

2次元オイラー方程式の複素空間における特異性

Uriel Frisch^a, 松本 剛 (Takeshi Matsumoto)^{a,b}, Jérémie Bec.^{a,c}

^aObservatoire de la Côte d'Azur,

^b京大院 理 物理学第一教室 (Department of Physics, Kyoto University),

^cInstitute for Advanced Study.

1 Richard Pelz さんのこと

I had known of Professor R. B. Pelz for a long time. When I first met him at RIMS in May 2002, the research presented in this report was in progress. As soon as I started to talk about what we had been trying, he foresaw possible difficulties. That was really impressed me. Meanwhile he kindly gave a list of key references on the hydrodynamic singularity problem, which is included in the paper by U. Frisch, J. Bec and myself [1]. In August 2002, thanks to Professor Ohkitani, I had an opportunity to have a long discussion with him. The warm encouragement that he gave me at that time is still vivid in my mind.

2 はじめに

空間 d 次元 ($d = 2, 3$) での非圧縮オイラー方程式 (速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathcal{R}^d$)

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

に運動エネルギー $\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 dx$ が有限で、かつ、滑らかな初期値 $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ を与える。このとき、有限時間のうちに解に不連続性 (特異性) が現れるか、言い換えると適当な階数の微分量が有限時間で爆発するか、という問題がある (筆者が常に参考にする文献として [2, 3, 4, 5] をあげておく)。これについて現時点でわかっていることは以下のとおりである。

- 空間 2 次元: 永久に滑らかでありつづけることが証明されている。
- 空間 3 次元: 未解決。(3次元のナビエ・ストークス方程式についても同様)

3次元の問題は特に大難問として知られている。その解決にむけて、我々が現在為しうる確かなことは、精緻な数値的研究を積み重ねることによって信頼に足る証拠を蓄えることであろう。(もっと欲張って言えば、その数値的証拠が解析的な研究に結び付くことを目的としている。)しかし、周知のように、有限時間爆発の数値的な研究には常に危険が伴う。数値解の特異な振舞いが、果して真のものなのかそれとも数値スキームなどが引き起こした偽のものなのかを厳しく判断しなければならない。従って、数値計算法の限界を注意深く見極めて計算を行う必要がある。実際に3次元オイラー方程式の特異性の数値的研究では、一つの数値計算法だけで特異的な振舞いを観測するだけでは不十分とされ、複数の数値的アプローチ (計算機代数を含む) を通じて、一貫した結果を得て初めて信頼できる結果であると見な

される(そのような研究の好例として文献[6, 7, 8]をあげることができる)。その為には様々な方法が開発されてきた。もし、オイラー方程式の力学的性質をうまく利用した新しい数値計算法を考案し、従来の方法では到達できなかった精度が実現されるとしたらその効果は大きい。また、数値的研究につきまとう危うさを少しでも減らすことにつながるのではないだろうか。

周期境界条件下のオイラー方程式について、従来からある最も精度の高い数値計算法はスペクトル法である。このスペクトル法の限界を定めているものは複素空間に存在する特異性である。より正確に言えば、オイラー方程式の解を複素空間に解析接続した際に複素空間に現れる特異性のうち、実空間に最も近いものがスペクトル法の空間解像度の限界を決めている。

本研究がめざす最終目的は、このオイラー方程式の解が持つ複素特異性と実空間との距離を適応的に制御することによってスペクトル法を改良することである。これを「適応スペクトル法」(spectral adaptive method)と呼ぶことにする。

この適応スペクトル法は、オイラー方程式の複素特異性の性質を上手く利用することが求められる。しかし、その複素特異性については2次元の場合ですら判明していることは決して多くない。(もっと根本的に言えば多変数複素関数の特異性について判明していることは決して多くない。)そこで本稿では2次元非粘性流の複素特異性を研究した結果を報告する。つまり、本研究の現実的な目標は、周期境界条件下でentireな初期条件から出発した時の2次元オイラー方程式の解の複素特異性の性質を調べることである。

次の第3節では、スペクトル法と複素特異性の関係を簡単に振り返り、適応スペクトル法のアイディアを述べる。そして第4節が主要な結果で、2次元オイラー方程式の複素特異性についての数値計算結果を報告する。最後の第5節はまとめと今後の展望にあてた。

