

# 双曲構造の変形と常微分方程式の 確定特異点の合流操作

Deformations of hyperbolic cone-manifolds and the confluence of singular points of  
ordinary differential equations of Fuchsian type

京都大学・大学院理学研究科 藤井道彦 (Michihiko FUJII)

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

**Abstract** : 双曲多様体上の調和ベクトル場の満たす偏微分方程式を変数分離してできる常微分方程式の確定特異点の合流と双曲多様体の構造変形との関連を述べる。

## §1. 序

多様体上のいたるところでの断面曲率が  $-1$  となる Riemann 計量を双曲構造といい、双曲構造をそなえた多様体を双曲多様体という。3次元双曲多様体で、その中の絡み目（ここでは記述を簡単にするため、絡み目の成分が1つ、つまり結び目とする）が特異点集合をなすような双曲構造をもつものを3次元双曲錐多様体 (hyperbolic 3-cone-manifold) という (双曲錐多様体に関しては文献 [1] [5] [7] が参考になる)。3次元双曲錐多様体  $C$  の特異点集合  $\Sigma$  以外のところ  $N := C - \Sigma$  には、完備ではないが、非特異な双曲構造が入っている。その  $N$  の展開写像とホロノミー表現をそれぞれ

$$D : \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$$

$$\rho : \pi_1(N) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

とする。これを双曲錐多様体  $C$  の展開写像およびホロノミー表現と呼ぶ。それらは

$$D \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ D \quad (\forall \gamma \in \pi_1(N))$$

という関係を満たす。特異点集合のところでは、その周りを一周したときの角測度となる錐角が定まる。錐角がちょうど  $2\pi$  のときには、 $C$  は特異点集合をもたないような双曲多様体である。錐角が0度のときには、特異点集合のところではカスプとなる双曲多様体である。一般に、錐角が  $2\pi/m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) とは限らないので、ホロノミー表現の像は  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$  の離散部分群であるとは限らない。

3次元双曲錐多様体の例として、 $C = S^3$  (3次元球面)、 $\Sigma = K$  ( $K$  は  $S^3$  内の8の字結び目) がある。この例の場合には錐角は半開区間  $[0, 2\pi/3)$  の中の任意の値をとることができる。

双曲錐多様体の微小変形とは、展開写像  $D$  の上の関係を満たす微小変形のことをいう。双曲錐多様体の微小変形は、ホロノミー表現の共役類  $[\rho]$  の微小変形を誘導する。この対応は局所的には一対一なので、変形が微小の場合には、ホロノミー表現の共役類の微小変形をかんがえているといってもよい。

3次元双曲錐多様体  $C$  の特異点集合  $\Sigma$  の近傍  $U$  ( $\approx$  開区間  $\times T^2$ ) では、Riemann 計量が

$$dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2 + \cosh^2 r d\phi^2$$

と表される (文献 [7] 参照)。ここで、 $r$  は  $\Sigma$  からの距離、 $\theta$  は  $\Sigma$  の周りの角測度、 $\phi$  は  $\Sigma$  に沿った距離を表すことにする。

3次元双曲錐多様体  $C$  の錐角  $\alpha$  が十分 0 に近いとする。特異点集合のまわりを回るメリディアンを  $m$  とする。そこで、 $m$  のホロノミー表現の像が楕円的に保たれたまま、錐角  $\alpha$  が単調に 0 に減少するという  $C$  の微小変形を考える。錐角が完全に 0 になると、特異点集合はいわゆるカスプとなり、このような変形を「カスプを作る変形」と呼ぶ。カスプの Riemann 計量は

$$dt^2 + e^{2-2t} dx^2 + e^{2-2t} dy^2$$

と表される。ここで、 $(t, x, y) \in (0, \infty) \times T^2$  (= カスプ) である。

本稿では、このような3次元双曲錐多様体  $C$  の微小変形が行われるときに特異点集合  $\Sigma$  の近傍での調和ベクトル場がどのように影響を受けて変化するかについて議論する。特に、雛形の2次元双曲錐多様体の場合については、カスプを作る変形が調和ベクトル場の満たす常微分方程式の確定特異点の合流操作を誘導することを計算で示す。

## §2. 双曲錐多様体上の Laplacian と調和ベクトル場

3次元双曲錐多様体  $C$  の特異点集合  $\Sigma$  の  $N = C - \Sigma$  内での管状近傍  $U$  上の (通常の実数に値をもつ) 微分形式に対する Laplacian を  $\Delta_U$  とし、偏微分方程式

$$\Delta_U \tau = \lambda \tau \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

