数理解析研究所講究録 1325 巻 2003 年 21-26



# 短絡除去可能な順序なし二分木における最小被覆木問題に対する一考察

牧山 幸史 (Kouji MAKIYAMA), 安浦寛人 (Hiroto YASUURA)
九州大学 大学院システム情報科学府 情報工学部門
Department of Computer Science and Communication Engineering Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
{makiyama,yasuura}@c.csce.kyushu-u.ac.jp

## 1 はじめに

現在，我々はプログラマブルコントローラと呼ばれる制御用機器に対する専用回路のアーキテクチャを決定する際に現れた最小評価木問題という最適化問題に対して考察を行っている．これは，ノード数 $n$ の全ての二分木を被覆するような二分木の中で，ノード数が最小のものを求めよというものである．最小評価木問題に対する正確な定義は本稿の第 2 節 問題 2.5 に示してある．

我々は，この最小評価木問題に対して，有効と考えられるアルゴリズムを発見し，それによって求められた二分木が，ノード数 $n$ の全ての二分木を被覆するという性質を持つことを証明した [1]．しかしながら，このアルゴリズムによって求められた二分木が，ノード数最小という性質を満たしているかどうかについては未解決である．

最小評価木問題は，二分木の被覆という概念を

(i) 単純に考えたときの被覆条件

(ii) 順序なし二分木に対応する被覆条件

(iii) 短絡除去可能という性質を表すための条件

の三つに分けることで，最小被覆木問題（第 3 節 問題 3.2）を短絡除去可能な順序なし二分木に対して考えたものであるとみなすことができる．

本稿では，この観点から

1. 被覆条件として (i) のみを考慮した場合
2. 被覆条件として (i) と (ii) を考えた場合

という二つの緩和問題に対して考察を行った．

本稿は以下のように構成される．第 2 節では最小評価木問題に関する諸定義を行う．第 3 節では上記 1，2 のそれぞれの緩和問題について解法アルゴリズムを提示し，その正当性に関する証明及び考察を行う．第 4 節でまとめと今後の課題を述べる．

## 2 諸定義

**定義 2.1 (二分木)** 次のように二分木を定義する．

(i) 一つの頂点のみは，その頂点を根とする二分木である．

(ii) 二つの二分木があって，それらの根を新しい頂点の下に繋いだものは，その頂点を根とする二分木である．

(iii) 以上により得られるもののみが二分木である．

ここで，次のように記号を定める．

| | | |
|---|---|---|
| nil | : | 頂点のみ |
| $t(b_1, b_2)$ | : | 二分木 $b_1, b_2$ を新しい頂点に繋いだもの |

nil でない二分木は必ず $t(b_1, b_2)$ の形で表されることに注意して欲しい．

**定義 2.2 (二分木の等価)** 二分木の等価を次のように定義する．

(i) nil は nil のみと等価である．

(ii) nil でない二分木 $t(b_1, b_2)$ と $t(b_3, b_4)$ が等価であるとは，$b_1$ と $b_3$ が等価であり，かつ $b_2$ と $b_4$ が等価であるときであり，そのときに限る．

二つの二分木 $b_1$, $b_2$ が等価であることを $b_1 = b_2$ と表す．また，等価でないことを $b_1 \neq b_2$ と表す．

**定義 2.3 (二分木のノード数)** 二分木 $b$ のノード数を $|b|$ と表すことにして，二分木のノード数を次のように定義する．

$$|b| = \begin{cases} 0 & ,\text{ if } \ b = \text{nil} \\ |b_1| + |b_2| + 1 & ,\text{ if } \ b = t(b_1, b_2). \end{cases}$$

全ての二分木の集合を $B$ とする．また，ノード数 $n$ の全ての二分木の集合を $B_n$ と表す．このとき，

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i \quad , \quad i \neq j \implies B_i \cap B_j = \emptyset$$

が成り立つ．

**定義 2.4 (二分木の被覆)** 二分木 $b_1$ を二分木 $b_2$ が被覆することを $b_1 \sqsubseteq b_2$ と表すことにして，二分木の被覆を次のように定義する．

$$\begin{aligned} b_1 \sqsubseteq b_2 \ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}& \\ & (b_1 = \text{nil}) \\ & \vee\big((b_1 \neq \text{nil}) \wedge (b_2 \neq \text{nil}) \\ & \quad \wedge\big(((b_{11} \sqsubseteq b_{21}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq b_{22})) \\ & \quad\quad \vee((b_{11} \sqsubseteq b_{22}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq b_{21})) \\ & \quad\quad \vee(b_1 \sqsubseteq b_{21}) \vee (b_1 \sqsubseteq b_{22})\big)\big) \end{aligned}$$

ただし，$b_1$, $b_2$ は nil でないとき，それぞれ $t(b_{11}, b_{12})$, $t(b_{21}, b_{22})$ と表されるとする．

