数理解析研究所講究録 1325 巻 2003 年 8-14

守備特訓に喘ぐ外野手のための捕球経路問題
– Busy Outfielder Problem

佐久間 俊慎[*]　小野 廣隆[*]　山下 雅史[*]　朝廣 雄一[†]　牧野 和久[‡]
堀山 貴史[§]

1 はじめに

> 君は守備特訓を命ぜられた外野手である．そこで次々と打ち出されるボールをできるだけ多く捕球するための移動経路を求めたい．

この問題を多忙な外野手問題 (Busy Outfielder Problem – BOP) と呼ぶ．実世界ではおおよそ次の二つの状況において BOP が現れる．第一に，複数の移動するシステム要素にアクセスする必要がある場合であり，第二に，複数の移動する障害物を排除してシステムを保全する必要がある場合である．簡単な具体例として，航空機の空中給油スケジュール，複数のベルトコンベアに乗って流れる製品の収集スケジュール，ミサイルを迎撃する戦闘機の飛行スケジュールなどを求める問題がある．しかし，有名な格言「二兎追う者、一兎も得ず」が示すように，BOP の応用は物理空間上のスケジュールに留まらない．

BOP はその応用上，3 次元空間を対象としたオンラインアルゴリズムの検討がより重要であると思われるが，本論文では BOP を 2 次元空間上のオフライン問題として検討する．すなわち，ボールと選手を 2 次元空間上の点，ボールの軌跡を等速直線運動によってモデル化した上で，ボールの軌跡が与えられたときに，できる限り多くのボールを捕球するための選手の移動スケジュールを出力するアルゴリズムを検討する．

[*]九州大学大学院システム情報科学研究院 (sakuma@tcslab.csce.kyushu-u.ac.jp, {ono,mak }@csce.kyushu-u.ac.jp)
[†]九州産業大学情報科学部 (asahiro@is.kyusan-u.ac.jp)
[‡]大阪大学大学院基礎工学研究科 (makino@sys.es.osaka-u.ac.jp)
[§]京都大学大学院情報学研究科 (horiyama@i.kyoto-u.ac.jp)

ボールと選手の速度の関係について一切の仮定を置かないが，問題の定義から (野球場が十分に広いという仮定の下で) 一般性を失うことなしにボールは選手より遅くないと仮定できる．一方，選手はボールよりも速いという仮定を入れるならば，常にすべてのボールを捕球できるので，捕球できるボールの個数ではなく，すべてのボールを捕球するために必要な時間が主な検討対象になる．この問題は Moving Target TSP と呼ばれている．停止したボールに対する Moving Target TSP はよく知られた NP-困難問題である巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem, TSP) であるから，Moving Target TSP も一般には NP-困難である．しかし，野手とボールが同じ直線上を移動する場合には $O(n^2)$ 時間で最適スケジュールが計算でき [5]，すべてのボールの速度が一定の場合には PTAS が存在する [4] ことが知られている．ここで，n はボール数である．

2 多忙な外野手問題

xy-平面上を等速直線運動する n 個の点 (ボール) $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ を考える．ボール b_i の運動は時刻 0 における位置 $b_i(0) \in \mathbf{R}^2$ と速度ベクトル $v_i \in \mathbf{R}^2$ によって与えられている．時刻 $t \in \mathbf{R}$ におけるボール b_i の位置を $b_i(t) \in \mathbf{R}^2$ で表わす．ここで，$\mathbf{R}$ は実数の集合である．

k 人の選手 (player) $P = \{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ のためのスケジュール $\mathcal{S}$ は各選手 p_i に対する連続な曲線 $p_i : [t_0, t_f] \to R^2$ で速度の絶対値が常に定数 v_0 を越えないようなものである．[1]　$t_0(t_f)$ をスケジュール開始 (終了) 時間と呼ぶ．各選手が同じ開始 (終了) 時間を持つことは問題への制約

[1] 各選手に異なる最大速度を持たせる方がより自然な定式化であろう．しかし，3 節の結果が示すように，本論文の定式化の下でも多くの問題は NP-困難である．

とはならない. スケジュール S によって捕球されるボールの集合は $C_S = \{b_i : (\exists p_j \in P, t \in [t_0, t_f])b_i(t) = p_j(t)\}$ である. 多忙な外野手問題 (Busy Outfielder Problem - BOP) は $|C_S|$ を最大化するようなスケジュール S を計算する問題である. なお, 以下では一般性を失うこと無く $t_0 = 0$ を仮定する.[2]

次節ですぐに説明するように, BOP は一般にはNP-困難である. そこで, 以下の各節では, 選手の移動範囲を制約した上でBOP の時間計算量を議論する.

