数理解析研究所講究録 1335 巻 2003 年 173-180

多変数多項式の解析的因数分解

岩見 真希
MAKI IWAMI
筑波大学 数理物質科学研究科
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA *
佐々木 建昭
TATEAKI SASAKI
筑波大学 数学系
INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA †

1 はじめに

解析的因数分解とは，与えられた多項式を形式的べき級数環上で因数分解することである．2 章で説明するが，べき級数の展開点が“通常点”のときは一般 Hensel 構成で簡単に分解ができる (実際，$\mathbb{C}$ 上では主変数に関して 1 次因子に分解できる)．したがって，解析的因数分解は展開点が“特異点”のときが問題である (ここでいう特異点とは，Hensel 構成の特異点である．2 章を参照)．

展開点が特異点の場合，一般 Hensel 構成の拡張が，2 変数については Kuo [Kuo89] により 1989 年に，3 変数以上については Sasaki と Kako [SK99] により 1993 年になされている．これらの方法を拡張 Hensel 構成と呼ぶ．拡張 Hensel 構成は，与式から一意的に定まる“Newton 多項式”を因数分解し，その因子を初期因子として構成する．したがって，Newton 多項式が無平方 (重複因子を持たない) ならば，Newton 多項式を既約な多項式に因数分解することにより，2 変数の場合は，拡張 Hensel 構成した結果得られる Hensel 因子が解析的因子となる．3 変数以上の場合は，たとえ初期因子が多項式でも，Hensel 因子が多項式になるとは限らない (主変数に関しては多項式であるが，一般に従変数に関しては有理式である)．Sasaki と Inaba[SI00] は，有理式の分母が消えるように Hensel 因子を組み合わせて，解析的因数分解を行う方法を示している．

そこで，最後に残るのは Newton 多項式が無平方でない場合である．2 変数の場合には，Abhyankar [Abh89] が“展開基底”(expansion base) という概念を考案し，この問題を簡潔に解決した．3 章で説明するように，展開基底法とは，Newton 多項式が $g(x,\boldsymbol{u})^m$ の形であるとき，$g(x,\boldsymbol{u})$ を新しい変数 G で置き換え，G と $x,\boldsymbol{u}$ の 3 つの変数の多項式に対して新たに Newton 多項式を定義することで，より高次項を取り込み，解析的に既約な因子に分解していく方法である．

筆者らは，3 変数以上で Newton 多項式が無平方でない場合について，拡張 Hensel 構成を利用する解析的因数分解法を研究してきた．2 変数の場合については，拡張 Hensel 構成を用いた解析的因数分解法を Sasaki [Sas00] が示している．展開基底法は 3 変数以上の場合に拡張できそうにないが，拡張 Hensel 構成を用いた方法は 3 変数以上にも拡張できることを本稿で述べる．

*maki@math.tsukuba.ac.jp
†sasaki@math.tsukuba.ac.jp

2 一般 Hensel 構成の特異点と基本形への変換

本稿では，標数 0 の数体を K, その代数的閉体を $\overline{K}$ と表す．変数 $(u_1, \cdots, u_\ell)$ を $(\boldsymbol{u})$, 数値 $(s_1, \cdots, s_\ell)$ を $(\boldsymbol{s})$ と略記する．$K[x, \boldsymbol{u}], K\{x, \boldsymbol{u}\}, K(\boldsymbol{u}), K\{(\boldsymbol{u})\}$ はそれぞれ体 K 上の変数 $x, \boldsymbol{u}$ の多項式環，形式的べき級数環，有理式体，$\sum_{k=0}^{\infty} N_k(\boldsymbol{u})/D_k(\boldsymbol{u})$ なる級数全体の成す環 (ただし，N_k と D_k は $\boldsymbol{u}$ の同次式で，$\mathrm{tdeg}(N_k) - \mathrm{tdeg}(D_k) = k$) を表すものとする．

多項式 $F(x, \boldsymbol{u}) \in K[x, \boldsymbol{u}]$ を $\overline{K}\{x, \boldsymbol{u}\}$ で既約な因子の積に分解することを**解析的因数分解**という．Weierstrass の予備定理より，一つの変数 x に関しては多項式としてよいから，実際は $\overline{K}\{\boldsymbol{u}\}[x]$ での因数分解となる．