3 スペクトル法と複素特異性、適応スペクトル法

3.1 解析帯の幅とスペクトル法

周期境界条件下で滑かな初期条件から出発したとき、2, 3次元のオイラー方程式をスペクトル法で数値計算すると、速度場のフーリエ係数が高波数側で指数的に減衰することが知られている。つまり、速度場 \mathbf{u} のフーリエ係数 $\hat{\mathbf{u}}$ の大きさを波数ベクトル \mathbf{k} の角度について和をとったものについて、

$$\sum_{k \leq |\mathbf{k}| < k+1} |\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})| = (\mathbf{k} \text{ の多項式}) \times \exp[-\delta(t)\mathbf{k}] \quad (3)$$

と振舞うのである。この $\delta(t)$ は次のように解釈される[9]。オイラー方程式の解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ を複素空間 $\mathbf{z} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ に解析接続した際に複素空間には特異性が現れる。この特異性のうち、実空間に最も近いものと実空間との距離が $\delta(t)$ である。解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が実空間から解析接続可能な複素空間の領域を解析帯(analyticity strip)と呼ぶことにすると、 $\delta(t)$ は解析帯の「幅」(the width of the analyticity strip)と呼べるであろう。スペクトル法による数値計算では、

式 (3) の左辺を片対数表示して高波数側の指数減衰の傾きを見積ることで $\delta(t)$ を容易に求めることができる。

特に初期条件が entire な関数であるとき、 $t = 0$ での特異性は複素空間無限遠にあるから $\delta(t = 0) = \infty$ である。しかし時間が進むにつれて幅 $\delta(t)$ は減少する。もし、有限の時刻 t_* で解析帯の幅がゼロになる、 $\delta(t = t_*) = 0$ 、とすれば、それは複素空間に存在した特異性が有限時間で実空間に現れることを意味する。

特に 2 次元オイラー方程式の解析帯の幅については時間大域的に 2 重指数関数による下限

$$\delta(t) > e^{-c_1 \exp(c_2 t)} \quad (t > 0) \quad (4)$$

(c_1, c_2 は正の定数) が得られている [10]。このため、2 次元オイラー方程式の複素特異性は有限時間で実空間に現れることはない。

しかし、3 次元については時間大域的に幅 $\delta(t)$ の下限は得られていない。Taylor-Green 流の数値計算で調べられた結果によると、 $\delta(t)$ は t が 1 オーダーの間は指数的に減衰する、つまり $\delta(t) \propto \exp(-ct)$ (c は正の定数) となることが知られている [6]。この指数的減衰の原因は、流れ場にあらわれる秩序的な渦構造が非線形性を低減していることにあると予想されている [2]。

さらに大きい時刻での $\delta(t)$ の振舞いは、現在の計算機資源ではスペクトル法によるオイラー方程式の積分が不可能になるため不明である。しかし、この指数減衰を外挿するかたちで 3 次元の Taylor-Green 流では指数的減衰が続き、有限時間で実特異性は現れないとの見方も完全に無理なものではない。しかし、むしろ次のように述べておく方が業界の雰囲気をよくとらえているかもしれない。Taylor-Green 流においては、現在のスペクトル法で検証可能な時間帯では実特異性が現れない。だから、特異性の研究は、もっと早い時刻に特異的になる可能性がある「うまい」初期条件を見つけることにかかっている。Pelz さんが精力的に研究されていた高対称 Kida 流 [11] はまさにその最有力候補といえる [7]。

3.2 適応スペクトル法

経験的に $\delta(t) \sim 2 \times (\text{空間メッシュサイズ})$ となった時点でスペクトル法の空間解像度 (あるいはモード数) が不十分になるとされている (文献 [6] の第 3 節)。

しかし、適当な座標変換 (写像) によって複素特異性を実空間から遠ざけることが可能となればモード数をいたずらに増やすことなく計算を続行することができないだろうか? これが適応スペクトル法のアイデアである。座標変換で複素特異性を遠ざけることは、言いかえると、縮んだ解析帯をズームするような座標系を虚軸方向に取ることもいえる (境界層近似の inner region の扱いのように)。

この座標変換は少なくとも次の二つの条件を満たさねばならない (i) 解析的である、(ii) 実空間の周期境界条件を保存する。また、この条件を満たす都合のよい写像が見つかったとしても、新しい問題が生じる。座標変換後のオイラー方程式に現れる微分演算子には空間依存性のある係数がつくことになるのである。これはポアソン方程式を解く際に深刻な問題となることが予想される。ましてや、座標変換は適応的に複数回行われることを考慮すると、ポアソン方程式を高精度かつ高速度に解くことが実現可能かどうか怪しくなってくる。

