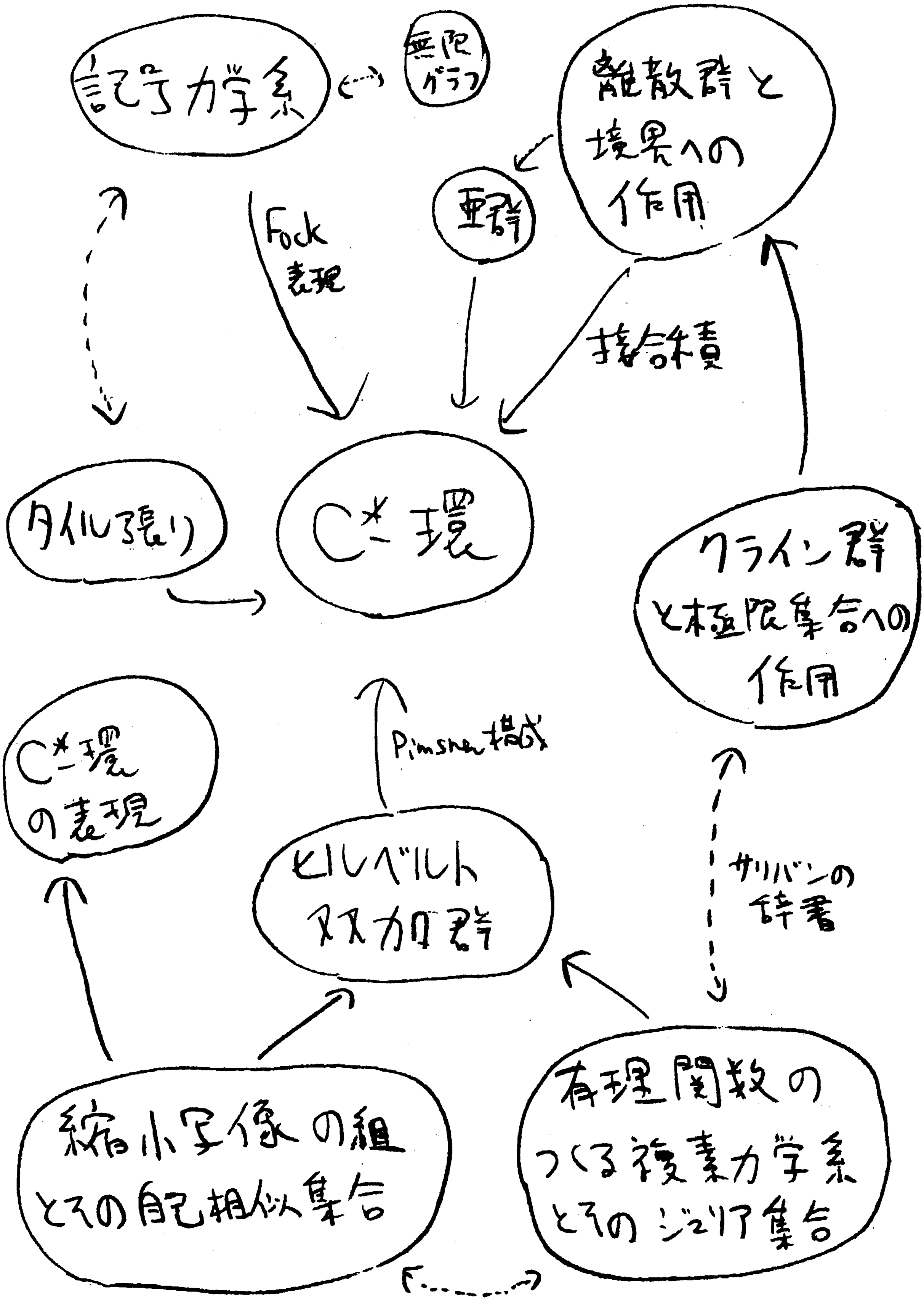
数理解析研究所講究録 1333 巻 2003 年 36-51

複素力学系やフラクタル図形から生じるCuntz環の仲間とその表現

九州大学大学院数理学研究院
綿谷安男 (Watatani, Yasuo)
Department of Mathematical Sciences,
Kyushu University