3 選手が直線上を移動する場合

各選手 p_i が移動できる範囲を原点を通るある直線 (動作軸と呼ぶ) 上に限定する. スケジュール開始時点 t_0 では, すべての選手 p_i が原点 O に集合していると仮定しても一般性を失わない. 選手 p_i の動作軸を ℓ_i, ℓ_i が x 軸となす角 (動作角) を $\theta_i (0 \leq \theta_i < \pi)$ とする. p_i はボールをこの動作軸上でしか捕球できない. 図1は選手数 $k = 2$, ボール数 $n = 3$ の場合を示している.

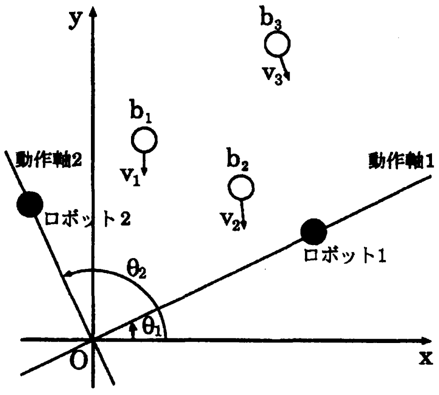

図 1: 選手の移動範囲が直線上に限られる場合

BOP を含む以下の三つのスケジューリング問題を本節では検討する. 各選手 p_i の動作角度 θ_i は (入力の一部として与えられるものではなく) 選手が自由に決定できるものであり, その決定もスケジューリングの一部である.

(i) 選手数 k が与えられたときに, すべてのボールを捕球するスケジュールが存在するかどうかを判定し, もしも存在するならばそのスケジュールを求める問題

(ii) 選手数 k が与えられたときに, 捕球可能な最大ボール数およびそれを実現するスケジュールを求める問題

(iii) すべてのボールを捕球するために必要な最小選手数 k およびそれを実現するスケジュールを求める問題

[2] この事実は明らかではないが容易に証明できる.

問題 (ii) および (iii) は明らかに問題 (i) よりも容易ではない. 両者の間に実際に時間計算量の差があることを示すことも本論文の目的の一つである. 紙面の制約から証明は省くが, NP 完全問題である 3SAT あるいは MAX2SAT からの還元によって以下の定理が証明できる.

定理 1 1. 問題 (i) は $k \geq 3$ の場合 NP-困難である. したがって, 問題 (iii) も NP-困難である. (3SAT からの還元)

2. 問題 (ii) は $k \geq 2$ の場合 NP-困難である. (MAX2SAT からの還元)

3.1 選手数 $k = 1$ の場合

選手 p の動作角 θ を任意に固定する. 動作軸があるボール b_i の軌道と一致する場合には, p は b_i を必ず捕球できるかあるいは絶対に捕球できないかどちらかであり, またそのどちらであるかを簡単に決定できる. そこで, 検討からこのようなボールを外すことができるので, 動作軸はどのボールとも一点で交わることを以下では仮定する.

選手 p が捕球できるボール間の関係を表現する有向非サイクルグラフ (DAG) $G(\theta) = (V, A(\theta))$ を以下で定義する: 頂点集合は $V = \{0, 1, \ldots, n\}$ である. 有向枝 $(i, j) \in A(\theta)$ であるための必要十分条件は, 1) $i = 0$ かつボール b_j を捕球できるか, あるいは 2) ボール b_i と b_j をこの順序で捕球できることである. 有向グラフ $G(\theta)$ の例を図2に示す. 図から, たとえば, すべてのボールは直接捕球でき, ボール b_2, b_4 はこの順序で捕球できるが, ボール b_1, b_2 はこの順序で捕球できないことが分かる. 動作軸とボールは一点でしか交わらないから, このように定義された $G(\theta)$ は実際に DAG である.