この適応スペクトル法は現時点では試験的な段階にとどまっており、オイラー方程式の数値計算に完全に実装するまでには至っていない。というのも、適当かつ「自然な」座標変換を見つけるためには、オイラー方程式の複素特異性の性質に基いたものである必要があるからである。そこで我々は2次元オイラー方程式の複素特異性を研究した。その結果を次節に述べる。

4 2次元オイラー方程式の複素空間における解

(複素) 特異性の研究を2次元オイラー方程式でやっていると2次元では有限時間爆発は起らないはずなから、何で2次元でやるんですか? という反応が即座に返ってくる。確かに、2次元の場合、entireな初期条件から出発したときに有限時間で実空間には特異性は現れない。しかし、2次元であっても複素空間に解を接続すると、複素空間では特異性が存在する。これを調べようというのが本節の目的である。(もちろん3次元の複素特異性に最大の関心があるのは言うまでもない。まずは2次元から研究しようというわけである。) ここで、「複素空間の特異性」と呼ぶ理由であるが、解が特異的な振舞いをする座標の集合が孤立特異点なのか、それとももっと複雑な対象なのか不明であるので、特異点とは呼ばずにあいまいさを残して「特異性」と呼んでいる。

本節では、周期境界条件の実空間上 $(x_1, x_2) \in [0, 2\pi]^2$ で entire な初期条件として

$$\psi_0(x_1, x_2) = \cos x_1 + \cos 2x_2 \quad (5)$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, t=0) = (\partial_{x_2}\psi_0, -\partial_{x_1}\psi_0) \quad (6)$$

を用いた数値計算結果を報告する (ψ_0 は流れ関数の初期値を表す)。

複素空間 $z = x + iy (y \in \mathbb{C}^2)$ の複素座標の虚数成分 y を固定して、この平面にオイラー方程式の解を接続することを考える (この平面を para-real 平面と呼ぶことにする)。つまり、ある時刻 t における解析帯の幅 $\delta(t)$ すれすれの $|y|$ をもつ para-real 平面で、複素速度場や複素渦度場がどのように特異的に振舞うのかを (x_1, x_2) 座標で観察すれば、複素特異性の何がしかの性質を捉えられると予想される。そこで、para-real 平面での場を得る方法は次の2通りが考えられる。

一つ目の方法は、スペクトル法で得られた実空間の解 (速度場 $\mathbf{u}(x, t)$) のフーリエ級数表示

$$\mathbf{u}(x, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (7)$$

を用いて、次式のように解析接続をすればよい

$$\mathbf{u}(x + iy, t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (8)$$

もちろん、複素座標の虚数成分の大きさは解析帯の幅よりも小さくしなければいけない ($|y| < \delta(t)$)。また、接続した速度場はもはや実数ではないことにも注意が必要である。実際の計算ではフーリエ係数 $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ に指数因子 $e^{-\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}$ をかけてやれば良いのであるが、この指数因子は

フーリエ係数に含まれる丸め誤差を有意な大きさに増幅することがある。そのために指数因子をかける前に丸め誤差と同じ大きさのフーリエ係数には0をセットする必要がある。

さて、para-real 平面上での場を得るもう一つの方法は、para-real 平面でのオイラー方程式を直接積分することである。para-real 平面では速度、圧力が複素数になることを考慮して、それぞれを実部と虚部に分けて $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + i\mathbf{u}_i$, $p = p_r + ip_i$ 、para-real 平面でのオイラー方程式を書き下すと、

$$\partial_t \mathbf{u}_r + (\mathbf{u}_r \cdot \nabla) \mathbf{u}_r = -\nabla p_r + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \quad (9)$$

$$\partial_t \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_r \cdot \nabla) \mathbf{u}_i = -\nabla p_i - (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_r, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_r = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0, \quad (11)$$

となる。実空間での初期条件 (5) を para-real 平面に解析接続したものを初期条件として式 (9)–(11) を解けば良い。この際、固定された \mathbf{y} はこの方程式におけるパラメータとして扱う。この方法を para-real 平面での直接積分と呼ぶことにする。

