数理解析研究所講究録 1331 巻 2003 年 15-33

非線形波動方程式系に対する存在定理

和歌山大学・教育学部数学教室 片山聡一郎 (Soichiro Katayama)

Department of Mathematics, Wakayama University

1 序

以下, $\partial_0 = \partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ $(1 \le j \le 3)$ という記法を用いることにする. 本稿では, 次の非線形波動方程式系に対する初期値問題を考える:

$$\square_i u_i = F_i(u, \partial u) \text{ in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, \cdots, m), \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \varepsilon f(x), \ (\partial_t u)(0,x) = \varepsilon g(x) \text{ for } x \in \mathbb{R}^3. \tag{1.2}$$

ここで $\square_i = \partial_t^2 - c_i^2 \Delta_x$ (c_i は正定数, $1 \le i \le m$), $u = (u_j)_{1 \le j \le m}$, $\partial u = (\partial_a u_j)_{\substack{1 \le j \le m \\ 0 \le a \le 3}}$ であり, 非線形項 $F(u,v) = \big(F_j(u,v)\big)_{1 \le j \le m}$ は, $u = (u_j)_{1 \le j \le m} \in \mathbb{R}^m$ と $v = (v_{j,a})_{\substack{1 \le j \le m \\ 0 \le a \le 3}} \in \mathbb{R}^{4m}$ の滑らかな関数で, $(u,v) = (0,0)$ の近傍において

$$F(u,v) = O(|u|^2 + |v|^2)$$

を満たすものとする (なお, $v_{j,a}$ が $\partial_a u_j$ に対応する変数である). 簡単のため, $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^m)$ と仮定する. また, ε はパラメーターで十分小さい正数である.

初期条件が小さいときに, 初期値問題 (1.1) – (1.2) が時間大域解を持つための条件について考えたい. より正確に述べると, どのような条件のもとで, "任意の $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^m)$ に対して, ある正数 ε_0 が存在して, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ ならば初期値問題 (1.1) – (1.2) は時間大域解 $u \in C^\infty\big([0,\infty) \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^m\big)$ を持つ" のかを調べたい (以下, 今述べたような意味で、小さな初期条件に対して (1.1) – (1.2) が時間大域解を持つとき, "**(GE) が成立する**" と書くことにする).

今までに知られている結果について、以下に述べる. なお, 本稿では割愛するが, 非線形項が未知関数の 2 階偏導関数を含む場合も, エネルギー不等式が得られるようにある種の対称性を仮定すれば, 全く同様に扱うことができる.

まず, 成分 u_i に対する伝播速度 c_i が全て等しい場合 $(c_1 = c_2 = \cdots = c_m)$ を考える. このときには, 非線形項 $F(u,v)$ が $(u,v) = (0,0)$ の近傍で 3 次以上であるならば (GE) が成立することが知られている. 他方, 2 次の場合には (GE) が成立しない例が知られている (例えば, $\square u = (\partial_t u)^2$). このことから, (GE) の成立のためには 2 次の非線形項に対して何らかの制約が必要であることがわかる.

Klainerman は, Null Condition と呼ばれる条件を導入し, 2 次の非線形項が Null Condition を満たすならば (GE) が成立することを示した ([6]; Christodoulou [2] は別証明を与えている). Null Condition の定義については, Klainerman が [6] で与えたものを含む形で後述する.

さて, 次に各成分 u_i に対する伝播速度 c_i が必ずしも一致しない場合について考えよう. Klainerman の Null condition をこの一般の場合に拡張しようとする試みは多くの人々により成されてきた ([1], [3], [4], [5], [8], [9], [12], [13] 等を参照のこと). まず結果を正確に述べるためにいくつかの記号と条件を導入しておこう.

$c_1, \cdots, c_m (> 0)$ が与えられたとき, $1 \leq i \leq m$ に対して

$$Y_i^m = \{y = (y_1, \cdots, y_m) \in \mathbb{R}^m; c_j \neq c_i \text{ ならば}, y_j = 0\}, \tag{1.3}$$

$$\mathcal{N}_i = \left\{ X = (X_0, X_1, X_2, X_3) \in \mathbb{R}^4; X_0^2 - c_i^2 \sum_{j=1}^{3} X_j^2 = 0 \right\} \tag{1.4}$$

と定義する. 一般に $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{4m}$ の滑らかな関数 $G(u, v)$ が与えられたとき, $G^{(2)}(u, v)$ を G の 2 次部分, すなわち

$$G^{(2)}(u, v) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} \frac{(\partial_u^\alpha \partial_v^\beta G)(0,0)}{\alpha!\beta!} u^\alpha v^\beta \tag{1.5}$$

と定義する. ここで α, β は multi − index であり, multi − index に対する通常の記法を用いた.

本稿では, 伝播速度が必ずしも一致しない場合に対して, Null Condition を次のように定義する (これは $c_1 = c_2 = \cdots = c_m$ の場合には Klainerman の導入した条件と同値なものとなることに注意しておく):

定義 1.1 (Null Condition) $u = (u_j)_{1 \leq j \leq m} \in \mathbb{R}^m$ および $v = (v_{j,a})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq a \leq 3}} \in \mathbb{R}^{4m}$ の関数 $F(u, v) = \big(F_i(u, v)\big)_{i=1,\cdots,m}$ が *Null Condition* を満たすとは, 次の 2 条件を満たすことである.

(a) 各 $i \in \{1, \cdots, m\}$ に対して,

$$F_i^{(2)}\big(\lambda, V(\mu, X)\big) = 0 \tag{1.6}$$

が任意の $\lambda, \mu \in Y_i^m$ と任意の $X \in \mathcal{N}_i$ に対して成立する. ここで $V(\mu, X) \in \mathbb{R}^{4m}$ は $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_m)$ と $X = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ に対して

$$V(\mu, X) = \big(V_{j,a}(\mu, X)\big)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq a \leq 3}} = \big(\mu_j X_a\big)_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 0 \leq a \leq 3}} \tag{1.7}$$

で与えられるものとする.

(b) 各 $i \in \{1, \cdots, m\}$ に対して

$$F_i^{(2)}(u, 0, 0) = 0 \tag{1.8}$$

が任意の $u \in \mathbb{R}^m$ に対して成立する[1].

以下, 本稿を通じて, 関数族 $\{\varphi_\lambda(t,x)\}_{\lambda\in\Lambda}$ と 関数 $\psi(t,x)$ が与えられたときに, 定数 c_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が存在して $\psi(t,x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda \varphi_\lambda(t,x)$ と書けるならば, 記号 $\sum'$ を用いて $\psi(t,x) = \sum'_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(t,x)$ と簡略化して表すことにする.