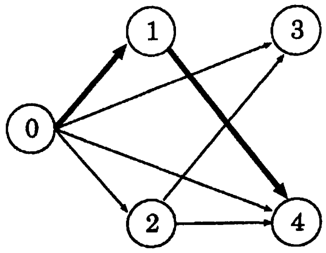

図 2: 有向グラフ $G(\theta)$ の例

命題 1 *[8]* 動作角度 θ を持つ選手が捕球できる最大のボール数は $G(\theta)$ に含まれる最長路の長さに等しい.

DAG の枝数を m とすると, DAG の最長路問題は $O(n+m)$ で解決できる. したがって, θ を変化させたときに現れるすべての DAG $G(\theta)$ のそれぞれに対して最長路問題を解くことで, 問題 (i) と (ii) を解くことができる. 異なる DAG $G(\theta)$ の個数を評価する.

DAG に現れる可能性のある枝の種類の総数は $O(n^2)$ であり, 一方, どの枝 (i,j) についても, その枝が存在するような θ の極大区間の個数は $O(1)$ で抑えられる. したがって, 以下の命題が成立する.

命題 2 *[8]* 動作角 θ を変化させたときに現れる異なる DAG $G(\theta)$ の総数は $O(n^2)$ である.

命題 1 と 2 を組み合わせれば, 問題 (i) と (ii) を $O(n^4)$ 時間で解決できる. 3.1 節の以下の部分では, 動作角 θ が与えられた場合に, DAG の最長路問題を経由せずに問題 (i) と (ii) を $O(n \log n)$ 時間で解決するアルゴリズムを与える. したがって, 命題 2 と組み合わせることで, 問題 (i) と (ii) を $O(n^3 \log n)$ 時間で解決できる.

動作角 θ を任意に固定する. 容易に分かるように, $\theta = \pi/2$ を仮定しても一般性を失わない. ボール b_i が動作軸と時刻 t_i に座標 $b_i(t_i) = (0, d_i)$ で交差するとする. 選手 p が時刻 t_i に座標 $(0, d_i)$ でボール b_i を捕球したとする. p が時刻 $t(\geq t_i)$ までに移動し得る動作軸上の点 $(0, d)$ が満すべき必要十分条件は, v が選手の最大速度であることに注意すると,

$$d_i - v(t-t_i) \leq d \leq d_i + v(t-t_i)$$

である. 集合 $D_i \subseteq \mathbf{R}^2$ を $\{(t,d) : -v(t-t_i)+d_i \leq d \leq v(t-t_i)+d_i\}$ と定義する. 図 3 に $n=4$ の場合の例を図示する. たとえば, b_1 は点 (t_1, d_1) にラベル付けられており, 選手がボール b_1 を捕球した状況に対応する. 領域 D_1 は b_1 を頂点とする二つの半直線によって切り取られた空間の原点 O を含まない部分である. $b_j \in D_i$(あるいは同じことだが $D_j \subseteq D_i$) であることがボールを b_i, b_j の順序で捕球できるための必要十分条件である.

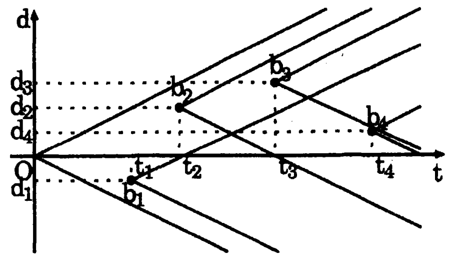

図 3: 捕球時間と捕球位置の関係

ここで, 変換

$$\alpha_i = vt_i - d_i, \ \beta_i = vt_i + d_i$$

を考える. $(\alpha_i, \beta_i) \leq (\alpha_j, \beta_j)$ を $\alpha_i \leq \alpha_j$ かつ $\beta_i \leq \beta_j$ であることと定義することで, 集合 $\{(\alpha_i, \beta_i) : 1 \leq i \leq n\}$ 上に (半) 順序関係 $\leq$ を導入する. $(\alpha_i, \beta_i) \leq (\alpha_j, \beta_j)$ かつ $(\alpha_i, \beta_i) \neq (\alpha_j, \beta_j)$ のときに $(\alpha_i, \beta_i) < (\alpha_j, \beta_j)$ と書くものとする. このとき, 以下の命題が成立する.