ここで para-real 平面での方程式 (9)–(11) について幾つか大事な点を述べておく。まず、この実部-虚部に分解した式は数学の文献 [12] でも既に使われている。次に、この式 (9)–(11) は磁気流体 (MHD) 方程式と類似性がある。 \mathbf{u}_r を MHD の速度場、 \mathbf{u}_i を MHD の磁場とみなすと、式 (9) が MHD の速度場の方程式、式 (10) が MHD の誘導方程式に対応することがわかる。重要な相違点は式 (10) の右辺の圧力項と右辺第 2 項の符号が逆であることである。特に式 (9)–(11) に Alfvén 波と同じ線型安定性解析 [13] を行うと、波数の大きさに比例した増幅率をもつ不安定があることが示される。これは式 (10) の右辺第 2 項の符号が負であることによるものである。この不安定は式 (8) でいうと、para-real 平面へ「平行移動」した結果の指数因子 $e^{-k \cdot \mathbf{y}}$ と同じ効果である。実際に、式 (9)–(11) をスペクトル法で積分すると数値丸め誤差の成長が激しく、計算を続行することが出来なくなる。そのため、Krasny が渦層の計算用に考案した数値フィルター [14] を応用して丸め誤差の成長を抑制した。フィルターありの倍精度計算をフィルター無しの多倍精度計算と比較すると、両者は一貫した結果を与えたのでフィルターの影響は小さいものと思われる。最後に、式 (9)–(11) には速度 $\mathbf{u}_r + i\mathbf{u}_i$ と渦度 $\omega_r + i\omega_i$ について、以下にあげる 4 つの保存量がある¹

$$\langle |\mathbf{u}_r|^2 - |\mathbf{u}_i|^2 \rangle = (\text{実空間での運動エネルギー}), \quad \langle \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_i \rangle = 0, \quad (12)$$

$$\langle \omega_r^2 - \omega_i^2 \rangle = (\text{実空間でのエンストロフィー}), \quad \langle \omega_r \omega_i \rangle = 0. \quad (13)$$

ここに、 $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \cdot dx$ である。この関係は Constantin-Lax-Majda モデル [15] がもつ保存則と似ていることも指摘された¹。

para-real 平面での場を得る 2 つの方法はいずれも、丸め誤差の成長を抑制するためのフィルターを用いた。同時刻、同一の \mathbf{y} をもつ para-real 平面の場について両方法が与える渦度場の差はフィルターレベル以下であった。

これ以後、 $\mathbf{y} = 2\pi/64(\cos(-\pi/6), \sin(-\pi/6))$ とした para-real 平面上での特異的な振舞いを para-real 平面でのフィルターあり直接積分で調べた結果を述べる。この para-real 平面と

¹2002 年 9 月に大木谷耕司氏から指摘された。

実空間との距離 $|\mathbf{y}| = 2\pi/64$ がちょうど解析帯の幅 $\delta(t)$ と等しくなる時刻は $t \sim 1.75$ と見積られる。従って、実空間からこの距離だけはなれた para-real 平面で直接積分を行っていくと $t \sim 1.75$ 付近で特異性が現れることになる。しかし、 \mathbf{y} の大きさを決めただけでは不十分で、方向も決定しなければいけない。ここで選んだ \mathbf{y} の角度 $-\pi/6$ は次のようにして決定した。まず、 \mathbf{y} の角度 θ_y を 6 通りに分割し、 $(\mathbf{y} = (2\pi/64)(\cos \theta_y, \sin \theta_y), \theta_y = -\pi/2 + j(\pi/6), j = 0, 1, \dots, 5)$ 時刻 $t = 1.6$ 付近での実空間渦度場をこの 6 つの para-real 平面に解析接続をする。そのうち渦度のスペクトル (またはエンストロフィースペクトル) が最も励起されている角度を選んだ。

こうして決定された para-real 平面には先に述べたように $t = 1.75$ 付近で特異性が現れるものと思われるが、2/3 法でエイリアス誤差を除去した 2048^2 モードのスペクトル法による直接積分 (フィルターでは渦度のフーリエ係数の大きさが 10^{-13} 以下であれば 0 にセットした) では時刻 $t \sim 1.66$ をこえると渦度場に振動が現れはじめた。そのためこの時刻より後の結果は信頼性に欠けるとみなし、振動が現れていない時刻 $t = 1.65$ におけるこの para-real 平面の渦度の実部、虚部の等高線図を図 1 に示した。ここからわかることは、特異的な振舞いはほぼ 1 次元的であり、特異性がつくる集合は滑かであると予想される (可積分系にしばしば現れるフラクタル的な自然境界とは異なるであろう)。