Null Condition を満たしているならば, $1 \le i \le m$ に対して $F_i(u, \partial u)$ は次の形に書ける:

$$F_i(u,\partial u) = N_i(\partial u) + R_i^w(u,\partial u) + R_i^s(u,\partial u) + H_i(u,\partial u), \tag{1.9}$$

$$N_i(\partial u) = \sum\nolimits'_{\{j,k;c_j=c_k=c_i\}} Q_0(u_j,u_k;c_i) + \sum\nolimits'_{\substack{\{j,k;c_j=c_k=c_i\}\\ 0\le a<b\le 3}} Q_{a,b}(u_j,u_k), \tag{1.10}$$

$$R_i^w(u,\partial u) = \sum\nolimits'_{\substack{\{j,k;c_j=c_k\neq c_i\}\\ 0\le a\le 3}} u_j(\partial_a u_k) + \sum\nolimits'_{\substack{\{j,k;c_j=c_k\neq c_i\}\\ 0\le a,b\le 3}} (\partial_a u_j)(\partial_b u_k), \tag{1.11}$$

$$R_i^s(u,\partial u) = \sum\nolimits'_{\substack{\{j,k;c_j\neq c_k\}\\ 0\le a\le 3}} u_j(\partial_a u_k) + \sum\nolimits'_{\substack{\{j,k;c_j\neq c_k\}\\ 0\le a,b\le 3}} (\partial_a u_j)(\partial_b u_k), \tag{1.12}$$

$$H_i(u,\partial u) = O(|u|^3 + |\partial u|^3). \tag{1.13}$$

ここで $Q_0(u_j, u_j; c_i)$ や $Q_{a,b}(u_j, u_k)$ $(0 \le a < b \le 3)$ は Null Form と呼ばれるもので, それぞれ

$$Q_0(u_j,u_k;c_i) = (\partial_t u_j)(\partial_t u_k) - c_i^2(\nabla_x u_j)\cdot(\nabla_x u_k), \tag{1.14}$$

$$Q_{a,b}(u_j,u_k) = (\partial_a u_j)(\partial_b u_k) - (\partial_b u_j)(\partial_a u_k) \tag{1.15}$$

で定義される. 先にも述べたように Klainerman は $c_1 = \cdots = c_m$ の場合に, F が Null Condition を満たすならば (GE) が成立することを示した. この場合には, 伝播速度 c_i が全て等しいので $R_i^w(u,\partial u) = R_i^s(u,\partial u) \equiv 0$ となることに注意されたい.

伝播速度が異なる場合には, 上記の Null Condition のみではなく, さらになんらかの付加条件が必要となるようである (上記の Null Condition は満たすが, 解は有限時間で爆発するような例が太田氏により最近得られた). 伝播速度が必ずしも一致しないシステムに対して, 著者が [3], [4], [5] で得た結果をまとめると次のようになる.

[1] $c_1 = c_2 = \cdots = c_m$ の場合には $Y_i^m = \mathbb{R}^m$ となるので, 条件 (a) が成立するならば, (1.8) も自動的に成立する.

定理 1.1 非線形項 $F=(F_i)_{1\le i\le m}$ が *Null Condition* を満たしているとする．さらに，以下の 3 条件 (H1) – (H3) のうちのいずれか一つを選べば，その条件が全ての F_i $(1\le i\le m)$ に対して成立していると仮定する．このとき，(1.1)–(1.2) に対して (GE) が成立する：

(H1) 関数 $G_{i,a}$ $(0\le a\le 3)$ が存在して，

$$F_i^{(2)}(u,\partial u)=\sum_{0\le a\le 3}{}' \partial_a G_{i,a}(u)$$

が任意の C^1 級関数 u に対して成立する．

(H2) 任意の $u\in\mathbb{R}^m$, $v\in\mathbb{R}^{4m}$ に対して

$$F_i^{(2)}(u,v)=F_i^{(2)}(0,v)$$

が成立する．すなわち $F_i^{(2)}(u,\partial u)$ は ∂u のみに依存して，u には依存しない．

(H3) (1.6) 式

$$F_i^{(2)}\big(\lambda,V(\mu,X)\big)=0$$

が任意の $(\lambda,\mu)\in\bigcup_{j=1}^m(Y_j^m\times Y_j^m)$ と任意の $X\in\mathcal{N}_i$ に対して成立する[2]．ただし，以前と同じく $V(\mu,X)=(\mu_j X_a)_{\substack{1\le j\le m\\ 0\le a\le 3}}$ とする．

上の定理の結果は，先にあげた [1], [8], [9], [12], [13] の結果を全て含んでいる．また $c_1=\cdots=c_m$ の場合には，F が Null Condition を満たすとき，条件 (H2) と (H3) の双方が全ての F_i に対して成立することが分かるから，いずれにせよ Klainerman [6] の結果もこの定理に含まれていると言える．この例からも分かるように，非線形項によっては上記の 3 条件 (H1), (H2), (H3) のうちのいくつかを同時に満たすこともあり得ることに注意しておく．また，すぐ下で見るように，この 3 条件のいずれか一つしか満たさないような非線形項も存在する．Null Condition, (H1), (H2), (H3) の全てが非線形項の 2 次の項のみに対する条件であるから，3 次以上の高次の項は一切制限されていないことにも注意しておく．

さて，Null Condition を満たす場合には非線形項の具体的な表現 (1.9) – (1.13) をすでに見たが，これに (H1), (H2), (H3) を課した場合，どのような非線形項が許されるのかを以下で詳しく見てみよう．

[2]Null Condition (定義 1.1 – (a)) では，$(\lambda,\mu)\in Y_i^m\times Y_i^m$ に対してのみ (1.6) 式の成立を仮定していたことに注意．

Null Condition+(H1): (1.9) において, $N_i(\partial u) \equiv 0$ となり, さらに

$$R_i^w(u, \partial u) = \sum_{\substack{\{j,k; c_j = c_k \neq c_i\} \\ 0 \le a \le 3}}' \{u_j(\partial_a u_k) + (\partial_a u_j) u_k\}, \tag{1.16}$$

$$R_i^s(u, \partial u) = \sum_{\substack{\{j,k; c_j \neq c_k\} \\ 0 \le a \le 3}}' \{u_j(\partial_a u_k) + (\partial_a u_j) u_k\} \tag{1.17}$$

となる. H_i は以前の通り (1.13) 以外の制限はつかない. Null Condition と (H1) を満たすが, (H2) や (H3) を満たさないような例としては

$$\begin{cases} \Box_1 u_1 = u_2(\partial_t u_2), \\ \Box_2 u_2 = u_1(\partial_t u_1) \end{cases} \tag{1.18}$$

がある (ただし $c_1 \neq c_2$ と仮定).