を考える。ここで、 $\tau$  は  $U$  上の微分 1 形式であり、上述の座標  $r, \theta, \phi$  を用いると、

$$\tau = f(r, \theta, \phi) dr + g(r, \theta, \phi) \sinh r d\theta + h(r, \theta, \phi) \cosh r d\phi$$

と表せる。特に  $\lambda = -4$  のとき、つまり、 $\Delta_U \tau = -4\tau$  の解の双対ベクトル場が調和ベクトル場を与える (Ricci 曲率が  $-2$  なので Weitzenböck 公式より)。

Riemann 計量  $dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2 + \cosh^2 r d\phi^2$  について、座標系  $r, \theta, \phi$  に関する Christoffel の記号、Levi-Civita 接続および接続 1 形式を順次計算することによって、

$$\begin{aligned}
& (\Delta + 2 - \lambda)\tau \\
= & \left( -f_{rr} - \left(\frac{s}{c} + \frac{c}{s}\right) f_r + \left(\frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{s^2} - 4 - \lambda\right) f - \frac{1}{s^2} f_{\theta\theta} - \frac{1}{c^2} f_{\phi\phi} + \frac{2c}{s^2} g_\theta + \frac{2s}{c^2} h_\phi \right) dr \\
+ & \left( -g_{rr} - \left(\frac{s}{c} + \frac{c}{s}\right) g_r + \left(\frac{c^2}{s^2} - 4 - \lambda\right) g - \frac{1}{s^2} g_{\theta\theta} - \frac{1}{c^2} g_{\phi\phi} - \frac{2c}{s^2} f_\theta \right) \sinh r d\theta \\
+ & \left( -h_{rr} - \left(\frac{s}{c} + \frac{c}{s}\right) h_r + \left(\frac{s^2}{c^2} - 4 - \lambda\right) h - \frac{1}{s^2} h_{\theta\theta} - \frac{1}{c^2} h_{\phi\phi} - \frac{2s}{c^2} f_\phi \right) \cosh r d\phi
\end{aligned}$$

を得る。ここで、 $c := \cosh r$ 、 $s := \sinh r$  とし、右下の添え字はその変数に関する偏微分を表す（文献 [3] [5] [8] 参照）。

さて、この式に関して、 $U (\approx \text{開区間} \times T^2)$  において、変数分離を行うと、 $r$  に関する 3 元  $f$ 、 $g$ 、 $h$  の連立 2 階常微分方程式が出てくる。これを  $z = \tanh^2 r$  と変数変換することで変数  $z$  の連立常微分方程式を得る。さらにこれを  $g$  (あるいは  $h$ ) についての単独の方程式に直すことができる。これは  $z = 0$ 、 $z = 1$ 、 $z = \infty$  に確定特異点をもつ 6 階の Fuchs 型の常微分方程式である。この  $g$  に関する微分方程式の作用素を  $X$  とすると、

$$X = P_3 P_2 P_1 \quad (1)$$

というように因子分解されることがわかる。ここで、

$$\begin{aligned}
P_1 & := \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) \frac{d}{dz} + \left(\frac{a^2}{4z^2(z-1)} + \frac{b^2+1}{4z(z-1)} + \frac{\lambda+1}{4z(z-1)^2}\right) \\
P_2 & := \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{2}{z} + \frac{4}{z-1}\right) \frac{d}{dz} + \left(\frac{a(a+2)}{4z^2(z-1)} + \frac{b^2+25}{4z(z-1)} + \frac{\lambda+7}{4z(z-1)^2}\right) \\
P_3 & := \frac{d^2}{dz^2} + \left(\frac{6}{z} + \frac{6}{z-1}\right) \frac{d}{dz} + \left(\frac{(a-6)(a+4)}{4z^2(z-1)} + \frac{b^2+121}{4z(z-1)} + \frac{\lambda+23}{4z(z-1)^2}\right)
\end{aligned}$$

とする（文献 [2] [3] [4] 参照）。この微分作用素中の  $a$ 、 $b$  は実変数であり、錐角  $\alpha$  で定まる量である。錐角の変化に応じて、方程式の方も変化する。特に錐角が  $\alpha \rightarrow 0$  のとき、 $a \rightarrow \infty$ 、 $b \rightarrow \infty$  となるような極限操作があらわれる。