**問題 2.5 (最小評価木問題)** すべての自然数 $n$ に対して，

$$Z_n = \{z \in B \mid \forall b \in B_n (b \sqsubseteq z)\}$$

とおく．このとき，任意の自然数 $n$ に対して，

$$Z_n^* = \{z \in Z_n \mid \forall z' \in Z_n (|z| \leq |z'|)\}$$

を求めよ．

# 3 緩和問題

本節では，被覆条件を緩和して得られる緩和問題について考察する．被覆条件は大きく次の3つに分けられる．

(i) $(b_{11} \sqsubseteq b_{21}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq b_{22})$

(ii) $(b_{11} \sqsubseteq b_{22}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq b_{21})$

(iii) $(b_1 \sqsubseteq b_{21}) \vee (b_1 \sqsubseteq b_{22})$

条件 (i) は普通に考えたときの被覆条件であり，(ii) は順序なし二分木に対応した拡張である．条件 (iii) は短絡除去可能という性質を言い表したものである．

これらの条件のうち，3.1 節では (i) のみを考慮した場合，3.2 節では (i) と (ii) を合わせた場合のそれぞれについて求解アルゴリズムを示し，アルゴリズムの正当性について考察する．

## 3.1 被覆条件 (i) のみを考慮した場合

被覆条件として (i) のみを採用したものを $\sqsubseteq_{\mathrm{i}}$ と表す．すなわち，

$$b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_2 \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (b_1 = \mathrm{nil}) \vee \big((b_1 \neq \mathrm{nil}) \wedge (b_2 \neq \mathrm{nil}) \\ \wedge (b_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_{21}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_{22})\big)$$

とする．このとき，$\sqsubseteq_{\mathrm{i}}$ は順序関係である．すなわち，次の命題 3.1 が成り立つ．

**命題 3.1** 任意の $b_1, b_2 \in B$ に対して，

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 &\implies b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_2, \\ (b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_2) \wedge (b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_1) &\implies b_1 = b_2, \\ (b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_2) \wedge (b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_3) &\implies b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_3 \end{aligned}$$

が成り立つ．

(証明略)

**問題 3.2 (最小被覆木問題)** すべての $n(=0,1,2,\ldots)$ に対して，

$$X_n = \{x \in B \mid \forall b \in B_n(b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x)\}$$

とおく．このとき，任意の $n(=0,1,2,\ldots)$ に対して，

$$X_n^* = \{x^* \in X_n \mid \forall x \in X_n(|x^*| \leq |x|)\}$$

を求めよ．

$B_0 = \{\mathrm{nil}\}$ より，明らかに，

$$X_0 = B,\ \ X_0^* = B_0 = \{\mathrm{nil}\}$$

である．

問題 3.2 の解が完全二分木となることは容易に予想できる．完全二分木が何であるかについては本稿では特に説明しないが，次のアルゴリズム 1 は問題 3.2 の求解アルゴリズムである．したがって，これによって得られるものは完全二分木である．

**アルゴリズム 1** 入力： $n$

変数： $i$，整数

　　： $x[i]$，二分木の配列

*1.* $i \leftarrow 1$, $x[0] \leftarrow \mathrm{nil}$.

*2.* $i = n$ ならば終了．$i \neq n$ ならば *3.* へ進む．

*3.* $x[i] \leftarrow t(x[i-1], x[i-1])$, $i \leftarrow i+1$, *2.* へ戻る．

出力： $x[n]$

以下，本小節はアルゴリズム 1の正当性の証明に費される．補題 3.3〜定理 3.7 は，完全二分木が問題 3.2 の解となること，定理 3.8〜定理 3.14 は，解がそれだけであることの証明である．

**補題 3.3** 任意の $n(=1,2,3,\ldots)$ に対して，

$$\forall b \in B_{n-1}(\exists b' \in B_n(b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'))$$

が成り立つ．

(証明) 任意の $b \in B$ に対して，$b' = t(b, \mathrm{nil})$ をとれば，$|b'| = |b| + 1$ であり，$b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'$ である．したがって証明された．(証明終)

**補題 3.4** 任意の $n(=1,2,3,\ldots)$ に対して，

$$m \leq n \implies \forall b \in B_{n-m}(\exists b' \in B_n(b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b')) \qquad (1)$$

が成り立つ．

(証明) $m$ における数学的帰納法により証明する．$m = 0$ のときは命題 3.1 より明らか．$m < k$ ならば式 (1) が成り立つと仮定する．このとき，$m = k$ ならば，補題 3.3 より，任意の $b \in B_{n-m}$ に対して $b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'$ が成り立つような $b' \in B_{n-(m-1)}$ が存在する．帰納法の仮定より，$b'$ には $b' \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b''$ となるような $b'' \in B_n$ が存在する．したがって，命題 3.1 より $b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b''$ となるような $b'' \in B_n$ が存在する．以上により証明された．(証明終)

**補題 3.5** 任意の $n(=0,1,2,\ldots)$ に対して，

$$(x \in X_n) \wedge (m \leq n) \implies \forall b \in B_m(b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x)$$

が成り立つ．

(証明) $x \in X_n$ とする．補題 3.4 より，$m \leq n$ ならば，任意の $b \in B_m$ に対して，$b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'$ が成り立つような $b' \in B_n$ が存在する．$X_n$ の定義より，$b' \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x$ が成り立つので，$b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x$ が成り立つ．したがって証明された．(証明終)