Null Condition+(H2): (1.9) において,

$$R_i^w(u, \partial u) = \sum_{\substack{\{j,k; c_j = c_k \neq c_i\} \\ 0 \le a,b \le 3}}' (\partial_a u_j)(\partial_b u_k), \tag{1.19}$$

$$R_i^s(u, \partial u) = \sum_{\substack{\{j,k; c_j \neq c_k\} \\ 0 \le a,b \le 3}}' (\partial_a u_j)(\partial_b u_k) \tag{1.20}$$

となる. N_i と H_i に関しては, それぞれ (1.10) と (1.13) の形であれば, それ以上の制限は必要ない.

Null Condition と (H2) を満たすが, (H1) や (H3) を満たさないような例としては

$$\begin{cases} \Box_1 u_1 = (\partial_t u_2)^2, \\ \Box_2 u_2 = (\partial_t u_1)^2 \end{cases} \tag{1.21}$$

がある (ただし $c_1 \neq c_2$).

Null Condition+(H3): (1.9) において, N_i, R_i^s, H_i は (H3) を満たしているので, それぞれ (1.10), (1.12), (1.13) の形ならばよい. R_i^w に関しては N_i と同様の

$$R_i^w(u, \partial u) = \sum_{\{j,k; c_j = c_k \neq c_i\}}' Q_0(u_j, u_k; c_j) + \sum_{\substack{\{j,k; c_j = c_k \neq c_i\} \\ 0 \le a,b \le 3}}' Q_{a,b}(u_j, u_k) \tag{1.22}$$

の形であるという制限がつく. Null Condition と (H3) を満たすが, (H1) と (H2) を満たさないような例としては

$$
\begin{cases} \square_1 u_1 = (\partial_t u_1) u_2, \\ \square_2 u_2 = (\partial_t u_2) u_1 \end{cases} \tag{1.23}
$$

がある (ただし $c_1 \neq c_2$).

さて, 定理 1.1 においては, Null Condition に加えて, (H1), (H2), (H3) の 3 条件の中から選ばれた同一の条件を全ての成分 F_i が満たさなければならなかった. 例えば, F_1 は (H1) を満たし, F_2 は (H2) を満たし, F_3 は (H3) を満たすといったような場合を扱えるように定理 1.1 の条件を緩めることができるであろうか. 証明の枠組みが (H1), (H2), (H3) のそれぞれを仮定したときにお互いに異なるために, これは自明な問題ではない. それどころか, 上に述べた形の拡張は, 無条件には成立し得ないことが次の例より分かる:

$$
\begin{cases} \square_1 u_1 = (\partial_t u_1) u_2, \\ \square_2 u_2 = (\partial_t u_1)^2 \end{cases} \tag{1.24}
$$

(ただし $c_1 \neq c_2$). この例の非線形項は Null Condition を満たしている. また, u_1 の方程式の右辺 $(\partial_t u_1) u_2$ は 仮定 (H3) を満たし, u_2 の方程式の右辺 $(\partial_t u_1)^2$ は仮定 (H2) を満たしている. ところが, この方程式系に対しては $c_1 < c_2$ のときには (GE) が成立しないことが示される (太田氏の「半線形波動方程式系の解の爆発」を参照のこと). 従って, なんらかの制限は必要であることがわかる.

本稿の目的は, 条件 (H1) と (H3) の組み合わせに対して, (GE) が成り立つことを示すことである. 一般化した形で結果を述べることも可能だが, 正確な条件の記述や証明等がかなり煩雑になるので, 本稿では次の例のみに考察を限定する.

$$
\begin{cases} \square_1 u_1 = 2u_2(\partial_a u_2) & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3, \\ \square_2 u_2 = A u_1 (\partial_b u_2) + B(\partial_b u_1) u_2 & \text{in } (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{1.25}
$$

$$
u_i(0,x) = \varepsilon f_i(x),\ \partial_t u_i(0,x) = \varepsilon g_i(x) \text{ for } x \in \mathbb{R}^3\ (i = 1,2). \tag{1.26}
$$

ただし $0 \leq a, b \leq 3$ であり, A, B は実定数である. また, (これまでの記法通り) $\square_i = \partial_t^2 - c_i^2 \Delta_x$ $(i = 1,2)$ であって, 正定数 c_1, c_2 は $c_1 \neq c_2$ を満たすと仮定する.

この例の非線形項は Null Condition は満たしている. $F_1 = 2u_2(\partial_a u_2)\big(= \partial_a (u_2)^2\big)$ は条件 (H1) を満たしているが, (H2) と (H3) は満たさない. $F_2 = A u_1 (\partial_b u_2) + B(\partial_b u_1) u_2 \big(= (A - B) u_1 (\partial_b u_2) + B \partial_b (u_1 u_2)\big)$ は条件 (H3) を満たしているが, $A = B = 0$ でない限り (H2) は満たさない. また $A = B$ の場合を除き (H1) も満たさな

い. 特殊な場合を除けば, F_1 と F_2 が同時に (H1)-(H3) のうちの同一条件を満たすことはないから, 定理 1.1 は適用できないことになる.

本稿での主結果は以下の通り. なお, この結果は, 筆者と横山和義氏との共同研究による結果の一部である.

定理 1.2 初期値問題 (1.25) - (1.26) に対して (GE) が成立する.

次節で定理 1.2 の証明に使う基礎的な評価式を (証明抜きで) 紹介する. 第 3 節では実際に定理 1.2 の証明を行う.

2 線形波動方程式に対する様々な評価式

まず, いくつかの作用素を導入する. Γ_0 と Ω_{jk} $(1 \leq j < k \leq 3)$ を

$$\Gamma_0 = t\partial_t + \sum_{j=1}^{3} x_j \partial_j, \tag{2.1}$$

$$\Omega_{jk} = x_j\partial_k - x_k\partial_j \ (1 \leq j < k \leq 3) \tag{2.2}$$

で定義する. これらに ∂_a $(0 \leq a \leq 3)$ を加えて適当な順番に並べ,

$$\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \cdots, \Gamma_7\} = \{\Gamma_0; \Omega_{jk}\ (1 \leq j < k \leq 3); \partial_a\ (0 \leq a \leq 3)\} \tag{2.3}$$

と名前をつけておく. また, multi − index $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1 \cdots, \alpha_7)$ を用いて

$$\Gamma^\alpha = \Gamma_0^{\alpha_0}\Gamma_1^{\alpha_1}\cdots\Gamma_7^{\alpha_7}$$

と書くことにする. よく知られているように $[\Gamma_0, \Box_i] = -2\Box_i$, $[\Gamma_j, \Box_i] = 0$ $(1 \leq j \leq 7)$ となり, さらに $[\Gamma_a, \partial_b] = \sum'_{0\leq c\leq 3} \partial_c$ $(0 \leq a \leq 7, 0 \leq b \leq 3)$ となることから,

$$\Box_i(\Gamma^\alpha u_i) = \sum_{|\beta|\leq|\alpha|}{}' \Gamma^\beta(\Box_i u_i), \tag{2.4}$$

$$\Gamma^\alpha(\partial_a u_i) = \sum_{\substack{|\beta|\leq|\alpha| \\ 0\leq b\leq 3}}{}' \partial_b(\Gamma^\beta u_i),\ \partial_a(\Gamma^\alpha u_i) = \sum_{\substack{|\beta|\leq|\alpha| \\ 0\leq b\leq 3}}{}' \Gamma^\beta(\partial_b u_i) \tag{2.5}$$

が成立することが分かる.

