

記号力学系の立場からの Cuntz-Krieger 環 入門

横浜国立大学・総合理学研究科

松本 健吾 (Kengo Matsumoto)

講演では Cuntz-Krieger 環 と呼ばれる  $C^*$  環の定義ぐさいしかでまなかつたので, この小文では Cuntz-Krieger 環 について私が知っている最も基本的と思われる文献を紹介しよう。

まず 原論文は

① J. Cuntz - W. Krieger 「A class of  $C^*$  algebras and topological Markov chains」

Invent. Math. 56 (1980) 251-268.

である。  $C^*$  環 射 影 には 難い 論文 ではないが,  $C^*$  環 の 定義 を 知 っ て い れ ば 読 め る。 た だ し §3 の 位 相

的 Markov chain との関係が書かれている力学系の記述の戸々は、他の戸々に比べてやや読みにくい。(というより、結果を認めればこの部分はあまり読む必要はないでしょう)。

② J. Cuntz 「A class of  $C^*$  algebras and topological Markov chains II: Reducible chains and the Ext-functor for  $C^*$  algebras」 Invent. Math. 63 (1981), 25-41.

行列が既約である場合、従って  $C^*$  環が単純である場合にその ideal 構造と行列の既約成分が対応していることを示した論文である。 $K$ -群の計算もちゃんと書いてある。

Cuntz-Krieger 環の特殊な場合として、Full shift に対応する Cuntz-環と呼ばれる環があるが、これの原論文は

③ J. Cuntz 「Simple  $C^*$  algebras generated by isometries」 Comm. Math. Phys. 57 (1977) 173-185.

この Cuntz 環の  $K$ -群は

- ④ J. Cuntz 「K-Theory for Certain  $C^*$  algebras」  
Ann. Math 113 (1981) 181-197.

この論文より, Cuntz 環  $\mathcal{O}_n$  の  $n$  が異なり同型でないことを示すは, ③ と合わせて 単純純粋無限  $C^*$  環の分類の一番最初の大事な結果である。

Cuntz 環については, 以後山のように論文が書かれているのでここからは書きません。

Cuntz-Krieger 環については, 力学系の関係で

- ⑤ M. Enomoto, M. Fujii and Y. Watatani  
「KMS states for gauge action on  $\mathcal{O}_A$ 」  
Math. Japon 29 (1984), 607-619  
において, ケーシイ作用に関する KMS state の存在温度が  $\ln \lambda$  と  $\ln$  の Markov shift の位相的エントロピーに一致していることが示されている。

Cuntz-Krieger 環の同型類の  $K$ -群については完全分類は次の Rørdam の論文でなされた。

- ⑥ M. Rørdam 「Classification of Cuntz-Krieger algebras」  
K-Theory, 9 (1995), 31-58

この分類は、特に  $3 \times 3$  行列から決まる Cuntz-Krieger 環の分類については、⑥よりずっと早く、

⑦ M. Enomoto, H. Fujii and Y. Watatai

「 $K_0$ -groups and classification of Cuntz-Krieger algebras」 Math. Japon 26 (1981) 443-460

に記述されていることに注意しよう。

Cuntz-Krieger 環についても、今までの沢山の論文が書かれているが、サーベイ的はものも

⑧ D. Evans 「The  $C^*$  algebras of Topological Markov Chains」 東京都立大学数学教養レポート 1-1 1982.

但しこれは分類理論よりもはるか前に書かれているので、むしろ Rørdam の分類については書かれていない。

最近では核型  $C^*$  環の分類理論の関わり、Cuntz-Krieger 環の一般化が大変よく研究されている。大雑把には、次の4つの観点からの一般化がよく研究されていると言えよう。

- ④ ヒルバート  $C^*$  双対群による一般化
- ⑤ 無限グラフ からできる Cuntz-Krieger 環
- ⑥ groupoid  $C^*$  環 による一般化
- ⑦ AF 環の endomorphism 接合種

これこれ独立ではなく、互いの密接な関係があるのは、  
もちろんである。

- ④ は Pimsner, 広瀬, 梶原, Pimsner, 綿谷 先生達による
- ⑤ は Kumjian, Park, Raeburn, Renault, Excel, Laca, 綿谷
- ⑥ は Renault, Deaconu 等による。
- ⑦ は Rordam 達による

最後の表題の 記号力学系については、次の教科書がある

- ① D. Lind & B. Marcus 「An introduction to symbolic dynamics and coding」 Cambridge University Press 1995
- ② B. P. Kitchen 「Symbolic Dynamics」 Springer 1998