。 □

こうして、その Bott-Chern form の次数 0 の部分が $(\sqrt{-1})^{\alpha_m} L_m(z)$ になるような $\mathcal{L}_m(z) \in \widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_{2m-1}(X)$ を構成することができた。最初の計画では、$\mathcal{L}_m(z)$ を $\mathcal{A}_m(F)$ に制限すると closed になり、K 群の元を定義することになっていたが、実際には closed にならない。しかし、次のことがいえる。

Theorem 2.5. $x \in F^{\times} - \{1\}$ に対し、$j_x : \mathrm{Spec}\, F \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ を対応する埋め込みとする。$\xi = \sum_i n_i[x_i] \in \mathcal{A}_m(F)$ に対し、

$$\mathcal{L}_m(\xi) = \sum_i n_i j_{x_i}^* \mathcal{L}_m(z) \in \widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_{2m-1}(F)$$

とする。このとき、次の条件をみたす写像

$$\mathcal{P}_m : \mathcal{A}_m(F) \to \widetilde{\mathbb{Q}}\widehat{C}_{2m-1}(F)$$

が存在する。

(1) $\mathrm{ch}_{2m-1}(\mathcal{P}_m(\xi)) = 0$.

(2) $\partial(\mathcal{L}_m(\xi) + \mathcal{P}_m(\xi)) = 0$.

この定理の主張していることは、$\mathcal{L}_m(\xi)$ は closed ではないが、Bott-Chern form が消える別の元 $\mathcal{P}_m(\xi)$ でもって、その boundary を閉じてしまうことができる、ということである。この定理から、$\xi \in \mathcal{A}_m(F) \mapsto \mathcal{L}_m(\xi) + \mathcal{P}_m(\xi)$ は m 次 Bloch 群から代数的 K 群への写像

$$\mathcal{B}_m(F) = \mathcal{A}_m(F)/\mathcal{C}_m(F) \to K_{2m-1}(F)_{\mathbb{Q}}$$

を与え、これが Zagier の予想の条件をみたすものであることがわかる。

Remark. 報告集の締め切り間際にある方から、関数 $L_m(z)$ は、A. Levin [1] によって定義されている $\widetilde{L}_r$ と定数倍を除いて同じである、という指摘をいただきました。Thm.2.2 の微分方程式も、彼によって証明されています。

References

[1] A. Levin, *Note on $\mathbb{R}$-Hodge-Tate sheaves*, preprint.

[2] A. Beilinson and P. Deligne, *Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs*, in Motives, Proc. Sym. in Pure Math. vol.55, part 2, American Mathematical Society, 1994, pp.97–121.

[3] A. Borel, *Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **4** (1977), 613–636.

[4] J.I. Burgos, *Arithmetic Chow rings and Deligne-Beilinson cohomology*, J. Algebraic Geom. **6** (1997), 335–377.

[5] J.I. Burgos and S. Wang, *Higher Bott-Chern forms and Beilinson's regulator*, Invent. Math. **132** (1998), 261–305.

[6] R. de Jeu, *Zagier's conjecture and wedge complexes in algebraic K-theory*, Compositio Math. **96** (1995), 197–247.

[7] R. McCarthy, *A chain complex for the spectrum homology of the algebraic K-theory of an exact category*, Algebraic K-theory, Fields Inst. Commun. vol.16, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, pp.199–220.

[8] Y. Takeda, *Higher arithmetic K-theory*, preprint.

[9] Y. Takeda, *Complexes of exact hermitain cubes and the Zagier conjecture*, preprint.

[10] D. Zagier, *Polylogarithms, Dedekind zeta functions, and the algebraic K-theory of fields*, in Arithmetic algebraic geometry, Progress Math. vol 89, Birkhäuser, 1991, pp.391–430.