命題 3
1. ボール b_i を捕球できるための必要十分条件は $(0,0) \leq (\alpha_i, \beta_i)$ である.
2. ボール b_i, b_j をこの順序で捕球できるための必要十分条件は $(\alpha_i, \beta_i) \leq (\alpha_j, \beta_j)$ である.

したがって, 問題 (i),(ii) はこのようにして作られた半順序集合の最長鎖の長さを求めることに帰着される. 一方, 半順序集合について以下の命題が知られている.

命題 4 *[7]* 半順序集合の最長鎖の長さは最小反鎖被覆数に等しい.

ボールの集合 S を考える. ボール $b_i in S$ が S で**パレート最適**であるとは, $(\alpha_j, \beta_j) > (\alpha_i, \beta_i)$ を

みたすようなボール $b_j \in S$ が存在しないときである．また，集合 $S' \subseteq S$ が S の**パレート最適集合**であるとは，S' のすべてのボールがパレート最適であり，かつ $(\alpha_i, \beta_i) = (\alpha_j, \beta_j)$ をみたすボール b_i, b_j が存在しないことである．最小反鎖被覆は，ボールの全集合 B から始めて，最大のパレート最適集合をつぎつぎに取り除いて行くことにより求めることができることが知られている．

図 4 に変換された後の各 b_i を例示している．この例では，最大パレート最適集合 S_1, S_2, S_3 が B の最小反鎖被覆になっており，したがって，最長鎖の長さは 3 である．

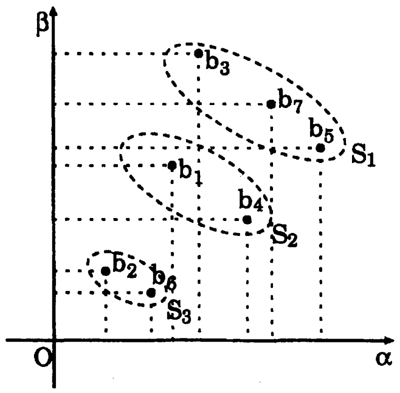

図 4: 変換後の半順序集合とその反鎖分割

AVL 木のような平衡木を用いれば，パレート最適集合は 1 点あたり $O(\log n)$，合計 $O(n \log n)$ で計算できる．以上をまとめる．

定理 2 動作角 θ が与えられたとき，問題 *(i),(ii)* の時間計算量はともに $O(n \log n)$ である．

3.2 選手数 $k = 2$ の場合

定理 1 で問題 (ii) は選手数が 2 以上ならば NP-困難であることを述べた．したがって，二人の選手 p_1, p_2 のための動作角 θ_1, θ_2 を固定した場合にも問題は依然として NP-困難である．そこで対象を問題 (i) に絞る．動作角 θ_1, θ_2 をを固定すると，3.1 節で導入した DAG $G(\theta_1), G(\theta_1)$ を経由して，問題 (i) はサイズが $O(n^2)$ の 2SAT に帰着することができる．

定理 3 *[9]* 選手数 $k = 2$ とし，動作角 θ_1, θ_2 が与えられているとする．このとき問題 *(i)* の時間計算量は $O(n^2)$ である．

$G(\theta_1), G(\theta_1)$ のそれぞれについて，動作角を変化させた場合に現れる異なる DAG は $O(n^2)$ 通りあるから，以下の系が成立する．

系 1 選手数 $k = 2$ の場合，問題 *(i)* の時間計算量は $O(n^6)$ である．

3.3 すべての選手が同一の動作軸上を移動する場合

定理 1 から，3 人以上の選手を扱う場合には問題 (i)-(iii) のいずれもが NP-困難であった．そこで本節では，すべての選手が同一の動作軸上を移動する場合に各問題の時間計算量を考察することにする．まず，最小反鎖被覆数のアイデアを用いることにより，定理 2 の系として以下が得られる．