次に、複素渦度の大きさが最大となる点を中心として、渦度の集中した構造に垂直に切った断面を図 2 にあげた。この図 2(b) によると、1 デイケード近くにわたって $|\omega_r| \propto 1/\sqrt{|x-x_*|}$ と見なせる領域がある。解像度をあげて (1024^2 から 2048^2 とする) やや後の時刻を調べれば、特異性はこの para-real 平面にさらに近付いて、このスケーリング領域が広がると期待して試みたが、解像度 2048^2 で得られた結果は 1024^2 とくらべてスケーリング領域は広がらなかった。

この結果をナイーブに外挿すると、para-real 平面では速度は有限のまま渦度が爆発すると考えることができる。このときの渦度の実部、虚部の振舞いは図 2(a) から式 (13) の保存則にも反していないようである。

もし、これが正しいとすると以下の推論が成り立つ。複素空間においても 2 次元オイラー方程式に従う渦度はラグランジュ的に流されること、entire な初期条件では $t = 0$ に特異性は複素無限遠にあることの 2 点から、para-real 平面に現れる特異性 (無限大の渦度) は複素無限遠から流されてきた特異性が para-real 平面に衝突したものだ と推論される。この推論は、2 次元オイラー方程式の適応スペクトル法の座標変換の候補として逆ラグランジュ写像 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ があることを示唆する。ラグランジュ座標 \mathbf{a} でみると、特異性は常に複素無限遠にとどまるから常に $\delta(t) = \infty$ が成立すると考えられるのである。また、渦度場のスケーリング $-1/2$ と矛盾しない結果が $t \ll 1, |\mathbf{y}| \rightarrow \infty$ での漸近的な議論でも得られている [1]。

5 まとめと展望

非圧縮オイラー方程式の解の有限時間爆発の問題を複素特異性に着目して研究する方法について述べてきた。特に周期境界条件下で、entire な初期条件から出発した場合に、複素特異性の性質が解明されればそれを利用してスペクトル法が拡張できる可能性を指摘した (適