**定理 3.6** 任意の $n(=1,2,3,\ldots)$ に対して，

$$(x \in X_{n-1}) \wedge (x' = t(x,x)) \implies x' \in X_n$$

が成り立つ．

(証明) $(x \in X_{n-1}) \wedge (x' = t(x,x))$ が成り立つとする．任意の $b \in B_n$ は $b = t(b_1, b_2)$ と表すことができ，$|b_1|, |b_2| < n$ が成り立つので，補題 3.5 より，このとき $b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x$, $b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x$ が成り立つ．したがって，$b = t(b_1, b_2) \sqsubseteq_{\mathrm{i}} t(x,x) = x'$ が成り立つ．$b$ は任意でよかったので，$x' \in X_n$ が示された．(証明終)

**定理 3.7** 任意の $n(=1,2,3,\ldots)$ に対して，

$$x^* \in X_{n-1}^* \implies t(x^*, x^*) \in X_n^*$$

が成り立つ．

（証明） $x^* \in X^*_{n-1}$ とすると，定理 3.6 より，$t(x^*,x^*) \in X_n$ である．このとき，$t(x^*,x^*) \notin X^*_n$ が成り立つと仮定すると，ある $x' \in X_n$ が存在して，$|x'| < |t(x^*,x^*)|$ となる．これより，$x' = t(x'_1,x'_2)$ とおくと，$|x'_1|+|x'_2| < 2|x^*|$ が成り立つので，$|x'_1| < |x^*|$, $|x'_2| < |x^*|$ のどちらか（もしくは両方）が成り立っていなくてはならない．一方，任意の $b \in B_{n-1}$ に対して $b' = t(b, \mathrm{nil})$ をとると，$b' \in B_n$ であるので，$x' \in X_n$ より，任意の $b \in B_{n-1}$ に対して，$b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x'_1$ が成り立っていなければならない．これは，$x'_1 \in X_{n-1}$ を意味している．したがって，$|x'_1| \geq |x^*|$ である．しかしながら，同様にして，$x'_2 \in X_{n-1}$ が言えるので，$|x'_2| \geq |x^*|$ も成り立たなくてはならず，$|x'_1|+|x'_2| \geq 2|x^*|$ が成り立ってしまう．これは矛盾である．したがって，$t(x^*,x^*) \in X^*_n$ が成り立つ．（証明終）

**定理 3.8** 任意の $b, b' \in B$ に対して，

$$b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b' \implies |b| \leq |b'| \tag{2}$$

が成り立つ．

（証明） $b$ のノード数 $|b|$ における数学的帰納法により証明する．$|b| = 0$ のときは明らか．$|b| < k$ となる全ての $b$ に対して式 (2) が成り立つと仮定する．このとき，$|b| = k$ となる任意の $b$ に対して，$b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'$ とすると，$b' \neq \mathrm{nil}$ なので，$b = t(b_1,b_2)$, $b' = t(b'_1,b'_2)$ とおけば，$b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_1$ かつ $b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_2$ が成り立つ．帰納法の仮定より，$|b_1| \leq |b'_1|$ かつ $|b_2| \leq |b'_2|$ が成り立つので，$|b| = |b_1|+|b_2|+1 \leq |b'_1|+|b'_2|+1 = |b'|$ が成り立つ．以上により証明された．（証明終）

**定理 3.9** 任意の $b, b' \in B$ に対して，

$$A = \{a \in B \mid b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a,\ b' \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a\}$$

とおくと，

$$\exists! a^* \in A (\forall a \in A (a^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a))$$

が成り立つ．

（証明） 任意の $a \in A$ に対して $a^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a$ が成り立つような $a^*$ が存在したとすると，定理 3.8 より，全ての $a \in A$ に対して $|a^*| \leq |a|$ が成り立っていなくてはならない．したがって，全ての $a \in A$ に対して $|a^*| \leq |a|$ が成り立つとしてよい．また，このとき $a^*$ は唯一である．なぜなら，任意の $a \in A$ に対して $a^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a$ が成り立つような $a^*$ が二つあったとすると，$\sqsubseteq_{\mathrm{i}}$ が順序関係である（したがって反対称律が成り立つ）ことにより，その二つは一致したものとなってしまうからである．