0 はじめに

縮小写像の組からつくられるフラクタル図形や複素力学系のジュリア集合のような自己相似性をもつ対象とCuntz環のような純無限単純 C^* 環という作用素環の対象がどのように関連しているかを考えたい。



記号力学系
無限グラフ
離散群と境界への作用
Fock表現
亜群
接合積
タイル張り
C*環
クラインン群と極限集合への作用
Pimsner構成
C*環の表現
ヒルベルト双加群
サリバンの辞書
縮小写像の組とその自己相似集合
有理関数のつくる複素力学系とそのジュリア集合

Cantor集合のような自己相似性をもつ構造とCuntz環のような作用素環との間をつなぐ方法としては次の2つが最低考えられる。

Ⓐ 自己相似性をもつ構造からC^*環を構成し，元の構造がC^*環の性質にどう反映しているかを調べる。例えば記号力学系であるサブシフト $\sigma: \Lambda \to \Lambda$ に対しC^*環$\mathcal{O}_\Lambda$を構成し，その$\mathcal{O}_\Lambda$が単純C^*環になる条件を求め，$\mathcal{O}_\Lambda$のK-群 $K_0(\mathcal{O}_\Lambda)$等から元の位相力学系$\sigma: \Lambda \to \Lambda$の重要な不変量を導入した松本君の仕事がある。

Ⓑ 自己相似性をもつ構造から特別なC^*環であるCuntz $\mathcal{O}_n$ だけではなくその表現までこめて構成し，表現を分類する。この研究集会での

鈴木，阿部－川村 の 話で くわしいことをみてもらう。例えばHausdorff次元の違いが表現を区別する指標になりうる（[6]）。

上の2つの道Ⓐと Ⓑは関連しているが異なる接近なので，1で簡単に例示して説明するが，2以降は，もっぱらⒶについて，梶原，Pinzari，米谷と私の共同研究（[2]，[3]，[5]）について紹介する。

次のような問題についてはほとんど何もできていないので，次の機会にする。

① フラクタル図形上のラプラシアンのような解析学はCuntz環上でどのように展開されるか？

② 距離構造や複素解析構造はCuntz環上のどんな上部構造を定めているのか？

① 何が似ているのか

コンパクト距離空間(X,d)上の真の縮小写像の

Nコの組 $\sigma_1, \cdots, \sigma_N : X \longrightarrow X$ に対し $K_0 = X$,

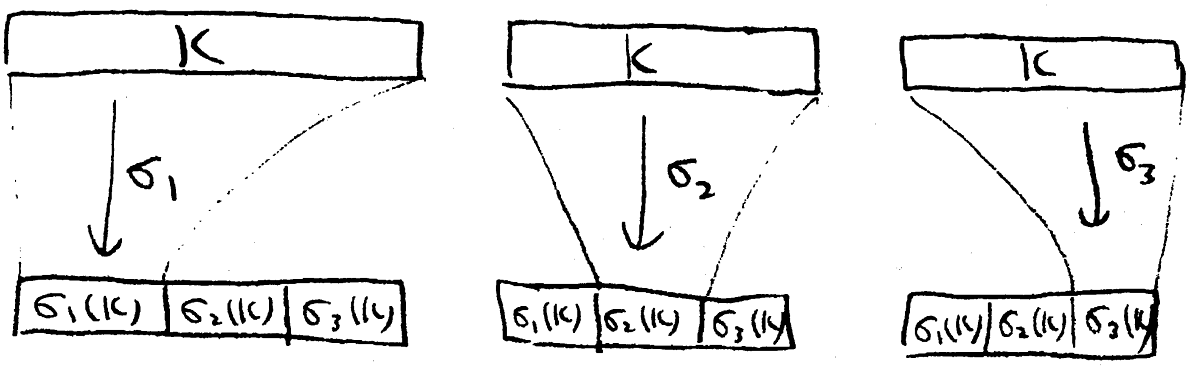
$K_1 = \bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i(K_0)$, $\cdots$, $K_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i(K_n)$,