定義 1 (一般 Hensel 構成の特異点) 多変数多項式 $F(x, \boldsymbol{u}) = f_d(\boldsymbol{u})x^d + f_{d-1}(\boldsymbol{u})x^{d-1} + \cdots + f_0(\boldsymbol{u})x^0$ に対して，$f_d(\boldsymbol{s}) = 0$ のとき，あるいは $F(x, \boldsymbol{s})$ が無平方でない (すなわち $F(x, \boldsymbol{s}) = 0$ が重根をもつ) とき，$(\boldsymbol{s})$ を一般 Hensel 構成の**特異点**とよぶ． □

展開点 $(\boldsymbol{s})$ が特異点でない場合は，次のように $F(x, \boldsymbol{u})$ を一般 Hensel 構成することができる．

$$\begin{array}{ccccccccl} F(x,\boldsymbol{s}) & = & f_d(\boldsymbol{s}) & (x-\alpha_1) & \cdots & (x-\alpha_d), & \alpha_i \neq \alpha_j\ (\forall i \neq j),\ \alpha_i \in \overline{K} \\ \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow & \cdots & \Downarrow & \\ F(x,\boldsymbol{u}) & = & f_d(\boldsymbol{u}) & (x-\phi_1(\boldsymbol{u})) & \cdots & (x-\phi_d(\boldsymbol{u})), & \phi_i(\boldsymbol{u}) \in \overline{K}\{\boldsymbol{u}\} \end{array}$$

この構成結果は解析的因数分解に他ならない．

$(\boldsymbol{s})$ が特異点の場合，まず次の **1.**, **2.**, **3.** のように分類して，一般 Hensel 構成あるいは拡張 Hensel 構成を用いた初期処理を施しておく．

1. $F(x, \boldsymbol{s}) = (x - \alpha)^d$, $\alpha \in \overline{K}$, ならば初期処理は不要．

2. $f_d(\boldsymbol{s}) \neq 0$ かつ $F(x, \boldsymbol{s})$ が無平方でないときの初期処理．
   $F(x, \boldsymbol{s})$ を $\overline{K}$ 上で互いに素な因子 $f_d(\boldsymbol{s}), G_1^{(0)}(x, \boldsymbol{s}), \cdots, G_r^{(0)}(x, \boldsymbol{s})$ に分解し，次のように一般 Hensel 構成する．

$$\begin{array}{cccccc} F(x,\boldsymbol{s}) & = & f_d(\boldsymbol{s}) & G_1^{(0)}(x,\boldsymbol{s}) & \cdots & G_r^{(0)}(x,\boldsymbol{s}) \\ \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow & \cdots & \Downarrow \\ F(x,\boldsymbol{u}) & = & f_d(\boldsymbol{u}) & G_1^{(\infty)}(x,\boldsymbol{u}) & \cdots & G_r^{(\infty)}(x,\boldsymbol{u}) \end{array}$$

$$G_i^{(0)}(x, \boldsymbol{s}) = (x - \alpha_i)^{m_i},\ G_i^{(\infty)}(x, \boldsymbol{u}) = (x - \alpha_i)^{m_i} + \cdots \in \overline{K}\{\boldsymbol{u}\}[x],\ \max\{m_1, \cdots, m_r\} \geq 2.$$