$|b|, |b'|$ の最大値，$n = \max(|b|,|b'|)$ における数学的帰納法により証明する．$n = 0$ のとき，$|b| = |b'| = 0$ より $b = b' = \mathrm{nil}$ である．このとき，$A = B$ となるので，$a^* = \mathrm{nil}$ をとれば，任意の $a \in A$ に対して $a^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a$ が成り立つ．$n < k$ となる任意の $b, b'$ の組に対して，定理が成り立つと仮定する．このとき，$n = k$ となる任意の $b, b'$ の組に対して定理が成り立つことを示す．$|b| = k$, $|b'| \leq k$ としてよい．$b' = \mathrm{nil}$ の場合，$A = \{a \in B \mid b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a\}$ であるので $a^* = b$ をとれば，任意の $a \in A$ に対して $a^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a$ が成り立つ．$b' \neq \mathrm{nil}$ の場合，$b = t(b_1,b_2)$, $b' = t(b'_1,b'_2)$ とすると，$|b_1|, |b_2|, |b'_1|, |b'_2| < k$ であり，帰納法の仮定より，$A_1 = \{a_1 \in B \mid b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_1,\ b'_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_1\}$, $A_2 = \{a_2 \in B \mid b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_2,\ b'_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_2\}$ とおくと，任意の $a_1 \in A_1$ に対して $a^*_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_1$ が成り立つような $a^*_1 \in A_1$ が存在し，また，任意の $a_2 \in A_2$ に対して $a^*_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_2$ が成り立つような $a^*_2 \in A_2$ が存在する．ここで，$A = \{a \in B \mid b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a,\ b' \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a\} = \{t(a_1,a_2) \mid (b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_1) \wedge (b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_2),\ (b'_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_1) \wedge (b'_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a_2)\} = \{t(a_1,a_2) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2\}$ に注意して，$a^* = t(a^*_1,a^*_2)$ とおくと，任意の $a \in A$ に対して，$a^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} a$ が成り立つことがわかる．したがって，$n = k$ となる任意の $b, b'$ の組に対して定理が成り立つ．以上により証明された．（証明終）

**系 3.10** $\emptyset$ でない任意の有限部分集合 $P \subset B$ に対して，

$$C = \{c \in B \mid \forall p \in P (p \sqsubseteq_{\mathrm{i}} c)\}$$

とおくと，

$$\exists! c^* \in C (\forall c \in C (c^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} c))$$

が成り立つ．

（証明） $c^*$ が存在することは，定理 3.9 より明らかなので，それが唯一であることを示す．$c^*$ が二つ存在したとして，もう一方を $c^{**}$ と表すことにすると，定義より $c^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} c^{**}$, $c^{**} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} c^*$ が成り立つ．このとき，$\sqsubseteq_{\mathrm{i}}$ の反対称性により，結局 $c^* = c^{**}$ となる．したがって，$c^*$ は唯一である．（証明終）

**補題 3.11** 任意の $b, b' \in B$ に対して，

$$(|b| = |b'|) \wedge (b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b') \implies b = b' \tag{3}$$

が成り立つ．

（証明） $b$ のノード数 $|b|$ における数学的帰納法により証明する．$|b| = 0$ のとき，$b = b' = \mathrm{nil}$ となり，式 (3) が成り立つのは明らか．$|b| < k$ のとき，式 (3) が成り立つと仮定する．このとき，$|b| = |b'| = k$, $b \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'$, $b = t(b_1,b_2)$, $b' = t(b'_1,b'_2)$ とすると，$b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_1$, $b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_2$ が同時に成り立っていなければならない．定理 3.8 から $|b_1| \leq |b'_1|$, $|b_2| \leq |b'_2|$ が成り立つことと，$|b| = |b'| = k$ であることより，$|b_1| = |b'_1|$, $|b_2| = |b'_2|$ が成り立つ．したがって，帰納法の仮定より，$b_1 = b'_1$, $b_2 = b'_2$ が成り立ち，$b = b'$ が成り立つ．以上により証明された．（証明終）

**定理 3.12** 任意の $n (= 0, 1, 2, \ldots)$ に対して，

$$X^{**}_n = \{x \in X_n \mid \forall x' \in X_n (x \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x')\}$$

とおくと，

$$X^{**}_n = X^*_n$$

が成り立つ．

（証明） 定理 3.8 より，$x \in X^{**}_n \implies x \in X^*_n$ であることは明らかである．また，系 3.10 において，$P = B_n$ とおくと，$C = X_n$ となり，任意の $x \in X_n$ に対して $x^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x$ が成り立つような $x^*$ がただ一つ存在する．すなわち $X^{**}_n = \{x^*\}$ である．このとき，$x^*$ は任意の $x \in X_n$ に対して $|x^*| \leq |x|$ が成り立っている．すなわち，$x^* \in X^*_n$ である．もし，$|x'| = |x^*|$ となるような $x' \in X_n$ が存在したとすると，$x^* \sqsubseteq_{\mathrm{i}} x'$ かつ $|x^*| = |x'|$ が成り立つので，補題 3.11 より，結局 $x^* = x'$ となり，$|X^*_n| = 1$ であることがわかる．$x^* \in X^*_n$ であったので，結局 $X^*_n = \{x^*\}$ となり，$X^*_n = X^{**}_n$ が証明された．（証明終）

**系 3.13** 任意の $n(=0,1,2,\ldots)$ に対して,

$$|X_n^*| = 1$$

が成り立つ.

(証明) 定理 3.12 の証明参照. (証明終)

**定理 3.14** 任意の $n(=1,2,3,\ldots)$ に対して,

$$x^* \in X_{n-1}^* \implies X_n^* = \{t(x^*, x^*)\}$$

が成り立つ.