十分滑らかな関数 $\varphi(t,x)$, 非負の整数 s と $1 \leq p \leq \infty$ に対して

$$|\varphi(t,x)|_s = \sum_{0\leq|\alpha|\leq s} |\Gamma^\alpha\varphi(t,x)|, \tag{2.6}$$

$$\|\varphi(t,\cdot)\|_{s,p} = \|\, |\varphi(t,\cdot)|_s \,\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \tag{2.7}$$

と定義する.

波動方程式の解の減衰に関連した量もいくつか定義しておく:

$$w_+(t,x) = 1 + t + |x|, \tag{2.8}$$

$$w_j(t,x) = 1 + \big|c_j t - |x|\big| \quad (j = 1, 2), \tag{2.9}$$

$$w_0(t,x) = 1 + |x|, \tag{2.10}$$

$$w_-(t,x) = \min_{0 \le j \le 2} w_j(t,x). \tag{2.11}$$

このとき, 容易に分かるように $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^3$ に対して

$$w_j(t,x) w_k(t,x) \ge C w_+(t,x) w_-(t,x) \ (0 \le j < k \le 2), \tag{2.12}$$

となる. また, $j,k,l \in \{0,1,2\}$ かつ j,k,l が互いに相異なる場合には, $0 < \mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3$ とすると

$$w_j(t,x)^{\mu_1} w_k(t,x)^{\mu_2} w_l(t,x)^{\mu_3} \ge C w_+(t,x)^{\mu_1+\mu_2} w_-(t,x)^{\mu_3} \tag{2.13}$$

が成り立つ.

さて, $\Phi(t,x)$ に対し, $L_i(\Phi)(t,x)$ $(i = 1,2)$ を $L_i(\Phi)(t,x) = \phi(t,x)$ で定義する. ここで $\phi(t,x)$ は線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \Box_i \phi(t,x) = \Phi(t,x) & \text{for } (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^3 \\ \phi(0,x) = (\partial_t \phi)(0,x) = 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \tag{2.14}$$

に対する解である.

このとき, 次の減衰評価が成り立つ. 証明は Kubota – Yokoyama [9] を参照されたい.

補題 2.1 $c_1 \ne c_2$ と仮定する. また $i = 1,2$ とする.

(I) 以下の $D(t,x)$ と $W(t,x)$ の組み合わせに対して, 評価式

$$D(t,x)|L_i(\Phi)(t,x)| \le C \sup_{\substack{0 \le s \le t \\ y \in \mathbb{R}^3}} |y| W(s,y) |\Phi(s,y)| \tag{2.15}$$

が成り立つ:

(i) $D = w_+ w_i^{\nu}$, $W = w_+^{1+\nu} w_-^{1+\mu}$. ただし $\nu > 0$, $\mu > 0$.

(ii) $D = w_+^{1-\rho-\delta} w_i^{\delta}$, $W = w_+^{1+\mu-\rho} w_-^{1-\mu}$. ただし $\rho \ge 0$, $\delta > 0$, $\mu > 0$.

(II) $0 \le a \le 3$ とする．このとき，以下の $D(t,x)$ と $W(t,x)$ の組み合わせに対して，評価式

$$D(t,x)|L_i(\partial_a\Phi)(t,x)| \le C \sup_{\substack{0\le s\le t\\ y\in\mathbb{R}^3}} |y|W(s,y)|\Phi(s,y)|_1 \tag{2.16}$$

が成り立つ:

(i) $D = w_0 w_i^\nu$, $W = w_+^{\nu+\mu} w_j^{1-\mu}$．ただし $\nu > 0$, $\mu > 0$, $j = 0,1,2$．$0 < \nu < 1$ のときには，さらに $j \ne i$ という制限がつく．

(ii) $D = w_0 w_i^\nu$, $W = w_+^{1+\mu} w_i^{\nu-\mu}$．ただし $0 < \nu \le 1$, $\mu > 0$.

(iii) $D = w_0 w_i$, $W = w_+ w_j^{1+\mu}$ ただし $\mu > 0$, $j = 0,1,2$ かつ $j \ne i$.

(iv) $D = w_+^{-\rho} w_0 w_i$, $W = w_+^{1+\mu-\rho} w_-^{1-\mu}$．ただし $\rho \ge 0$, $\mu > 0$.

なお、$\partial_a L_i(\Phi)$ の減衰評価に際しては，$a \ne 0$ のときは $\partial_a L_i(\Phi) = L_i(\partial_a\Phi)$ であるから上記の (II) がそのまま適用できる．$a = 0$ の場合は初期条件に補正が必要であるが，この部分の評価は容易なので，本質的には (II) がそのまま適用できると思ってよい．

また，補題 2.1 において，同じ減衰率 D に対応している限り，重みの W は場所により別のものに取り替えても結果は正しいことにも注意しておく．このことから，例えば (II) -(iii) において，$W = w_+ w_-^{1+\mu}$ としても，$W = w_+ \left(\min_{j=0,1} w_j\right)^{1+\mu}$ としても，結果は正しいことが分かる．

次に様々な L^2 評価について述べる．次のエネルギー評価は古典的である．

補題 2.2 (エネルギー評価) $t \ge 0$ に対して

$$\|\partial L_i(\Phi)(t,\cdot)\|_{L^2} \le C \int_0^t \|\Phi(s,\cdot)\|_{L^2} ds$$

が成り立つ．

Klainerman による conformal energy の評価 ([6]) と，Lindblad による Γ 等の作用素を用いた ∂_a の書き換え ([10]) を組み合わせると，次のような $\|L_i(\Phi)\|_{L^2}$ の評価と，重みつきのエネルギー評価が得られる．証明の詳細は筆者の [5] を参照されたい．

補題 2.3 $i = 1,2$ に対して，次の評価式が成立する:

$$\begin{aligned}\|L_i(\Phi)(t,\cdot)\|_{1,2} &+ \|w_i(t,\cdot)\partial L_i(\Phi)(t,\cdot)\|_{L^2}\\ &\le C \int_0^t \|w_+(s,\cdot)\Phi(s,\cdot)\|_{L^2} ds.\end{aligned} \tag{2.17}$$

先ほどと同様に, 大雑把には $L_i(\partial_a\Phi) = \partial_a L_i(\Phi)$ と考えてよいので, $\|L_i(\partial_a\Phi)\|_{L^2}$ に対する評価は, エネルギー評価から容易に得られる. さらに, $\partial L_i(\partial_a\Phi)$ は大雑把には $L_i(\Phi)$ の 2 階微分であることに注意すると, Klainerman – Sideris による Γ を用いた 2 階微分の書き換え ([7]) を用いることができる. この二つの式を組み合わせると, 次のような評価式が得られることが分かる. 詳細については, やはり筆者の [5] を参照されたい.