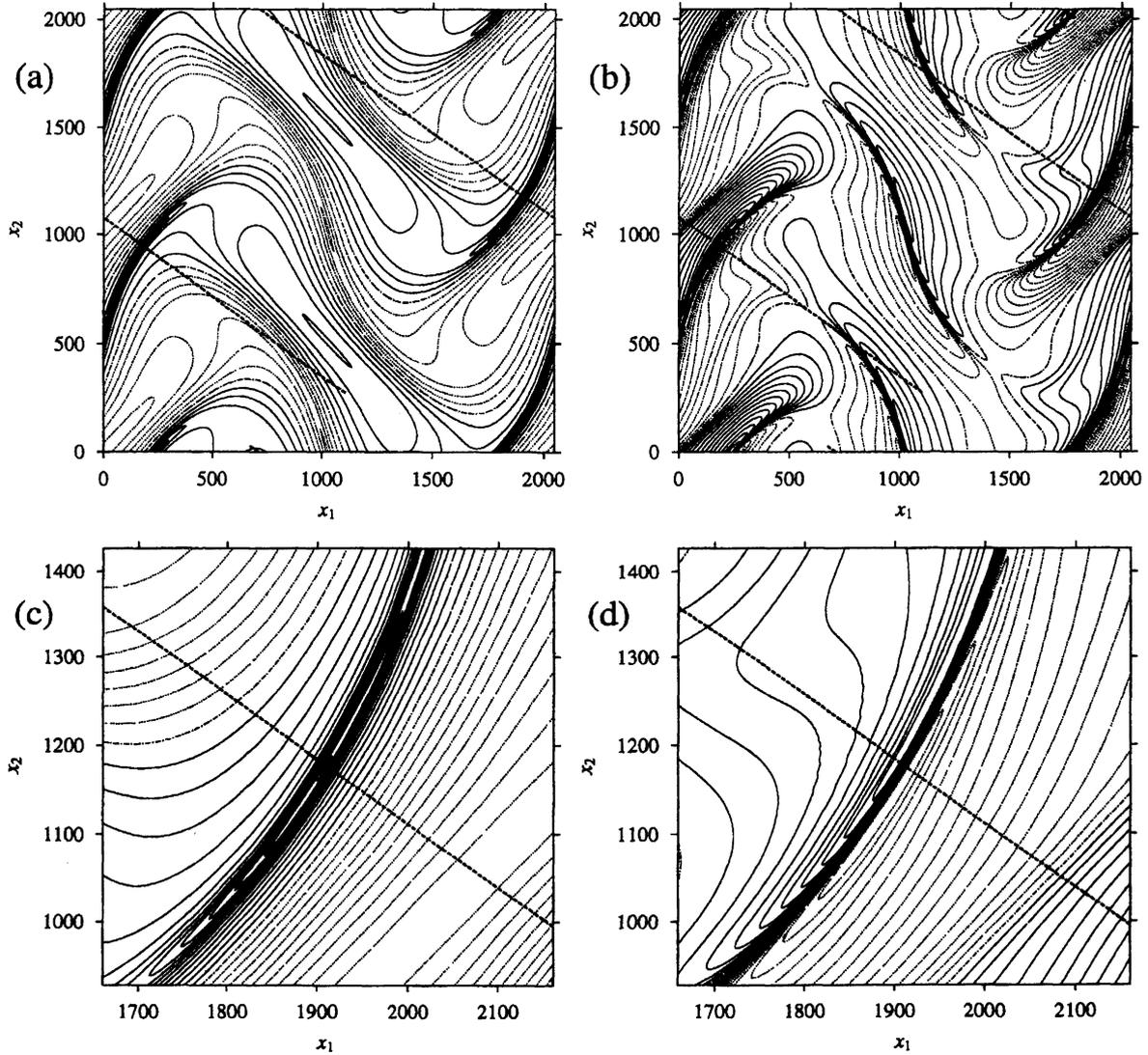


図 1: (a) para-real 平面 $\mathbf{y} = (2\pi/64)(\cos(-\pi/6), \sin(-\pi/6))$ での時刻 $t = 1.65$ における渦度の実部の等高線。実線は負、一点鎖線はゼロ、点線は正の値をあらわし、等高線間隔は 1.0。格子点数は 2048^2 で para-real 平面全体を表示している (\mathbf{y} を固定して 2π 周期の (x_1, x_2) 平面で見ている)。(b) 渦度の虚部の等高線。パラメータは (a) と同じだが、等高線間隔は 0.2。(c) 渦度の実部の等高線。特異的な振舞いをしている点 (複素渦度の大きさ $\sqrt{\omega_r^2 + \omega_i^2}$ が最大となる点) 付近を拡大したもの。(d) 渦度の虚部の等高線。特異的な振舞いをしている点付近を拡大したもの。