(証明) 定理 3.7 より $t(x^*, x^*) \in X_n^*$ であり, 系 3.13 より $|X_n^*| = 1$ であることから明らか. (証明終)

## 3.2 被覆条件 (i) と (ii) を考慮した場合

被覆条件として (i) と (ii) を採用したものを $\sqsubseteq_{\mathrm{ii}}$ と表す. すなわち,

$$\begin{aligned}
&b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_2 \overset{\mathrm{def}}{\iff} \\
&\quad (b_1 = \mathrm{nil}) \\
&\quad \vee\big((b_1 \neq \mathrm{nil}) \wedge (b_2 \neq \mathrm{nil}) \\
&\quad\quad \wedge\big(((b_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{21}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{22})) \\
&\quad\quad\quad \vee((b_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{22}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{21}))\big)\big)
\end{aligned}$$

とする.

**問題 3.15 (順序なし最小被覆木問題)** すべての $n$ ( $=0$, 1, 2, ... ) に対して,

$$Y_n = \{y \in B \mid \forall b \in B_n (b \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} y)\} \tag{4}$$

とおく. このとき, 任意の $n(=0,1,2,\ldots)$ に対して,

$$Y_n^* = \{y^* \in Y_n \mid \forall y \in Y_n (|y^*| \leq |y|)\}$$

を求めよ.

被覆条件 (i) と (ii) を考慮した場合は, (i) のみで考えた場合とは違って, 解がどのようなものであるかはそれほど明らかではない.

**アルゴリズム 2** 入力: $n$

変数: $i, j$, 整数

: $y[i]$, 二分木の配列

1. $i \leftarrow 1$, $y[0] \leftarrow \mathrm{nil}$.
2. $i = n$ ならば終了. $i \neq n$ ならば *3.* へ進む.
3. $j \leftarrow \lfloor (i-1)/2 \rfloor$, $y[i] \leftarrow t(y[i-1], y[j])$, $i \leftarrow i+1$, *2.* へ戻る.

出力: $y[n]$

**定義 3.16 (二分木の同形)** 二つの二分木 $b_1$と $b_2$が同形であることを $b_1 \simeq b_2$と表すことにして, 二分木の同形を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
&b_1 \simeq b_2 \overset{\mathrm{def}}{\iff} \\
&\quad \big((b_1 = \mathrm{nil}) \wedge (b_2 = \mathrm{nil})\big) \\
&\quad \vee\big((b_1 \neq \mathrm{nil}) \wedge (b_2 \neq \mathrm{nil}) \\
&\quad\quad \wedge(((b_{11} \simeq b_{21}) \wedge (b_{12} \simeq b_{22})) \\
&\quad\quad\quad \vee((b_{11} \simeq b_{22}) \wedge (b_{12} \simeq b_{21})))\big)
\end{aligned}$$

ただし, $b_1$, $b_2$ は nil でないとき, それぞれ $t(b_{11}, b_{12})$, $t(b_{21}, b_{22})$ と表されるとする.

$\simeq$ は同値関係となっている. すなわち, 次の命題 3.17 が成り立つ.

**命題 3.17** 任意の $b_1, b_2 \in B$ に対して,

$$\begin{aligned}
b_1 = b_2 &\implies b_1 \simeq b_2 \\
b_1 \simeq b_2 &\implies b_2 \simeq b_1 \\
(b_1 \simeq b_2) \wedge (b_2 \simeq b_3) &\implies b_1 \simeq b_3
\end{aligned}$$

が成り立つ.

(証明略)

**命題 3.18** 任意の $b_1, b_2 \in B$ に対して,

$$b_1 \simeq b_2 \implies |b_1| = |b_2| \tag{5}$$

が成り立つ.

(証明) $b_1$ のノード数 $|b_1|$ における数学的帰納法により証明する. $|b_1| = 0$ のとき, $b_1 = \mathrm{nil}$ であるので, $b_1 \simeq b_2$ が成り立つならば, $b_2 = \mathrm{nil}$ でなければならない. したがって, $|b_1| = |b_2| = 0$ である. $|b_1| < k$ となるような全ての $b_1 \in B$ に対して, 式 (5) が成り立つと仮定する. このとき, $|b_1| = k$ となるような任意の $b_1 =\in B_k$ に対して, $b_1 \simeq b_2$ が成り立つならば, $b_2 \neq \mathrm{nil}$ であり, $b_1 = t(b_{11}, b_{12})$, $b_2 = t(b_{21}, b_{22})$ とすると, $(b_{11} \simeq b_{21}) \wedge (b_{12} \simeq b_{22})$ または $(b_{11} \simeq b_{22}) \wedge (b_{12} \simeq b_{21})$ が成り立つ. $|b_{11}|, |b_{12}| < k$ より, 帰納法の仮定より, $(|b_{11}| = |b_{21}|) \wedge (|b_{12}| = |b_{22}|)$ または $(|b_{11}| = |b_{22}|) \wedge (|b_{12}| = |b_{21}|)$ が成り立つ. したがって, どちらの場合も $|b_1| = |b_{11}| + |b_{12}| + 1 = |b_{21}| + |b_{22}| + 1 = |b_2|$ が成り立つ. 以上により証明された. (証明終)