系 2 動作角 θ が与えられたとき，*(制約された)* 問題 *(iii)* の時間計算量は $O(n \log n)$ である．したがって，*(同じ条件の下で)* 問題 *(i)* の時間計算量も $O(n \log n)$ である．

命題 2 と組み合わせると，動作角が与えられていない場合には，(制約された) 問題 (i),(iii) の時間計算量はともに $O(n^3 \log n)$ である．以上のアイデアは (制約された) 問題 (ii) に対しては働かない．そこで，この問題を最小コストフロー問題に帰着する．

動作角 θ が与えられたとき，ネットワーク $N(\theta) = (W, E)$ を DAG $G(\theta) = (V, A(\theta))$ から以下のように構成する．$W = \{i^-, i^+ : 1 \le i \le n\} \cup \{s, t\}$, $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ である．ここで，$E_1 = \{(i^+, j^-) : (i, j) \in A(\theta), 1 \le i, j \le n\}$, $E_2 = \{(i^-, i^+) : 1 \le i \le n\}$, $E_3 = \{(s, i^-), (i^+, t) : 1 \le i \le n\}$ である．E_2 に属する枝を内部枝とよぶ．$N(\theta)$ に対する次の最小コストフロー問題を考える．

目的関数： $\min \sum c_e x_e$

頂点： $demand(u) : \begin{cases} -k, & u = s \\ k, & u = t \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$

枝：$0 \le x_e \le 1$

$$cost(e) : \begin{cases} -1, & e\text{が内部枝} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

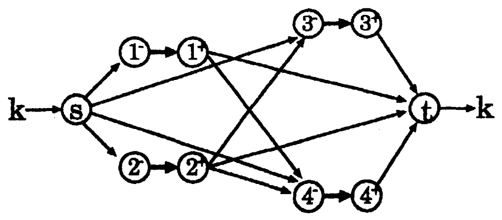

図 5: 図 2 に対応するフローネットワーク $N(\theta)$

図5は図2に対応するネットワークである．ソース s から大きさ k のフローが流れ出だし，シンク t に同じ大きさ k のフローが集まる．各枝の容量は 1 であるから，フローの整数性から s から t に k 本の有向道ができ，各道が各選手の移動経路に対応する．cost は内部枝をフローが流れたときのみ減少するので，cost の総和の絶対値は選手が捕球するボールの総数に対応する．このネットワークに対する最小コストフロー問題は容量スケーリング法により $O(n^3)$ 時間で解くことができる [2, 3]．

定理 4 選手数 $k \ge 2$ とする．動作角 θ が与えられたとき，*(制約された)* 問題 *(ii)* の時間計算量は $O(n^3)$ である．

3 節で得た結果を表 1 にまとめた．動作軸欄が共通の行は，すべての選手が一つの動作軸を共有する場合の結果であり，3.3 節で検討した．固有の行は各選手が異なる動作軸を取ることが可能な場合である．表 1 の結果は動作角が与えられた場合のものである．したがって，動作角が与えられていない場合には，動作角の候補が動作軸 1 本につき $O(n^2)$ 個あるのでそのことを考慮しなければならない．なお，問題 (i) は選手数 $k = 1$ の場合，動作角が与えられていなくとも $O(n^2 \log n)$ 時間で解決できる [8]．

4　全球捕球のための最小速度

本節では，一人の選手がすべてのボールを捕球するために必要な最小速度 v_{min} を求めるアルゴリズムを検討する．引き続き，選手が移動可能な領域を原点を通る直線上に制限する．動作角 θ を任意に固定し，この条件の下で必要な最小速度 $w(\theta)$ を計算することから始める．3.1 節で述べた理由から，すべてのボールは動作軸と一点で交わると仮定しても一般性を失わない．一方，どの二つのボールも動作軸と同じ時刻に交わらないような動作角 θ が常に存在するから，θ はこの条件を満足すると仮定しても一般性を失わない．