3. $f_d(\boldsymbol{s}) = 0$ のときの初期処理．
   $F(x, \boldsymbol{u})$ から一意に定まる Newton 多項式を多項式環 $\overline{K}[x, \boldsymbol{u}]$ の中で因数分解し，拡張 Hensel 構成を $F(x, \boldsymbol{u})$ に適用する．拡張 Hensel 構成する際，Newton 線の傾きが正となり，多項式イデアルが生成元として定数を含んでしまうことがあるが，この問題は [SI00] の中で，Newton 線を水平に変換する方法により解決されている．これにより，多項式 $F(x, \boldsymbol{u})$ の Newton 線の傾きが正，零，負いずれの場合であっても，変換後は Newton 多項式の傾きが零の多項式に帰着することができる．この変換後の多項式を $\widetilde{F}(x, \boldsymbol{u})$ と表す．$\widetilde{F}(x, \boldsymbol{u})$ の Newton 多項式 $\widetilde{F}_{\mathrm{New}}$ を $\overline{K}[x, \boldsymbol{u}]$ 内で $\widetilde{F}_{\mathrm{New}} = \widetilde{G}_1^{(0)} \cdots \widetilde{G}_r^{(0)}$ (ただし，$r \geq 2$ かつ任意の $i \neq j$ に対して $\gcd(\widetilde{G}_i, \widetilde{G}_j) = 1$) と分解し，これらを初期因子として次のように拡張 Hensel 構成する．

$$\begin{array}{cccccl} \widetilde{F}_{\mathrm{New}} & = & \widetilde{G}_1^{(0)} & \cdots & \widetilde{G}_r^{(0)} & \\ \Downarrow & & \Downarrow & \cdots & \Downarrow & \\ \widetilde{F}(x,\boldsymbol{u}) & = & \widetilde{G}_1^{(\infty)} & \cdots & \widetilde{G}_r^{(\infty)}, & \widetilde{G}_1^{(\infty)}, \ldots, \widetilde{G}_r^{(\infty)} \in \overline{K}\{(\boldsymbol{u})\}[x] \end{array}$$

この初期処理により，以後は，得られた Hensel 因子が $G_i(x,\boldsymbol{s}) = (x-\alpha)^{m_i}$ となる形のみを扱うことができる．$G_i(x,\boldsymbol{s}) = (x-\alpha)^{m_i}$ は原点移動すると $G_i(x,\boldsymbol{s}) = x^{m_i}$ となるから，以後，展開点は原点で，$\boldsymbol{F(x,0) = x^m}$ **なる** $\boldsymbol{F(x,u)}$ を扱えばよい．この形を **基本形** とよぶことにする．基本形に帰着したあとは拡張 Hensel 構成を用いてさらに分解するのであるが，その際，次の例に見られるような問題が起こりうる．

例 1 $F(x,u) = x^4 - 2x^2u^3 + u^6 - u^7$.
この多項式は $F(x,0) = x^4$ なる基本形であり，次のように解析的に因数分解できる．
$F(x,u) = (x^2 - u^3 + xu^2 + \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{8}xu^3 + \frac{1}{8}u^5 + \cdots)(x^2 - u^3 - xu^2 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{1}{8}xu^3 + \frac{1}{8}u^5 - \cdots)$.
しかし，$F(x,u)$ の Newton 多項式は $(x^2-u^3)^2$ であり，$\overline{K}\{u\}[x]$ 内で互いに素な因子に分解できていないため，このままでは拡張 Hensel 構成を用いて分解することができない． □

このように，重複因子を初期因子にもつ因子が可約か既約かという問題が出てくる．したがって，初期処理後，基本形に変換された $F(x,\boldsymbol{u})$ の Newton 多項式が無平方な場合と無平方でない場合に大きくわけて考える必要がある．

3 Newton 多項式が無平方な場合の解析的因数分解

定理 2 ([SI00]) $F(x,\boldsymbol{u}) \in K[x,\boldsymbol{u}]$ は x に関してモニックかつ無平方であるとする．$F(x,\boldsymbol{u})$ の Newton 多項式 F_{New} を $\overline{K}[x,\boldsymbol{u}]$ 内で次式のように因数分解する ($r \geq 2$ と仮定)．

$$F_{\mathrm{New}} = F_1^{(0)}(x,\boldsymbol{u}) \cdots F_r^{(0)}(x,\boldsymbol{u}),$$

$$\gcd(F_i^{(0)}, F_j^{(0)}) = 1 \quad (\forall i \neq j).$$

このとき，任意の正整数 k に対して，イデアル S_{k+1} を $k = 0 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow \cdots$ とするとき現れうる全ての項を走査するように設定し，次式を満たす $F_i^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) \in K(\boldsymbol{u})[x]$ $(i = 1,\cdots,r)$ を構成することができる．

$$F(x,\boldsymbol{u}) \equiv F_1^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) \cdots F_r^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) \pmod{S_{k+1}},$$

$$F_i^{(k)}(x,\boldsymbol{u}) \equiv F_i^{(0)}(x,\boldsymbol{u}) \pmod{S_1} \quad (i = 1,\cdots,r).$$