補題 2.4 $a = 0, 1, 2$ とし, $i = 1, 2$ とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
&\|L_i(\partial_a\Phi)(t,\cdot)\|_{1,2} + \|w_i(t,\cdot)\partial L_i(\partial_a\Phi)(t,\cdot)\|_{L^2} \\
&\quad \le C\left\{\int_0^t \|\Phi(s,\cdot)\|_{1,2}ds + \|w_+(t,\cdot)\Phi(t,\cdot)\|_{L^2} + \|\Phi(s,\cdot)\|_{1,2}\Big|_{s=0}\right\}
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

が成立する.

初期値 $\phi(0,x) = f(x)$, $(\partial_t\phi)(0,x) = g(x)$ に対する, 斉次波動方程式 $\Box_i\phi = 0$ の解 ϕ に対しても, 上に述べた非斉次の場合に対応するような減衰評価や, L^2 評価が得られるが, 比較的容易であるから本稿では詳細は省くことにする.

最後に, 次の Sobolev 型の評価式を紹介して本節を終える.

補題 2.5 十分滑らかな関数 $\psi(t,x)$ に対して

$$|x|\,|\psi(t,x)| \le C\|\psi(t,\cdot)\|_{2,2}$$

が成立する.

証明については, 例えば Klainerman – Sideris [7] を参照されたい.

3　定理 1.2 の証明

非線形双曲型方程式系に対する古典的な局所解の存在定理を用いると, ある時刻 T までは解が存在することが分かる. また, 大域解の存在を示すことは, この局所解に対する, 適当なアプリオリ評価を示すことに帰着されることも分かる.

そこで, $u(t,x)$ を $0 \le t < T$ における (1.25) – (1.26) の C^∞ 解であるとして, アプリオリ評価を行う量 $E(T)$ を次のように定義する:

$$E(T) = \sup_{0\le t<T} e(t), \tag{3.1a}$$

$$\text{(3.1b)} \qquad e(t) = \left\{ \sum_{k=1}^{4} \|e_k(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \right\} + e_5(t) + e_6(t),$$

$$\text{(3.1c)} \qquad e_1(t,x) = \sum_{i=1}^{2} w_0(t,x) w_i(t,x) |u_i(t,x)|_{K+1},$$

$$\text{(3.1d)} \qquad e_2(t,x) = w_0(t,x) w_1(t,x)^{\rho_1} |u_1(t,x)|_{K+3},$$

$$\text{(3.1e)} \qquad e_3(t,x) = w_0(t,x) w_2(t,x)^{\rho_1} |u_2(t,x)|_{K+2} + w_0(t,x) w_2^{1+\rho_2} |\partial u_2(t,x)|_{K+1},$$

$$\text{(3.1f)} \qquad e_4(t,x) = w_+^{-2\lambda} \sum_{i=1}^{2} \big(w_+(t,x)^{1-\delta} w_i(t,x)^{\delta} |u_i(t,x)|_{2K-2} + w_0(t,x) w_i(t,x) |\partial u_i(t,x)|_{2K-3} \big),$$

$$\text{(3.1g)} \qquad e_5(t) = (1+t)^{-\lambda} \sum_{i=1}^{2} \left(\|u_i(t)\|_{2K,2} + \big\| w_i(t) |\partial u_i(t)|_{2K-1} \big\|_{L^2} \right),$$

$$\text{(3.1h)} \qquad e_6(t) = (1+t)^{-\lambda} \sum_{i=1}^{2} \|\partial u_i(t)\|_{2K,2}$$

である. また, K は十分大きな整数, $0 < \lambda \ll 1$, $0 < \rho_2 < \rho_1 < 1 - 2\lambda$, $0 < \delta < \min\{1 - 2\lambda - \rho_1, \rho_1\}$ とする.

本節の目標は次の命題を示すことである:

命題 3.1 ある (T とは独立な) 定数 $\varepsilon_1(>0)$ と $M(>0)$ が存在して, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ かつ $E(T) \le M$ ならば

$$E(T) \le C_0(\varepsilon^2 + E(T)^2)$$

が成立する. ここで C_0 は, T や ε とは独立な定数である.

命題 3.1 が示されれば, よく知られた論法 (continuation argument, bootstrap argument) により, ε が十分小さいときには, 解が存在する限り $E(T)$ は有界に留まることが分かる. このことと, 局所解の存在定理を組み合わせると, 大域解の存在が分かり, 定理 1.2 が得られる. そこで, 本節の残った部分では命題 3.1 を示すことにする.

命題 3.1 の証明: 以下では, ε や $E(T)$ は十分に小さいものとする.
$e_6(t)$ の評価について: F_i は原点近傍で 2 次の関数だから,

$$\|F_i(t,x)\|_{2K,2} \le C \|u(t,x)\|_{K+1,\infty} (\|u(t)\|_{2K,2} + \|\partial u(t)\|_{2K,2})$$

と評価できる．よって補題 2.2 を適用すると，

$$\begin{aligned}\|\partial u(t)\|_{2K,2} \leq & C\left(\varepsilon+\int_0^t (1+s)^{\lambda-1}\|e_1(s)\|_{L^\infty}\{e_5(s)+e_6(s)\}\,ds\right)\\ \leq & C\left(\varepsilon+(1+t)^{\lambda}E(T)^2\right)\end{aligned} \tag{3.2a}$$

を得る．従って

$$\sup_{0\leq t<T} e_6(t) \leq C\left(\varepsilon+(1+t)^{\lambda}E(T)^2\right) \tag{3.2b}$$

である．

<u>$e_5(t)$ の評価について:</u>

$$\begin{aligned}&\|u_2(t)^2\|_{2K,2} \leq C(1+t)^{\lambda-1}\|e_1(t)\|_{L^\infty}e_5(t),\\ &\|w_+(t)|u_2(t)^2|_{2K-1}\|_{L^2} \leq C(1+t)^{\lambda}\|e_1(t)\|_{L^\infty}e_5(t)\end{aligned}$$