任意の $b \in B$ に対して, 同値関係$\simeq$ における $b$ の同値類を $[b]$ と表す. すなわち,

$$[b] = \{b' \in B \mid b \simeq b'\}$$

とする. $[b]$ を $b$ を含む同形類と呼ぶことにする. 命題 3.18 より, 任意の $b \in B_n$ に対して, $[b] \subseteq B_n$ が成り立つのは明らかである. また, 以下では, 見やすさを考慮して, $\simeq$ による商集合をオーバーラインで表すことにする. 例えば次のようにである.

$$\begin{aligned}
\overline{B} &= B/\simeq = \{[b] \mid b \in B\}, \\
\overline{B_n} &= B_n/\simeq = \{[b] \mid b \in B_n\}.
\end{aligned}$$

これらに対して,

$$\begin{aligned}
&\overline{B} = \textstyle\bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{B_i}\ , \\
&i \neq j \implies \overline{B_i} \cap \overline{B_j} = \emptyset
\end{aligned}$$

が成り立つ.

我々は, 3.1 節と同様の議論を進めたいのだから,

$$\begin{array}{ccc}
\text{二分木} & \longleftrightarrow & \text{同形類}, \\
B & \longleftrightarrow & \overline{B}
\end{array}$$

という対応を考え, 同形類に対して二分木と同様の概念を導入する.

明らかに, 任意の$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b} \in \overline{B}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\exists b_1 \in \tilde{b}_1 (\exists b_2 \in \tilde{b}_2 (t(b_1, b_2) \in \tilde{b})) \\
\implies\ &\forall b_1' \in \tilde{b}_1 (\forall b_2' \in \tilde{b}_2 (t(b_1', b_2') \in \tilde{b}))
\end{aligned}$$

が成り立つ．このような$\tilde{b}$は任意の$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \overline{B}$に対して，必ずただ一つだけ存在する．したがって，任意の$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \overline{B}$に対して，

$$t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = \{b \in B \mid b_1 \in \tilde{b}_1,\ b_2 \in \tilde{b}_2,\ b \simeq t(b_1, b_2)\}$$

と定める．$t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \in \overline{B}$となっている．二分木に対するものとの違いは，

$$t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = t(\tilde{b}_2, \tilde{b}_1)$$

が成り立つことである．

任意の$\tilde{b}, \tilde{b}' \in \overline{B}$に対して，

$$\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}' \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall b \in \tilde{b}(\exists b' \in \tilde{b}'(b \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'))$$

という定義をおく．これは，

$$\overline{Y_n} \quad = \quad \{\tilde{y} \in \overline{B} \mid \forall \tilde{b} \in \overline{B_n}(\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{y})\}$$

とするためである（式(4)と比較して欲しい）．また，任意の$\tilde{b} \in \overline{B}$に対して，

$$\|\tilde{b}\| = n \stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \tilde{b} \subseteq B_n$$

と定義すると，

$$\overline{Y_n^*} \quad = \quad \{\tilde{y} \in \overline{Y_n} \mid \forall \tilde{y}' \in \overline{Y_n}(\|\tilde{y}\| \le \|\tilde{y}'\|)\}$$

となる．

問題 3.15 の解$Y_n^*$は

$$Y_n^* = \bigcup_{\tilde{y} \in \overline{Y_n^*}} \tilde{y}$$

であることがわかる．したがって，以下，本小節では$\overline{Y_n^*}$を求めることに集中する．

**命題 3.19** 任意の$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \overline{B}$に対して，

$$\tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_2 \iff \exists b_1 \in \tilde{b}_1(\exists b_2 \in \tilde{b}_2(b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_2)) \tag{6}$$

が成り立つ．

（証明） $\Rightarrow$： 自明．
$\Leftarrow$：$\|\tilde{b}_1\|$における数学的帰納法により証明する．$\|\tilde{b}_1\| = 0$のとき，$\tilde{b}_1 = \{\mathrm{nil}\}$より明らか．$\|\tilde{b}_1\| < k$となる全ての$\tilde{b}_1 \in \overline{B}$に対して，式(6)が成り立つと仮定する．このとき，$b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_2, |b_1| = k$が成り立つような$b_1, b_2 \in B$を任意にとれば，$b_2 \ne \mathrm{nil}$であり，$b_1 = t(b_{11}, b_{12}), b_2 = t(b_{21}, b_{22})$とすると，$(b_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{21}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{22})$または$(b_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{22}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{21})$が成り立つ．$|b_{11}|, |b_{12}| < k$であることに注意すると，帰納法の仮定より，$(\forall b'_{11} \in [b_{11}](\exists b'_{21} \in [b_{21}](b'_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{21}))) \wedge (\forall b'_{12} \in [b_{12}](\exists b'_{22} \in [b_{22}](b'_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{22})))$または$(\forall b'_{11} \in [b_{11}](\exists b'_{22} \in [b_{22}](b'_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{22}))) \wedge (\forall b'_{12} \in [b_{12}](\exists b'_{21} \in [b_{21}](b'_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{21})))$が成り立つ．したがって，$b'_1 \simeq b_1$ならば，$b'_1 = t(b'_{11}, b'_{12})$とおけば，$(b'_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{21}) \wedge (b'_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{22})$または$(b'_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{22}) \wedge (b'_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_{21})$が成り立つような$b'_{21}, b'_{22}$が存在して，$t(b'_{21}, b'_{22}) \simeq t(b_{21}, b_{22}) = b_2$が成り立つ．すなわち，$b'_2 = t(b'_{21}, b'_{22})$とおけば，$\forall b'_1 \in [b_1](\exists b'_2 \in [b_2](b'_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b'_2))$が成り立つ．$|b_1| = k$であり，$b_1$は任意でよかったので，$\|\tilde{b}_1\| = k$となる任意の$\tilde{b}_1$に対して，式(6)が成り立つ．以上により証明された．（証明終）