と減少する空間の列 $K_0 \supset K_1 \supset K_2 \cdots$ を考える。

この時 $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ とおくと

☆ $$K = \bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i(K)$$

をみたす。この☆を弱い意味での「自己相似性」という。縮小写像の組をうまく選べばKとしてフラクタル図形が表われる。



ここで，上の図でコンパクト空間Kをヒルベルト空間Hにおきかえ，縮小写像σ_iを作用素S_iでおきかえよう。特にKと$\sigma_i(K)$が「相似」に相当するようにヒルベルト空間Hとその像$S_i(H)$が内積を保って同型になるようにしよう。つまりS_iは等距離作用素」(isometry)とすればよい。それは「作用素のことばでいうと$S_i^*S_i = I$となる。また$K=\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_i(K)$に対応するよう，$S_i$の像$S_i(H)$が全体空間$H$を張り，さらに各$S_i(H)$が互いに直交することも仮定しよう。それを作用素のことばでいうと

$$S_1S_1^* + \cdots + S_NS_N^* = I$$

となる。このようにしてできた作用素$S_1, \cdots, S_N$から生成されたC^*環$\mathcal{O}_N$はCuntz環といい，その実現の仕方に依らず同型で単純なC^*環になる。

以上のことを簡単に表にしておく:

コンパクト距離空間K	ヒルベルト空間H
縮小写像 $\sigma_1,\cdots,\sigma_N : K \longrightarrow K$	等距離作用素 $(S_i^*S_i=I)$ $S_1,\cdots,S_N : H \longrightarrow H$
自己相似性 $K=\bigcup_{i=1}^{N}\sigma_i(K)$	像が直交して全体を張る $S_i(H)\perp S_j(H) \quad (i\neq j)$ $H=\bigoplus_{i=1}^{N}S_i(H)$ つまり $I=S_1S_1^*+\cdots+S_NS_N^*$

ここでK上の適切な測度μを使って
$H=L^2(K,\mu)$とおくとRadon-Nykodymの重みをつけることでσ_iは等距離作用素S_iを誘導し、Cuntz環$\mathcal{O}_N$の表現$\pi:\mathcal{O}_N\to B(H)$ができる。これが(B)の道である。しかし自己相似集合Kの位相空間としての性質を反映できるようにヒルベルト双加群を

つくってから C^*環を構成すると, Cuntz環とは違った C^*環がでてくる。これはそのK群をみることで判定できる。これが(A)の道である。(B)の道では KのHausdorff次元が Cuntz環の表現の違いに間接的に影響するが, (A)の道では何に対応するのかは現在は不明である。このように(A)と(B)の両方の道はそれぞれに意味があるように思われる。

$\boxed{2}$ ヒルベルト双加群からつくられる C^*環

Aを C^*環とする。右A加群X上に C^*環Aに値をとる正値内積 $(\ |\ )_A : X\times X \to A$ が定まっていて, そのノルム $\|x\|_2 = \|(x|x)\|_\infty^{1/2}$ について完備になっている時に Xを(右)ヒルベルトA-加群という。共役をもつX上の有界作用素全体を $\mathcal{L}(X)$ と

すると $\mathcal{L}(X)$ は C^* 環になる。$x, y \in X$ に対し "rank one" 作用素 $\theta_{x,y} \in \mathcal{L}(X)$ を

$$\theta_{x,y}(z) = x\langle y | z \rangle_A \quad , (z \in X)$$

できめる。それらで張られたものの閉包を $K(X)$ とする。

これも C^* 環で $\mathcal{L}(X)$ のイデアルとなる。

$\boxed{\text{Def}}$ X が C^* 環 A 上のヒルベルト双加群とは

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ① X は (右) ヒルベルト A-加群

② $\phi : A \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ という $*$-hom があり左 A-作用と可換になっている

よって $a \cdot \xi \cdot b = \phi(a)\xi b \qquad (a, b \in A,\ \xi \in X)$

により、X は本当に A-A 双加群となっている

$\boxed{\text{Def}}$ C^* 環 A 上の双加群 X からその Fock 空間

$F(X)$ を次できめる：

$$F(X) = A \oplus X \oplus X^{\otimes 2} \oplus X^{\otimes 3} \oplus \cdots$$

この $F(X)$ もヒルベルト A-加群である。

$F(X)$ 上に $x\in X$ の「生成作用素」$T_x\in\mathcal{L}(F(X))$ を

次で定める： $x_1\otimes\cdots\otimes x_n\in X^{\otimes n}$, $a\in A$

$$\begin{cases} T_x a = x\cdot a \\ T_x x_1\otimes\cdots\otimes x_n = x\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n \end{cases}$$