であるから，補題 2.4 を用いると

$$\|u_1(t)\|_{2K,2}+\left\|w_1(t)|\partial u_1(t)|_{2K-1}\right\|_{L^2} \leq C\left(\varepsilon+(1+t)^{\lambda}E(T)^2\right) \tag{3.3}$$

が分かる．

次に $|\alpha|\leq 2K-1$ として (2.4) を用いると，

$$\square_2(\Gamma^\alpha u_2)=\sideset{}{'}\sum_{|\beta|+|\gamma|\leq 2K-1}\left\{A(\Gamma^\beta u_1)(\Gamma^\gamma\partial_b u_2)+B(\Gamma^\beta\partial_b u_1)(\Gamma^\gamma u_2)\right\}$$

を得るから，$V_{\beta,\gamma}=(\Gamma^\beta u_1)(\Gamma^\gamma\partial_b u_2)$, $W_{\beta,\gamma}=(\Gamma^\beta\partial_b u_1)(\Gamma^\gamma u_2)$ とおけば

$$\begin{aligned}&\|u_2(t)\|_{2K,2}+\|w_2(t)|\partial u_2(t)|_{2K-1}\|_{L^2}\\ &\quad\leq C\varepsilon+C\sum_{|\beta|+|\gamma|\leq 2K-1}\left\{\|L_2(V_{\beta,\gamma})(t)\|_{1,2}+\|w_2(t)\partial L_2(V_{\beta,\gamma})(t)\|_{L^2}\right\}\\ &\qquad+C\sum_{|\beta|+|\gamma|\leq 2K-1}\left\{\|L_2(W_{\beta,\gamma})(t)\|_{1,2}+\|w_2(t)\partial L_2(W_{\beta,\gamma})(t)\|_{L^2}\right\}\end{aligned} \tag{3.4a}$$

となることが分かる．

$|\beta|\leq|\gamma|$ のとき，$|\beta|\leq K$, $|\gamma|\leq 2K-1$ となることに注意すると，

$$\begin{aligned}\|w_+(t)V_{\beta,\gamma}\|_{L^2} \leq & C\left\|w_+(t)w_2(t)^{-1}|u_1(t)|_K\right\|_{L^\infty}\left\|w_2(t)|u_2(t)|_{2K-1}\right\|_{L^2}\\ \leq & C\left\|w_+(t)w_0(t)^{-1}w_1(t)^{-1}w_2(t)^{-1}\right\|_{L^\infty}\|e_1(t)\|_{L^\infty}(1+t)^{\lambda}e_5(t)\\ \leq & C(1+t)^{\lambda-1}E(T)^2\end{aligned} \tag{3.4b}$$

を得る (2 行目から 3 行目へは (2.13) を用いた). 従って, 補題2.3 を適用すると

$$\|L_2(V_{\beta,\gamma})(t)\|_{1,2} + \|w_2(t)\partial L_2(V_{\beta,\gamma})(t)\|_{L^2} \le C\left(\varepsilon + (1+t)^{\lambda}E(T)^2\right) \tag{3.4c}$$

となることが分かる.

次に $|\beta| \ge |\gamma|$ の場合を考える. (2.5) を用いると

$$\begin{aligned} V_{\beta,\gamma} &= \sum_{\substack{|\gamma'|\le|\gamma| \\ 0\le b'\le 3}}{}' (\Gamma^{\beta}u_1)(\partial_{b'}\Gamma^{\gamma'}u_2) \\ &= \sum_{\substack{|\gamma'|\le|\gamma| \\ 0\le b'\le 3}}{}' \left(\partial_{b'}\left\{(\Gamma^{\beta}u_1)(\Gamma^{\gamma'}u_2)\right\} - (\partial_{b'}\Gamma^{\beta}u_1)(\Gamma^{\gamma'}u_2)\right) \\ &= \sum_{\substack{|\gamma'|\le|\gamma| \\ 0\le b'\le 3}}{}' \partial_{b'}\left\{(\Gamma^{\beta}u_1)(\Gamma^{\gamma'}u_2)\right\} - \sum_{\substack{|\beta'|\le|\beta| \\ |\gamma'|\le|\gamma| \\ 0\le c\le 3}}{}' (\Gamma^{\beta'}\partial_c u_1)(\Gamma^{\gamma'}u_2) \end{aligned} \tag{3.4d}$$

と書き換えられる. $L_2\left(\partial_{b'}\left\{(\Gamma^{\beta}u_1)(\Gamma^{\gamma'}u_2)\right\}\right)$ については, (3.3) の証明と同様にすれば評価できる. 他方, $|\gamma'| \le |\gamma| \le K$, $|\beta'| \le |\beta| \le 2K-1$ となることに注意すると $L_2\left((\Gamma^{\beta'}\partial_c u_1)(\Gamma^{\gamma'}u_2)\right)$ については, $|\beta| \le |\gamma|$ の場合の $V_{\beta,\gamma}$ と同様に扱える. 以上から (3.4c) は $|\beta| \ge |\gamma|$ の場合にも正しいことが分かる.

$W_{\beta,\gamma}$ に関しては, $V_{\beta,\gamma}$ とまったく同様に扱えるので, 結局

$$\|u_2(t)\|_{2K,2} + \left\|w_2(t)|\partial u_2(t)|_{2K-1}\right\|_{L^2} \le C\big(\varepsilon + (1+t)^{\lambda}E(T)^2\big) \tag{3.4e}$$

を得る.

(3.3) と (3.4e) から,

$$e_5(t) \le C\left(\varepsilon + E(T)^2\right) \tag{3.5}$$

が得られる.

<u>$e_4(t,x)$ の評価について:</u> 補題 2.1 (I) – (ii) と (II) – (iv) を用いると,

$$|y|w_+(s,y)^{1+\mu-2\lambda}w_-(s,y)^{1-\mu}|F_i(s,y)|_{2K-2} \le CE(T)^2 \tag{3.6a}$$

が十分小さい $\mu > 0$ に対して $(s,y) \in [0,T) \times \mathbb{R}^3$ で成立していれば,

$$\|e_4(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le C\left(\varepsilon + E(T)^2\right) \tag{3.6b}$$

となることが分かる.

補題 2.5 を適用すると

$$
\begin{aligned}
|y||F_i(s,y)|_{2K-2} \le & C|u(s,y)|_{K+1}\left(|y||u(s,y)|_{2K-2}+|y||\partial u(s,y)|_{2K-2}\right)\\
\le & C|u(s,y)|_{K+1}\left(\|u(s,\cdot)\|_{2K,2}+\|\partial u(s,\cdot)\|_{2K,2}\right)\\
\le & Cw_+(s,y)^{-1}w_-(s,y)^{-1}(1+s)^{\lambda}\|e_1(s)\|_{L^\infty}\left(e_5(t)+e_6(t)\right)
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

となるので, $\mu \le \lambda$ とすれば (3.6a) の成立が分かる. よって, (3.6b) が得られた.