**命題 3.20** 任意の$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \overline{B}$に対して，

$$\tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_2 \iff \forall b_1 \in \tilde{b}_1(\exists b_2 \in \tilde{b}_2(b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_2)) \tag{7}$$

が成り立つ．

（証明） $\Leftarrow$： 自明．
$\Rightarrow$：$\|\tilde{b}_1\|$における数学的帰納法により証明する．$\|\tilde{b}_1\| = 0$のとき，$\tilde{b}_1 = \{\mathrm{nil}\}$であるので，$\exists b_2 \in \tilde{b}_2(\mathrm{nil} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b_2)$が任意の$\tilde{b}_2 \in \overline{B}$に対して成り立つことより，式(7)が成り立つことは明らか．$\|\tilde{b}_1\| < k$となるような全ての$\tilde{b}_1 \in \overline{B}$に対して，式(7)が成り立つと仮定する．このとき，$\|\tilde{b}_1\| = k$となるような任意の$\tilde{b}_1$に対して，$\tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_2$が成り立つならば，任意の$b_1 \in \tilde{b}_1$に対して，ある$b_2 \in \tilde{b}_2$が存在して，$(b_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{21}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{22})$または$(b_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{22}) \wedge (b_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b_{21})$が成り立つ（ただし，$b_1 = t(b_{11}, b_{12}), b_2 = t(b_{21}, b_{22})$）．このとき，命題3.19より，$([b_{11}] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b_{21}]) \wedge ([b_{12}] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b_{22}])$または$([b_{11}] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b_{22}]) \wedge ([b_{12}] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b_{21}])$が成り立っている．$\|[b_{11}]\|, \|[b_{12}]\| < k$であるので，帰納法の仮定より，$(\exists b'_{11} \in [b_{11}](\exists b'_{21} \in [b_{21}](b'_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_{21}))) \wedge (\exists b'_{12} \in [b_{12}](\exists b'_{22} \in [b_{22}](b'_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_{22})))$または$(\exists b'_{11} \in [b_{11}](\exists b'_{22} \in [b_{22}](b'_{11} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_{22}))) \wedge (\exists b'_{12} \in [b_{12}](\exists b'_{21} \in [b_{21}](b'_{12} \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_{21})))$が成り立つ．$b_1 = t(b_{11}, b_{12}) \simeq t(b'_{11}, b'_{12}), b_2 = t(b_{21}, b_{22}) \simeq t(b'_{21}, b'_{22}) \simeq t(b'_{22}, b'_{21})$，$b_1 \in \tilde{b}_1$，$b_2 \in \tilde{b}_2$であることに注意すると，$\forall b'_1 \in \tilde{b}_1(\exists b'_2 \in \tilde{b}_2(b'_1 \sqsubseteq_{\mathrm{i}} b'_2))$が成り立っている．以上により証明された．（証明終）

**補題 3.21** 任意の$b_1, b'_1, b_2, b'_2 \in B$に対して，

$$([b_1] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b'_1]) \wedge ([b_2] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b'_2]) \Longrightarrow [b] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b']$$

が成り立つ（ただし，$b = t(b_1, b_2)$，$b' = t(b'_1, b'_2)$）．

（証明） $([b_1] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b'_1]) \wedge ([b_2] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b'_2])$が成り立っているならば，定義より，$b_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b''_1$が成り立つような$b''_1 \in [b'_1]$及び$b_2 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} b''_2$が成り立つような$b''_2 \in [b'_2]$が存在する．$b'' = t(b''_1, b''_2)$とおくと，命題3.19より，$[b] \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} [b''] = [b']$が成り立つ．したがって証明された．（証明終）

**命題 3.22** 同形類に対して定義された$\sqsubseteq_{\mathrm{ii}}$は順序関係である．すなわち，任意の$\tilde{b}_1, \tilde{b}_2 \in \overline{B}$に対して，

$$\begin{aligned}
&\tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 \implies \tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_2 \\
&(\tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_2) \wedge (\tilde{b}_2 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_1) \implies \tilde{b}_1 = \tilde{b}_2 \\
&(\tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_2) \wedge (\tilde{b}_2 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_3) \implies \tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}_3
\end{aligned}$$

が成り立つ．

（証明略）

任意の$n (= 1, 2, 3, \ldots)$に対して，

$$\lfloor (n-1)/2 \rfloor = \begin{cases} (n-1)/2 & ,n \text{が奇数のとき} \\ (n-2)/2 & ,n \text{が偶数のとき} \end{cases}$$