一方、カスプの近傍上でも同様に調和ベクトル場の満たすべき偏微分方程式を変数分離することで、変数を  $t$  とする 3 元の連立 2 階常微分方程式を得る。これも  $g$  (あるいは  $h$ ) についての単独方程式に直せる。これは 2 点  $t = 1$  と  $t = \infty$  のみの特異点であり、 $t = 1$  を確定特異点、 $t = \infty$  を不確定特異点とする 6 階の常微分方程式である。この微分方程式の作用素も 3 つの 2 階の微分作用素に因子分解できることがわかる。

カスプを作る変形では、錐角  $\alpha$  が単調に減少して 0 になり、特異点集合  $\Sigma$  の展開写像による像が  $\mathbf{H}^3$  の無限遠  $\partial\mathbf{H}^3$  の点に収束していく。この変形が調和ベクトル場の満たす Fuchs 型の常微分方程式の変形も引き起こす。この現象はカスプを作る 3 次元双曲錐多様体の変形と Fuchs 型の常微分方程式の確定特異点の合流操作との類似を思わせる。錐角に依存して定

まるパラメーター  $a$  と  $b$  が  $\infty$  に発散するときに、常微分方程式  $Xg(z) = 0$  の確定特異点の合流が生じてカスプの場合の合流型微分方程式が得られることを具体的に見たいところである。常微分方程式  $Xg(z) = 0$  は (1) のように 2 階の微分方程式に分解されているのであるが、そもそも 6 階の微分方程式なので、この現象を見るのは少々困難である。次の章で、実質的に 2 階の方程式を扱えば良い 2 次元双曲錐多様体の場合について、この現象を具体的に見てみよう。

### §3. 2次元双曲錐多様体の場合

前章での 3 次元双曲錐多様体のカスプを作る変形と Fuchs 型の常微分方程式の確定特異点の合流操作との類似の話を雛形の 2 次元双曲錐多様体の変形で考えることにする。

まず、2 次元カスプのところでの調和ベクトル場の満たす常微分方程式を考える。2 次元カスプの近傍  $V$  を  $\{(t, x) \mid t \in (0, \infty), x \in S^1\}$  とする。この Riemann 計量は  $dt^2 + e^{2-2t} dx^2$  である。2 次元カスプの近傍  $V$  上の微分 1 形式  $\tau$  が

$$\tau = f(t) \sin x dt + g(t) \cos x e^{1-t} dx \quad (2)$$

と表されていると仮定する。カスプの近傍  $V$  での Laplacian を  $\Delta_V$  とし、

$$\Delta_V \tau = \lambda \tau \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

という方程式を考える。微分 1 形式の双対となるベクトル場で考えると  $\lambda = -2$  の場合が調和ベクトル場の方程式に相当していることがわかる (Ricci 曲率が  $-1$  なので Weitzenböck の公式より)。この方程式に (2) を代入して次の連立常微分方程式を得る。

$$\begin{cases} \bullet f''(t) - f'(t) + (\lambda - e^{2t-2})f(t) - 2e^{t-1}g(t) = 0 \\ \bullet g''(t) - g'(t) + (\lambda - e^{2t-2})g(t) - 2e^{t-1}f(t) = 0 \end{cases}$$

そこで、 $F(t) := f(t) + g(t)$ 、 $G(t) := f(t) - g(t)$  とおくと、次の 2 つの単独な常微分方程式

$$\begin{cases} \bullet F''(t) - F'(t) + (\lambda - e^{2t-2} - 2e^{t-1})F(t) = 0 \\ \bullet G''(t) - G'(t) + (\lambda - e^{2t-2} + 2e^{t-1})G(t) = 0 \end{cases}$$

を得る。さらに  $w = 2e^{t-1}$  と変数変換することによって、

$$\begin{cases} \bullet F'''(w) + \left( \frac{\lambda}{w^2} - \frac{1}{w} - \frac{1}{4} \right) F'(w) = 0 \\ \bullet G'''(w) + \left( \frac{\lambda}{w^2} + \frac{1}{w} - \frac{1}{4} \right) G'(w) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

を得る。これらはともに Whittaker の微分方程式であり、 $w = 0$  を確定特異点とし、 $w = \infty$  を不確定特異点とする。

次に2次元錐多様体の特異点集合のまわりでの調和ベクトル場の満たす常微分方程式を考える。2次元錐多様体の特異点集合の連結成分は点であり、その管状近傍  $U$  の Riemann 計量は  $dr^2 + \sinh^2 r d\theta^2$  と表される。 $U$  上の微分1形式  $\tau$  が

$$\tau = f(r) \cos a\theta dr + g(r) \sin a\theta \sinh r d\theta \quad (4)$$

と表されていると仮定する。ここで、 $a$  は実変数であり、錐角で定まる量であり、錐角が0に減少するとき、 $a \rightarrow \infty$  となるものである。3次元の時と同様に  $U$  での Laplacian を  $\Delta_U$  とし、

$$\Delta_U \tau = \lambda \tau \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