任意の $0 \le i, j \le n$ に対して，二つのボール b_i, b_j をこの順序で捕球するために必要な最小速度を $f_{ij}(\theta)$ とする．ただし，捕球できない場合には $f_{ij}(\theta) = \infty$ と定義する．あきらかに，

$$f_{ij}(\theta) < \infty \Leftrightarrow f_{ji}(\theta) = \infty$$

$f_{ij}(\theta)$ は簡単に計算でき，有限の場合には定数 A, B, C, D, E を用いて $f_{ij}(\theta) = \sqrt{1+T^2}(AT + B)/CT^2 + DT + E$ と表現される．ここで，$T = \tan(\theta)$ である．$w_{ij}(\theta) = \min\{f_{ij}(\theta), f_{ji}(\theta)\}$ と定義すると，$w_{ij}(\theta)$ はボール b_i, b_j をともに捕球するために必要な最小速度である．このとき，

$$v_{min} = \min_{\theta}\{\max_{i,j} w_{ij}(\theta)\}$$

である．すなわち，v_{min} は，$O(n^2)$ 本の曲線 $w_{ij}(\theta)$ の上側エンベロープの最小値である．

$f_{ij}(\theta)$ の表現から，任意の二つの曲線 $f_{ij}(\theta)$ は高々6 点で交わり，したがって，二つの曲線 $w_{ij}(\theta)$ は高々24 点で交わることが証明できる．異なる $w_{ij}(\theta)$ は $O(n^2)$ 個存在するので，上側エンベロープは高々$O(\lambda_{24}(n^2))$ 個の $w_{ij}(\theta)$ 達の断片から構成されている．ここで，$\lambda_{24}(n^2) = O(n^2 2^{O(\mathcal{A}(n^2)^{11})})$，$\mathcal{A}$ はアッカーマン関数の逆関数であり，$\lambda_{24}(n^2) \simeq O(n^2)$ である [1]．上側エンベロープの各関数の極大連結部分を左から右にソートした順に求めるのに $O(\lambda_{24}(n^2) \log n)$ が必要なので，v_{min} の時間計算量は $O(\lambda_{24}(n^2) \log n)$ $\simeq O(n^2 \log n)$ となる [6]．

定理 5 全球捕球のために必要な最小速度 v_{min} は $O(\lambda_{24}(n^2) \log n) \simeq O(n^2 \log n)$ 時間で計算できる．

表 1: 移動範囲が直線上に限られる場合の結果

動作軸	(i)			(ii)		(iii)
	$k=1$	$k=2$	$k\geq 3$	$k=1$	$k\geq 2$	
共通	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	$O(n^3)$	$O(n\log n)$
固有	$O(n\log n)$	$O(n^2)$	NP-困難	$O(n\log n)$	NP-困難	NP-困難

5 すべてのボールが同じ速度ベクトルを持つ場合

3 および 4 節では選手の移動範囲を直線上に制約した．本節では，この制約を取り除き，選手は平面内の任意の地点に移動できるものとする．ほとんどの問題が NP-困難であるから，本節では，すべてのボールが同じ速度ベクトルを持つという仮定を導入する．一般性を失うことなく，すべてのボール b_i は y-軸と並行に下に向かって速度 (ベクトル)$v_i=(0,-cv)$ で落ちてくると仮定する．ここで，$c\geq 1$ は定数，v は選手の最大速度である (図 6).

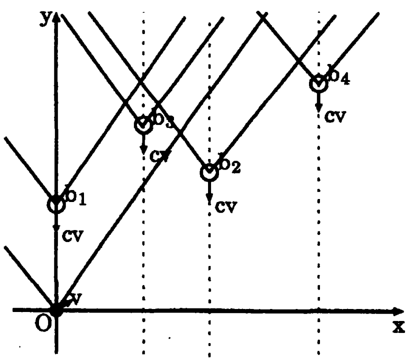

図 6: すべてのボールが等速度で下に向かって落ちてくる場合

すべてのボールの速度ベクトルが等しい場合には，時間の経過にともなうボール同士の位置関係には変化がない．したがって，あるボールを捕球する時刻や位置は考慮する必要がなく，捕球するか否かだけが重要となる．この事実から，3.1 節で述べたような DAG $G=(V,A)$ を構成することができる．すなわち，$V=\{0,1,\ldots,n\}$ であり，$(i,j)\in A$ はボール b_i,b_j がこの順序で捕球できることを示す．ただし，$(0,i)\in A$ はボール b_i が捕球できることを示す．