という表現を使う．

**補題 3.23** 任意の$n (= 1, 2, 3, \ldots)$に対して，

$$\forall \tilde{b} \in \overline{B_{n-1}}(\exists \tilde{b}' \in \overline{B_n}(\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}'))$$

が成り立つ．

（証明） 任意の$\tilde{b} \in \overline{B}$ に対して，$\tilde{b}' = t(\tilde{b}, [\mathrm{nil}])$ をとれば，$\|b'\| = \|b\| + 1$ であり，$\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}'$ である．したがって証明された．(証明終)

**補題 3.24** 任意の $n(= 1, 2, 3, \ldots)$ に対して，

$$m \geq n \implies \forall \tilde{b} \in \overline{B_{n-m}}(\exists \tilde{b}' \in \overline{B_n}(\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}')) \qquad (8)$$

が成り立つ．

(証明) $m$ における数学的帰納法により証明する．$m = 0$ のときは命題 3.22 より明らか．$m < k$ ならば式 (8) が成り立つと仮定する．このとき，$m = k$ ならば，補題 3.23 より，任意の$\tilde{b} \in \overline{B_{n-m}}$ に対して$\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}'$ が成り立つようなb$\tilde{b}' \in \overline{B_{n-(m-1)}}$ が存在する．帰納法の仮定より，$\tilde{b}'$ には$\tilde{b}' \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}''$ となるような$\tilde{b}'' \in \overline{B_n}$ が存在する．したがって，命題 3.22 より，$\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}''$ が成り立つ．以上により証明された．(証明終)

**補題 3.25** 任意の $n(= 0, 1, 2, \ldots)$ に対して，

$$(\tilde{y} \in \overline{Y_n}) \wedge (m \leq n) \implies \forall \tilde{b} \in \overline{B_m}(\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{y})$$

が成り立つ．

(証明) $\tilde{y} \in \overline{Y_n}$ とする．補題 3.24 より，$m \leq n$ ならば，任意の$\tilde{b} \in \overline{B_m}$ に対して，$\tilde{b} \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{b}'$ が成り立つような$\tilde{b}' \in \overline{B_n}$ が存在する．$\overline{Y_n}$ の定義より，$\tilde{b}' \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{y}$ が成り立つ．したがって証明された．(証明終)

**定理 3.26** 任意の $n(= 1, 2, 3, \ldots)$ に対して，

$$(\tilde{y}_1 \in \overline{Y_{n-1}}) \wedge (\tilde{y}_2 \in \overline{Y_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}}) \implies t(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \overline{Y_n}$$

が成り立つ．

(証明) $(\tilde{y}_1 \in \overline{Y_{n-1}}) \wedge (\tilde{y}_2 \in \overline{Y_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}})$ が成り立つとする．任意の$\tilde{b} \in \overline{B_n}$ は$\tilde{b} = t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ と表すことができ，$t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = t(\tilde{b}_2, \tilde{b}_1)$ が成り立つことより，$\|\tilde{b}_1\| \geq \|\tilde{b}_2\|$ としてよい．$\|\tilde{b}_1\| + \|\tilde{b}_2\| = n - 1$ より，$\|\tilde{b}_1\| \leq n - 1$, $\|\tilde{b}_2\| \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ が成り立つので，補題 3.25 より，このとき$\tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{y}_1$, $\tilde{b}_2 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{y}_2$ が成り立つ．したがって，$\tilde{b} = t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} t(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ が成り立つ．$\tilde{b}$ は任意でよかったので，$t(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \overline{Y_n}$ が示された．(証明終)

議論を 3.1 節と同様に進めるならば，ここで，

$$(\tilde{y}_1^* \in \overline{Y_{n-1}^*}) \wedge (\tilde{y}_2^* \in \overline{Y_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}^*}) \implies t(\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*) \in \overline{Y_n^*}$$

を証明したいのであるが，3.1 節と同様の考え方ではこれはうまくはいかない．なぜなら，$t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) = t(\tilde{b}_2, \tilde{b}_1)$ が成り立つことから，全ての$\tilde{b} = t(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \in \overline{B_n}$ に対して$\tilde{b}_1 \sqsubseteq_{\mathrm{ii}} \tilde{y}_1^*$ が成り立っている必要性を言うことができないためである．

## 4 おわりに

本稿では，最小評価木問題の被覆条件を切り分けることによって得られた緩和問題に対する考察を行った．被覆条件の緩和にはもう一つ，(i) と (iii) を採用した場合が考えられる．また，被覆条件以外の緩和については，文献 [1] の第 5 章にある準最小評価木問題のように，被覆しなければならない二分木の集合の範囲を狭めるといった方法もある．今後はこれらの場合に対しても考察を重ね，最小評価木問題を解決する足掛かりとしたい．

## 参考文献

[1] 牧山幸史，“最小評価木問題に対する一考察”，http://kasuga.csce.kyushu-u.ac.jp/~makiyama/kenq/METProblem/ ，卒業論文