すると $T_x^*\in\mathcal{L}(F(X))$ は消滅作用素で

$$\begin{cases} T_x^* a = 0 \\ T_x^*(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = (x|x_1)_A\, x_2\otimes\cdots\otimes x_n \end{cases}$$

また A の $F(X)$ 上の表現 $i: A\to\mathcal{L}(F(X))$ を

次で定める： $a\in A$, $b\in A$, $x_1\otimes\cdots\otimes x_n\in X^{\otimes n}$

$$\begin{cases} i(a)\, b = ab \\ i(a)\, x_1\otimes\cdots\otimes x_n = \phi(a)x_1\otimes\cdots\otimes x_n \end{cases}$$

ここで $\phi^{(n)}=\phi\otimes id\otimes\cdots\otimes id : A\to\mathcal{L}(X^{\otimes n})$ とおくと

$$i(a) = \begin{pmatrix} a & & & & 0 \\ & \phi(a) & & & \\ & & \phi^{(2)}(a) & & \\ & & & \phi^{(3)}(a) & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

以下 ϕ は1:1を仮定する

$\boxed{\text{Def}}$ $\{i(a)\in\mathcal{L}(F(X))\mid a\in A\}$と$\{T_x\mid x\in X\}$で生成されたC*-環 $\mathcal{T}_X$ を<u>X上のToeplitz C*-環</u>といい，次の交換関係で特徴づけられる：

$$(*)\begin{cases} i(a)T_x = T_{\phi(a)x} & \\ T_x\, i(a) = T_{xa} & a\in A,\ x\in X \\ T_x^* T_y = i(\langle x\mid y\rangle_A) & \end{cases}$$

$\boxed{\text{Def}}$ $I_X := \{a\in A\mid \phi(a)\in \mathcal{K}(X)\}\lhd A$ を考える.

上の(*)より $i_K : \mathcal{K}(X)\longrightarrow \mathcal{L}(F(X))$ が次できまる

$$i_K(\theta_{x,y}) = T_x T_y^* \in \mathcal{L}(F(X))$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \theta_{x,y} & & & \\ & & \theta_{x,y}\otimes id & & \\ & & & \theta_{x,y}\otimes id\otimes id & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$j := i_K \cdot \phi : I_X \longrightarrow \mathcal{L}(F(X))$ は

$$j(a) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \phi(a) & & & 0 \\ & & \phi^{(2)}(a) & & \\ & & & \phi^{(3)}(a) & \\ & 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となる。ただ $a \in I_X$ にたいし

$$i(a) - j(a) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & 0 & \\ & 0 & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{K}(F(X))$$

で生成された J_X の ideal

$$\mathcal{I}_X := \overline{J_X \{ i(a) - j(a) \mid a \in I_X \} J_X}^{\|\,\|} \triangleleft J_X$$

による商写像 $J_X \longrightarrow J_X / \mathcal{I}_X$ を考える.

$\boxed{\text{Def}}$ $\mathcal{O}_X = J_X / \mathcal{I}_X$ をヒルベルト双加群 X から生成された <u>Cuntz–Pimsner 環</u> という(?). $\mathcal{O}_X$ は

$S_x := \pi(T_x)$ と $\hat{i}(a) = \pi \cdot i(a)$, $(x \in X, a \in$

で生成される C^*-環で次の交換関係をもつ

普遍的な C^* 環である:

$$\begin{cases} \hat{i}(a)S_x = S_{\phi(a)x} \\ S_x \hat{i}(a) = S_{xa} \\ S_x^* S_y = \hat{i}((x|y)_A) \\ \hat{j}(a) = \hat{i}(a) \quad , (a \in I_X) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a \in A \\ x \in X \end{pmatrix}$$

ここで $\hat{i}_K : K(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X$ と $\hat{i}_K(\theta_{x,y}) = S_x S_y^*$

$\hat{j} : A \longrightarrow \mathcal{O}_X$ を $\hat{j} = \hat{i}_K \phi : I_X \to \mathcal{O}_X$

できめる。$\hat{i}(a) = \pi(i(a))$, $\hat{j}(a) = \pi(j(a))$ に注意.