容易に分かるように，3.1 節と同様に，G の最長路の長さが選手数 $k=1$ の場合に捕球できるボール数の最大値であり，最小反鎖被覆数を求める問題に帰着することで $O(n\log n)$ で求めることができる．この場合には，対象となる DAG は G だけであるから，問題 (i),(ii) を $O(n\log n)$ 時間で解決できたことになる．

複数の選手を取り扱う場合にも 3 節で述べたアイデアを応用できる．紙面の制約から，証明を省き，各問題に対する結果だけを表 2 にまとめておく．選手の初期位置が共通でなければならないか，それとも異なっていても良いかによって計算量が変化する．表 1 では NP-困難であった問題が表 2 では多項式時間を持つことに注意せよ．これは，3 節では，動作角が与えられた後においても，各選手 p_i ごとに異なる DAG $G(\theta_i)$ を対象として対応する問題を検討する必要があったのに対して，本節では，初期位置の相違はあるものの，すべての p_i が本質的には同じ DAG G を持つものとして問題を検討すれば十分であることに起因している．

6 おわりに

本論文では，多忙な外野手問題 (Busy Outfielder Problem - BOP) を定式化し，様々な部分問題の時間計算量をあきらかにした．選手に移動範囲が直線上に限られる場合を特に綿密に考察し，BOP を含む三つの問題のすべてについて，多項式時間アルゴリズムと NP-困難性の証明のいずれかを与えた．

以上の考察から得られた一般的な結論は，選手の移動範囲に与えた強い制約に関わらず，3 名以上の選手を対象とする場合は考察したすべての問題が NP-困難となるということであった．一方，BOP の応用においては，選手の移動範囲の制約がそぐわないものが多くあると考えられる．そこで，移動制約を伴わない BOP をすべてのボール

表 2: すべてのボールが同じ速度ベクトルを持つ場合

初期位置	(i)			(ii)		(iii)
	$k=1$	$k=2$	$k \geq 3$	$k=1$	$k \geq 2$	
共通	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$	$O(n^3)$	$O(n\log n)$
固有	$O(n\log n)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(n\log n)$	$O(n^3)$	$O(n^3\log n)$

が同じ速度ベクトルを持つという制約のもとで検討した.

残された大きな問題としては, 選手の初期位置決定問題がある.

参考文献

[1] P. K. Agarwal, M. Sharir and P. Shor, *Sharp Upper and Lower Bounds for the Length of General Davenport-Schinzel Sequences*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Vol.52(1989), pp.228–274.

[2] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, Network Flows : Theory, Algorithms and Applications, (Prentice-Hall, 1993).

[3] W. J. Cook, W. H. Cunningham, W. R. Pulleyblank and A. Schrijver, Combinatorial Optimization, (John Wiley & Sons, 1998).

[4] M. Hammar and B. J. Nilsson, *Approximation results for kinetic variants of TSP*, LNCS 1644, pp.392–401, 1999.

[5] C. S. Helvig, G. Robins, and A. Zelikovsky, *Moving Target TSP and Related Problems*, LNCS 1461, pp.453–464, 1998.

[6] 今井浩, 今井桂子, 計算幾何学, (共立出版, 1994).

[7] L. Lovász and M. D. Plummer, Matching Theory, Annals of Discrete Matghematics, 29, (North-Holland, 1986).

[8] 佐久間, 朝廣, 宮野, 山下, 「直線上を移動するロボットによるボール回収アルゴリズム」, 火の国情報シンポジウム, p.71-76, 2001.

[9] 佐久間, 山下, 朝廣, 亀田, 牧野, 宮野, 「1次元上を移動する複数台ロボットによるボール回収問題」, 2001年度冬のＬＡシンポジウム予稿, pp. 2.1–2.4.