という方程式を考える。この方程式に (4) を代入して次の連立常微分方程式を得る。

$$\begin{cases} \bullet f''(r) + \frac{\cosh r}{\sinh r} f'(r) + \left( \lambda - \frac{a^2 + 1}{\sinh^2 r} \right) f(r) - 2a \frac{\cosh r}{\sinh^2 r} g(r) = 0 \\ \bullet g''(r) + \frac{\cosh r}{\sinh r} g'(r) + \left( \lambda - \frac{a^2 + 1}{\sinh^2 r} \right) g(r) - 2a \frac{\cosh r}{\sinh^2 r} f(r) = 0 \end{cases}$$

そこで、 $F(r) := f(r) + g(r)$ 、 $G(r) := f(r) - g(r)$  とおき、さらに  $z = (\tanh r/2)^2$  と変数変換することによって、

$$\begin{cases} \bullet F''(z) + \frac{1}{z} F'(z) + \left( \frac{(a+1)^2}{4z^2(z-1)} - \frac{(a-1)^2}{4z(z-1)} + \frac{\lambda}{z(z-1)^2} \right) F(z) = 0 \\ \bullet G''(z) + \frac{1}{z} G'(z) + \left( \frac{(a-1)^2}{4z^2(z-1)} - \frac{(a+1)^2}{4z(z-1)} + \frac{\lambda}{z(z-1)^2} \right) G(z) = 0 \end{cases}$$

という2つの単独方程式を得る。さらに  $z = \frac{\xi - a}{1 - a}$  と変数変換すると、

$$\begin{cases} \bullet F''(\xi) + \frac{1}{\xi - a} F'(\xi) + \left( \frac{(1-a)(3a + a\xi + 1 - \xi)}{4(\xi - a)^2(\xi - 1)} + \frac{\lambda(1-a)}{(\xi - a)(\xi - 1)^2} \right) F(\xi) = 0 \\ \bullet G''(\xi) + \frac{1}{\xi - a} G'(\xi) + \left( \frac{5a^2 - 2a + 1 - a^2\xi - 2a\xi - \xi}{4(\xi - a)^2(\xi - 1)} + \frac{\lambda(1-a)}{(\xi - a)(\xi - 1)^2} \right) G(\xi) = 0 \end{cases}$$

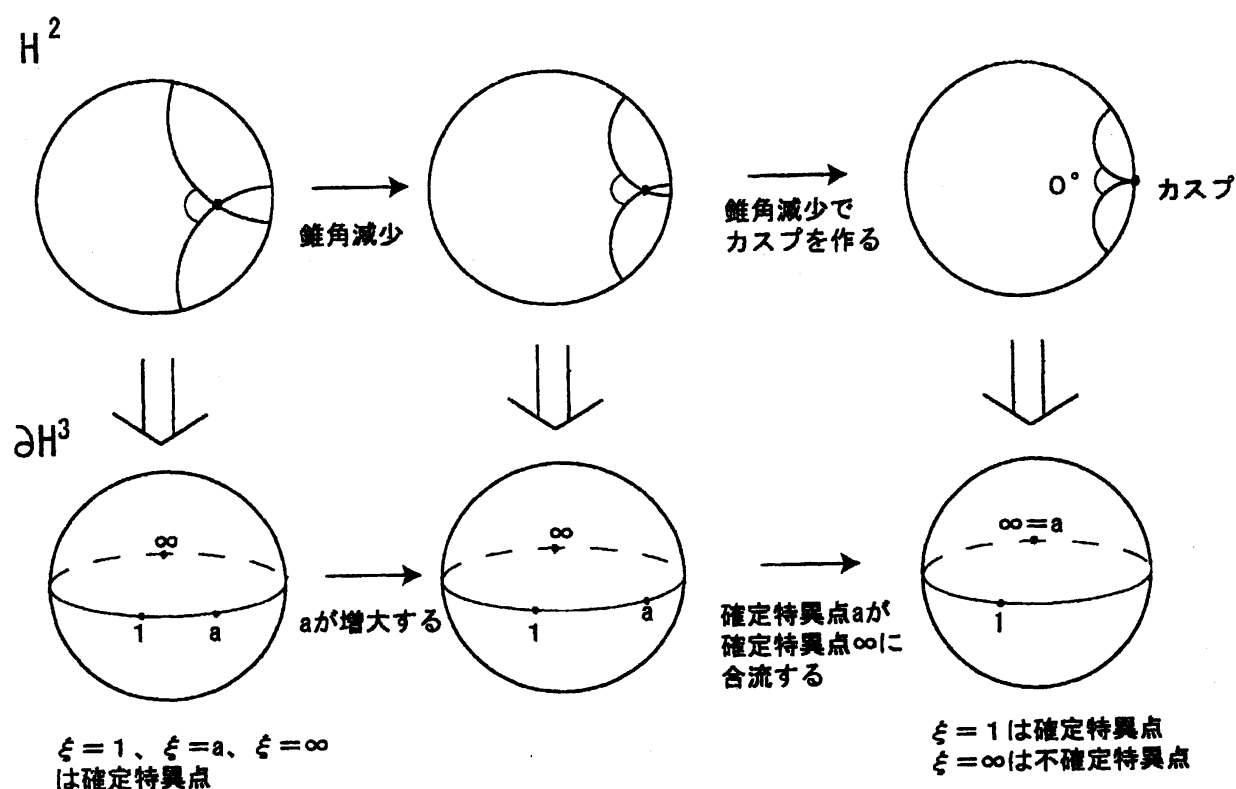
を得る。これらはともに  $\xi = 1$ 、 $\xi = a$ 、 $\xi = \infty$  を確定特異点とする。そこで、 $a \rightarrow \infty$  とすると、