<u>$e_3(t,x)$ の評価について:</u> $i=1,2$ に対して

$$
\Lambda_i = \left\{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3;\, \big|\, c_i t - |x|\,\big| \le \min\{|c_2-c_1|,|c_i|\}t/2\right\}
$$

とおき, $\Lambda_0 = ([0,T)\times\mathbb{R}^3)\setminus(\Lambda_1\cup\Lambda_2)$ とおく.

まず

$$
w_0(t,x)w_2(t,x)^{\rho_1}|u_2(t,x)|_{K+2} \le C\big(\varepsilon + E(T)^2\big) \tag{3.8a}
$$

を示す.

$$
\square_2 u_2 = (A-B)u_1(\partial_b u_2) + B\partial_b(u_1u_2) \tag{3.8b}
$$

となることに注意して, 右辺第 1 項からの寄与の評価に補題 2.1 (I) − (i) を適用し, 右辺第 2 項からの寄与の評価には (II) − (i) 及び (ii) を用いると, (3.8a) は十分小さい $\mu>0$ に対して

$$
\sup_{(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_0 w_+^{1+\rho_1} w_-^{1+\mu}|u_1(\partial_b u_2)|_{K+2} \le CE(T)^2, \tag{3.8c}
$$

$$
\sup_{(s,y)\in\Lambda_j} w_0 w_+^{\rho_1+\mu} w_j^{1-\mu}|u_1u_2|_{K+3} \le CE(T)^2 \quad (j=0,1), \tag{3.8d}
$$

$$
\sup_{(s,y)\in\Lambda_2} w_0 w_+^{1+\mu} w_2^{\rho_1-\mu}|u_1u_2|_{K+3} \le CE(T)^2 \tag{3.8e}
$$

を示すことに帰着される.

$$
\begin{aligned}
w_0|u_1(\partial_b u_2)|_{K+2} \le & Cw_0\left(|u_1|_{K+1}|\partial_b u_2|_{K+2}+|u_1|_{K+2}|\partial_b u_2|_{K+1}\right)\\
\le & \; Cw_+^{2\lambda}w_0^{-1}w_1^{-1}w_2^{-1}e_1e_4 + Cw_0^{-1}w_1^{-\rho_1}w_2^{-1-\rho_2}e_2e_3\\
\le & \; C\left(w_+^{-2+2\lambda}w_-^{-1}+w_+^{-1-\rho_1}w_-^{-1-\rho_2}\right)E(T)^2
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

であるから, $\mu < \min\{1-2\lambda-\rho_1,\rho_2\}$ ととれば (3.8c) の成立が分かる.

$$
\begin{aligned}
w_0|u_1u_2|_{K+3} \le & Cw_0\left(|u_1|_{K+1}|u_2|_{K+3}+|u_2|_{K+1}|u_1|_{K+3}\right)\\
\le & Cw_+^{-1+\delta+2\lambda}w_1^{-1}w_2^{-\delta}e_1e_4 + Cw_0^{-1}w_1^{-\rho_1}w_2^{-1}e_1e_2
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

であるから, Λ_0 または Λ_1 において

$$w_0|u_1u_2|_{K+3} \le C\left(w_+^{-1+2\lambda}w_-^{-1} + w_+^{-1-\rho_1}w_-^{-1}\right)E(T)^2 \tag{3.11}$$

を得る. よって, Λ_j においては w_j と w_- は同値な量であることに注意すると, $\mu < 1-2\lambda-\rho_1$ と選べば (3.8d) を得る. 他方, Λ_2 においては (3.10) から

$$w_0|u_1u_2|_{K+3} \le C\left(w_+^{-2+\delta+2\lambda}w_2^{-\delta} + w_+^{-1-\rho_1}w_2^{-1}\right)E(T)^2 \tag{3.12}$$

となるので, μ を十分小さく選んでおけば (3.8e) を得る. 以上で (3.8a) が示された.

次に

$$w_0(t,x)w_2(t,x)^{1+\rho_2}|\partial u_2|_{K+1} \le C\left(\varepsilon + E(T)^2\right) \tag{3.13}$$

を示す. 補題 2.1 (II) - (i) を用いると,

$$w_0 w_+^{1+\rho_2+\mu}w_-^{1-\mu}\left(|u_1(\partial_b u_2)|_{K+2} + |u_2(\partial_b u_1)|_{K+2}\right) \le CE(T)^2 \tag{3.14}$$

が十分小さい $\mu > 0$ に対して成立することを示せばよいことが分かる.

(3.9) を用いると, $\mu < \min\{1-2\lambda-\rho_2, \rho_1-\rho_2\}$ に対して

$$w_0 w_+^{1+\rho_2+\mu}w_-^{1-\mu}|u_1(\partial_b u_2)|_{K+2} \le CE(T)^2 \tag{3.15a}$$

が分かるから, 残っているのは

$$w_0 w_+^{1+\rho_2+\mu}w_-^{1-\mu}|u_2(\partial_b u_1)|_{K+2} \le CE(T)^2 \tag{3.15b}$$

の証明である.

$$\begin{aligned} w_0|u_2(\partial_b u_1)|_{K+2} &\le C w_0\left(|u_2|_{K+1}|\partial_b u_1|_{K+2} + |\partial_b u_1|_K|u_2|_{K+2}\right)\\ &\le C\left(w_+^{2\lambda}w_0^{-1}w_1^{-1}w_2^{-1}e_1e_4 + w_0^{-1}w_1^{-1}w_2^{-\rho_1}e_1e_3\right)\\ &\le C(w_+^{-2+2\lambda}w_-^{-1} + w_+^{-1-\rho_1}w_-^{-1})E(T)^2 \end{aligned} \tag{3.15c}$$

であるから, やはり $\mu < \min\{1-2\lambda-\rho_2, \rho_1-\rho_2\}$ ととれば, (3.15b) の成立が分かる. 以上で (3.13) が証明された.

(3.8a) と (3.13) をあわせると

$$\|e_3(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le C\left(\varepsilon + E(T)^2\right) \tag{3.16}$$

が示された.

$e_2(t,x)$ の評価について:

(3.17a)
$$\|e_2(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le C\big(\varepsilon + E(T)^2\big)$$

を示すためには, 補題 2.1 (II) – (i) と (ii) より

(3.17b)
$$\sup_{(s,y)\in\Lambda_j} w_0 w_+^{\rho_1+\mu} w_j^{1-\mu} |u_2^2|_{K+4} \le CE(T)^2 \quad (j=0,2),$$

(3.17c)
$$\sup_{(s,y)\in\Lambda_1} w_0 w_+^{1+\mu} w_1^{\rho_1-\mu} |u_2^2|_{K+4} \le CE(T)^2$$

が十分小さい $\mu > 0$ に対して成立することを示せばよいことが分かる.