以下 a と $\hat{i}(a)$ を同一視する。

$\boxed{3}$ 縮小写像から生成される C^* 環

Def コンパクト距離空間 K 上の N 個の縮小写像 $\sigma_1, \cdots, \sigma_N : K \to K$ に対し, C^* 環 $A = C(K)$ 上のヒルベルト双加群 $X = X(K; \sigma_1, \cdots, \sigma_N)$ を次で定義する. ただし $K = \bigcup_{i=1}^{N} \sigma_i(K)$ を仮定する

$$\Omega := \bigcup_{i=1}^{N} \{(\sigma_i(y), y) \in K \times K \mid y \in K\}$$

$X := C(\Omega) \ni f, g, \quad a, b \in A = C(K)$

$$\begin{cases} (a \cdot f \cdot b)(x,y) = a(x) f(x,y) b(y) \\ (f|g)_A(y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(\sigma_i(y), y)}\, g(\sigma_i(y), y)) \end{cases}$$

$\mathcal{O}_X$ を K上のNコの縮小写像から生成されたC^*環といい，$\mathcal{O}_X = \mathcal{O}(K; \sigma_1, \cdots, \sigma_N)$とかく。

例 KをCantor setで$\sigma_1, \sigma_2 : K \to K$をその縮小写像とする。$\mathcal{O}(K; \sigma_1, \sigma_2)$はCuntz環$\mathcal{O}_2$。

例 KをShierpinski gasket，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 : K \to K$をその縮小写像とする．$\mathcal{O}(K; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$はCuntz環とは同型ではないことが$K_0$-群を比べてわかる。

④ 複素力学系から生成されるC^*環

有理関数Rをリーマン球面$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$上の変換とみなし，その反復合成からなる複素力学系$(R^n)_n$を考えよう。$R$は degree$R$: 1の分岐被覆になる。

$z \in \hat{\mathbb{C}}$ での R の分岐指数を $e(z)$ とかこう。R のジュリア集合 J_R は完全不変 $(R^{-1}(J_R) = J_R = R(J_R))$ なので $\Omega = \mathrm{graph}\, R|_{J_R} = \{(x, R(x)) \mid x \in J_R\}$ を考える

C^* 環 $A = C(J_R)$ 上のヒルベルト双加群 $X = C(\Omega)$ を次できめる。$f, g \in X$, $a, b \in A = C(J_R)$

$$\begin{cases} (a \cdot f \cdot b)(x, y) = a(x) f(x, y) b(y) \\ (f \mid g)_A(y) = \displaystyle\sum_{x \in R^{-1}(y)} e(x) \overline{f(x, y)}\, g(x, y) \end{cases}$$

$\mathcal{O}_R := \mathcal{O}_X$ を有理関数 R から生成された C^* 環という。

$\boxed{\text{Theorem}}$ (梶原 − W)

もし R の次数 $\deg R \geq 2$

$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_R$ は純無限単純 C^* 環

例 $R(z) = z^2 + c$, M を Mandelbrot 集合とする

① $c \notin M \Rightarrow \mathcal{O}_R \cong \mathcal{O}_2$ (Cuntz 環)

② c が M の主カージオイドの内部 $\Rightarrow$ $\mathcal{O}_R$ は Cuntz 環と異なり、$K_0(\mathcal{O}_R) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_R) = \mathbb{Z}$

③ $c = -2 \Rightarrow \mathcal{O}_R$ は Cuntz 環と異なり $K_0(\mathcal{O}_R) = \mathbb{Z}$, $K_1(\mathcal{O}_R) = 0$

《References》

[1] J. Cuntz, Simple C^*-algebras generated by isometries, Comm. Math. Phys 57 (1977), 173–185

(2) T. Kajiwara, C. Pinzari and Y. Watatani, Ideal structure and simplicity of the C^*-algebras generated by Hilbert bimodules, J. Funct. Anal. 159 (1988), 295–322.

(3) T. Kajiwara and Y. Watatani, 準備中

(4) M. Pimsner, A class of C^*-algebras generalizing both Cuntz-Krieger algebras and crossed products by Z, Free probability Theory, A.M.S. 1997, 189–212

(5) C. Pinzari, Y. Watatani, K. Yonetani, KMS states, entropy and the variational principle in full C^*-dynamical systems, Comm. Math. Phy, 213 (2000) 331–379

(6) M. Mori, O. Suzuki and Y. Watatani, Representations of Cuntz algebras on fractal sets, Preprint.