$$\begin{cases} \bullet F''(\xi) + \left( \frac{\lambda}{(\xi - 1)^2} + \frac{-\xi - 3}{4(\xi - 1)} \right) F(\xi) = 0 \\ \bullet G''(\xi) + \left( \frac{\lambda}{(\xi - 1)^2} + \frac{-\xi + 5}{4(\xi - 1)} \right) G(\xi) = 0 \end{cases}$$

を得る。そこで、 $w = \xi - 1$  と変数変換すると、

$$\begin{cases} \bullet F''(w) + \left( \frac{\lambda}{w^2} - \frac{1}{w} - \frac{1}{4} \right) F(w) = 0 \\ \bullet G''(w) + \left( \frac{\lambda}{w^2} + \frac{1}{w} - \frac{1}{4} \right) G(w) = 0 \end{cases}$$

を得る。これはカスプの場合の方程式 (3) と同じものである。上の  $a \rightarrow \infty$  という極限をとる操作が確定特異点  $\xi = a$  と  $\xi = \infty$  の合流操作である。このようにして、2次元双曲錐多様体の錐角を0に近づけるというカスプを作る変形が調和ベクトル場の満たす常微分方程式の確定特異点の合流をもたらすということが具体的な計算でわかるのである。



### 参考文献

1. D. Cooper, C.D. Hodgson and S.P. Kerckhoff, Three-dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds, MSJ Memories vol. 5, Mathematical Society of Japan, 2000.
2. M. Fujii and H. Ochiai, An algorithm for solving linear ordinary differential equations of Fuchsian type with three singular points, to appear in Interdisciplinary Information Sciences 9 No.1 (2003).
3. M. Fujii and H. Ochiai, An expression of harmonic vector fields of hyperbolic 3-cone-manifolds in terms of the hypergeometric functions, in "Hyperbolic Spaces and Discrete

- Groups II (S. Kamiya ed.)", *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku* **1270** (2002), 112-125.
4. M. Fujii and H. Ochiai, An expression of harmonic vector fields on hyperbolic 3-cone-manifolds in terms of hypergeometric functions, Preprint 2003.
  5. C.D. Hodgson and S.P. Kerckhoff, Rigidity of hyperbolic cone-manifolds and hyperbolic Dehn surgery, *J. Diff. Geom.* **48**(1998), 1-59.
  6. K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé, A Modern Theory of Special Functions, *Aspect of Mathematics Vol. E16*, Vieweg, 1991.
  7. S.Kojima, Hyperboilc 3-manifolds singular along knots, *Chaos, Solitons and Fractals* **9** (1998), 765-777.
  8. S. Rosenberg, *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, London Mathematical Society Student Texts **31**, Cambridge, 1997.
  9. E.T. Whittaker and G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge, 1969.

Department of Mathematics

Graduate School of Science

Kyoto University

Kyoto 606-8502

JAPAN

e-mail address: mfujii@math.kyoto-u.ac.jp