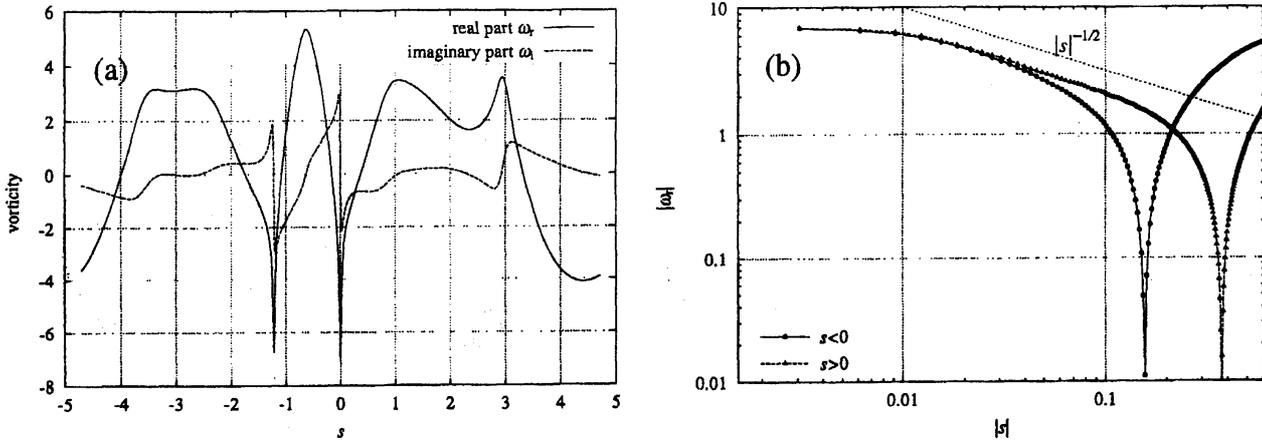


図 2: (a) 図 1 に示されている直線にそっての渦度の実部と虚部の振舞い。 $s = 0$ が para-real 平面で渦度の大きさが最大になる点に対応し、断面の方向は渦構造にほぼ垂直になるようにとってある。(b) (a) に示されている渦度の実部の大きさを両対数で表示したもの。1 ディケード近くにわたって $s = 0$ の周りに指数 $-1/2$ をもつ冪的な振舞いをする領域がある。

応スペクトル法)。

本稿では、非圧縮 2 次元オイラー方程式の複素特異性を数値的に調べた。その結果は以下のとおりである。(i) para-real 平面 (虚部を固定した複素空間) においては爆発の可能性のあるのは渦度である。(ii) 特異性は滑かな集合をなすと考えられる。(iii) 特異性の周りでは渦度に代数的な振舞いがみられた。他の entire な初期条件でも調べた結果、(i) と (ii) の初期条件依存性は弱いと思われる。しかし、(iii) について指数の初期条件依存性についてはまだ確実なことはいえない。

非圧縮 2 次元オイラー方程式の場合に、複素特異性において渦度が爆発していれば、適応スペクトル法の座標変換の候補として逆ラグランジュ写像が示唆される。現在、我々はこの 2 次元オイラー方程式の複素特異性のラグランジュ的な振舞いについての研究をすすめている。

参考文献

- [1] U. Frisch, T. Matsumoto and J. Bec, Singularities of Euler flow? Not out of the blue! *J. Stat. Phys.* in press.
- [2] U. Frisch, *Turbulence, the Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [3] A.J. Majda and A.L. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [4] 岡本久, Navier-Stokes 方程式の未解決問題, 数理科学 455, 67-74 (2001).

- [5] 大木谷 耕司, 乱流の数理解, 数学のたのしみ **25**, 32–45 (2001).
- [6] M.-E. Brachet, D.I. Meiron, S.A. Orszag, B.G. Nickel, R.H. Morf and U. Frisch, Small-scale structure of the Taylor-Green vortex, *J. Fluid Mech.* **130**, 411–452 (1983).
- [7] R.B. Pelz, Locally self-similar, finite-time collapse in a high-symmetry vortex filament model, *Phys. Rev. E* **55**, 1617–1626 (1997).
- R.B. Pelz and Y. Gulak, Evidence for a Real-Time Singularity in Hydrodynamics from Time Series Analysis, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4998–5001 (1997).
- R.B. Pelz, Symmetry and the hydrodynamic blow-up problem, *J. Fluid Mech.* **444**, 299–320 (2001).
- [8] K. Ohkitani and J.D. Gibbon, Numerical study of singularity formation in a class of Euler and Navier-Stokes flows, *Phys. Fluids* **12**, 3181–3194 (2000).
- J. D. Gibbon and K. Ohkitani, Singularity formation in a class of stretched solutions of the equations for ideal magneto-hydrodynamics, *Nonlinearity* **14**, 1239–1264 (2001).
- [9] C. Sulem, P.-L. Sulem, and H. Frisch, Tracing complex singularities with spectral methods, *J. Comput. Phys.* **50**, 138–161 (1983).
- [10] C. Bardos, S. Benachour and M. Zerner, Analyticité des solutions periodiques de l'équation d'Euler en deux dimensions, *C. R. Acad. Sc. Paris* **282** A, 995–998 (1976).
- [11] S. Kida, Three-dimensional periodic flow with high-symmetry, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 2132–2136 (1985).
- [12] Z. Grujic and I. Kukavica, Space analyticity for the Navier–Stokes and related equations with initial data in L^p , *J. Funct. Anal.* **152**, 447–466 (1998).
- [13] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Dover Publications, New York (1981). Section 39.
- [14] R. Krasny, A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation, *J. Fluid Mech.* **167**, 65–93 (1986). このフィルターについての詳しい議論は文献 [3] の Section 9.4 にもある。
- [15] P. Constantin, A. Majda and P.D. Lax, A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **38**, 715–724 (1985).