(3.17d)
$$w_0|u_2^2|_{K+4} \le C w_+^{-1+\delta+2\lambda} w_2^{-1-\delta} e_1 e_4$$

であるから, $\mu < 1 - 2\lambda - \rho_1 - \delta$ ととれば (3.17b) の成立が分かる. 他方, Λ_1 においては, (3.17d) より

$$w_0|u_2^2|_{K+4} \le C w_+^{-2+2\lambda} e_1 e_4$$

であるから, $\mu < \rho_1$ ならば (3.17c) の成立が分かる.

$e_1(t,x)$ の評価について: まず, $w_0 w_1 u_1$ を評価しよう. 補題 2.1 (II) – (ii) と (iii) を用いると, 目的の評価を得るためには

(3.18a)
$$\sup_{(s,y)\in\Lambda_1} w_0 w_+^{1+\mu} w_1^{1-\mu} |u_2^2|_{K+2} \le CE(T)^2$$

(3.18b)
$$\sup_{(s,y)\in\Lambda_j} w_0 w_+ w_j^{1+\mu} |u_2^2|_{K+2} \le CE(T)^2 \quad (j=0,2),$$

が十分小さい $\mu > 0$ に対して成立することを確かめればよいことが分かる.

(3.19)
$$w_0|u_2^2|_{K+2} \le w_0^{-1} w_2^{-1-\rho_1} e_1 e_3$$

であるから, Λ_0 と Λ_2 においては, $w_0|u_2^2|_{K+2} \le C w_+^{-1} w_-^{-1-\rho_1} E(T)^2$ である. よって $\mu \le \rho_1$ ならば (3.18b) は成立する. 他方, Λ_1 においては $w_0|u_2^2|_{K+2} \le C w_+^{-2-\rho_1} E(T)^2$ であるから $\mu \le 1$ ならば (3.18a) が得られる.

最後に

(3.20)
$$w_0(t,x) w_2(t,x) |u_2|_{K+1} \le C\left(\varepsilon + E(T)^2\right)$$

を示そう. (3.8b) に注意して補題 2.1 (I) – (i) と (II) – (i) を用いると

(3.21a)
$$\sup_{(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_0 w_+^2 w_-^{1+\mu} |u_1(\partial_b u_2)|_{K+1} \le CE(T)^2,$$

(3.21b)
$$\sup_{(s,y)\in[0,T)\times\mathbb{R}^3} w_0 w_+^{1+\mu} w_-^{1-\mu} |u_1 u_2|_{K+2} \le CE(T)^2$$

が十分小さな μ に対して成立することを示せば十分である.

$$w_0|u_1(\partial_b u_2)|_{K+1} \le C w_0^{-1} w_1^{-1} w_2^{-1-\rho_2} e_1 e_3 \le C w_+^{-2} w_-^{-1-\rho_2} E(T)^2 \tag{3.22}$$

だから, $\mu \le \rho_2$ ならば (3.21a) は成立する.

他方,

$$w_0|u_1 u_2|_{K+2} \le C w_0^{-1} w_1^{-1} w_2^{-\rho_1} e_1 e_3 + C w_0^{-1} w_1^{-\rho_1} w_2^{-1} e_1 e_2 \le C w_+^{-1-\rho_1} w_-^{-1} E(T)^2 \tag{3.23}$$

であるから $\mu \le \rho_1$ ならば (3.21b) が成立する.

以上により

$$\|e_1(t,\cdot)\|_{L^\infty} \le C\left(\varepsilon + E(T)^2\right) \tag{3.24}$$

となることが示された.

(3.2b), (3.5), (3.6b), (3.16), (3.17a), (3.24) をあわせると, 命題 3.1 が得られる.

4 応用

これまで, u のみからなる 2 次の項については一切触れなかったが, 第 3 節の証明法に従えば, 例えば次の方程式系に対して (GE) の成立を示すことができる:

$$\begin{cases} \Box_1 u_1 = u_2^2, \\ \Box_2 u_2 = (\partial_a u_1)(\partial_b u_2). \end{cases} \tag{4.1}$$

ただし $c_1 \ne c_2$ とする.

このことは, $U_1 = \partial_a u_1$ とおいて上の方程式系を書き直すと,

$$\begin{cases} \Box_1 U_1 = 2u_2(\partial_a u_2), \\ \Box_2 u_2 = U_1(\partial_b u_2) \end{cases} \tag{4.2}$$

となって (1.25) と同じタイプの方程式系に帰着できることから分かる. 実際, 第 3 節のアプリオリ評価で u_1 とあるところを, ∂u_1 に置き換えて評価を行えば, (4.1) に対して (GE) が成立することを証明できる.

参考文献

[1] R. Agemi and K. Yokoyama, *The null condition and global existence of solutions to systems of wave equations with different speeds*, in Advances in nonlinear partial differential equations and stochastics, edited by S. Kawahara and T. Yanagisawa, Series on Adv. Math. for Appl. Sci., Vol. **48**, World Scientific, 1998, 43–86.

[2] D. Christodoulou, *Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), 267 – 282.

[3] S. Katayama, *Global existence for a class of systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, preprint.

[4] S. Katayama, *Global and almost global existence for systems of nonlinear wave equations with different propagation speeds*, preprint.

[5] S. Katayama, *Global existence for systems of wave equations with nonresonant nonlinearities and null forms*, preprint.

[6] S. Klainerman, *The null condition and global existence to nonlinear wave equations*, Lectures in Applied Math. **23** (1986), 293 – 326.

[7] S. Klainerman and T. C. Sideris, *On almost global existence for nonrelativistic wave equations in 3D*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 307 – 321.

[8] M. Kovalyov, *Resonance-type behaviour in a system of nonlinear wave equations*, J. Differential Equations **77** (1989), 73 – 83.

[9] K. Kubota and K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of nonlinear wave equations with different speeds of propagation*, Japanese J. Math. **27** (2001), 113-202.

[10] H. Lindblad, *On the lifespan of solutions of nonlinear wave equations with small initial data*, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 445 – 472.

[11] T. C. Sideris, *Nonresonance and global existence of prestressed nonlinear elastic waves*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), 849 – 874.

[12] T. C. Sideris and Shun-Yi Tu, *Global existence for systems of nonlinear wave equations in 3D with multiple speeds*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 477 –488.

[13] K. Yokoyama, *Global existence of classical solutions to systems of wave equations with critical nonlinearity in three space dimensions*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 609 – 632.