□

$F_i^{(\infty)}$ は，x に関して多項式だが，従変数に関して有理式となってしまう．しかし，この有理式には次のような特徴がみられる．

系 3 ([SI00]) $F_i^{(k)}$ の項 x^{e_x} の各係数は N/D の形をしている．ここで，N と D は従変数$\boldsymbol{u}$に関する同次多項式で $\mathrm{tdeg}(N) - \mathrm{tdeg}(D) \geq 0$ である．すなわち，$F_i^{(\infty)} \in \overline{K}\{(\boldsymbol{u})\}[x]$ である． □

(注釈) 2 変数の場合，従変数に関する同次多項式は単項式に他ならないから，Hensel 因子 $F_i^{(k)}(x,u)$ は x と u に関する多項式となる：$F_i^{(\infty)}(x,u) \in \overline{K}\{u\}[x]$ $(i = 1,\cdots,r)$. また，$F_i^{(0)}(x,u)$ は x に関して 1 次式となるので，$F_i^{(\infty)}(x,u)$ がそのまま解析的既約因子となる．

拡張 Hensel 因子の係数の分母項には，以下に述べる**命題 5** ような特徴が見られる．一般性を失うことなく，初期因子は $G^{(0)}(x,u)$, $H^{(0)}(x,u)$ の 2 つとする．

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{New}} &= G^{(0)}(x,u)H^{(0)}(x,u), \\ G^{(0)} &= g_n x^n + \cdots + g_0 x^0, \\ H^{(0)} &= h_m x^m + \cdots + h_0 x^0, \quad d = n + m. \end{aligned}$$

定義 4 (integral もしくは rational な Hensel 因子) Hensel 因子 $F_i^{(k)}(x,u)$ が従変数に関する整数べき級数であるとき，それを integral とよび，そうでないときは rational とよぶ. □

命題 5 ([SI00]) 拡張 Hensel 因子 $G^{(\infty)}$, $H^{(\infty)}$ が rational な場合，それらの有理式係数の分母に現れる因子は $\mathrm{res}(G^{(0)},H^{(0)}), g_n, h_m$, およびそのべき乗のみである．特に，$H^{(0)}=x^m$ の場合には，$G^{(0)}$ と $H^{(0)}$ の分母に現れるのは g_0 のべき乗のみである. □

このように，Hensel 因子の係数の分母項には，それぞれ固有の形をしているという特徴がみられる．では，これらの Hensel 因子をうまく組み合わせて解析的因子を得ることはできないだろうか.

命題 6 ([SI00]) 初期因子が原始的であるとする．一方が integral で他方が rational な拡張 Hensel 因子の積が integral になることはなく，分母の因子が本質的に異なる (つまり，多重度と共通因子を除いたとき異なる) rational な拡張 Hensel 因子の積が integral になることはない. □

これにより，解析的既約因子を得るための拡張 Hensel 因子の組み合わせに対して，次の戦略を得る.

1. まず，Newton 線の傾きを同じくして構成された拡張 Hensel 因子が固有の分母因子を持てば，同じ分母を持つ Hensel 因子を組み合わせて，固有の分母因子を消去する.

2. 次に，Newton 線の傾きを異として構成された拡張 Hensel 因子が同じ分母を持てば，分母因子の多い順から Hensel 因子を組み合わせて，その分母を消去する.

4 Newton 多項式が無平方でない場合の解析的因数分解

Newton 多項式が無平方でないとき，3 変数以上の場合，Hensel 因子は $\overline{K}\{(u)\}[x]$ 内で既約とは限らないため，前章での戦略が使えない．これが問題である．2 変数の場合も，Hensel 因子は解析的に既約とは限らないが，次に述べる 2 つの解決方法がある．この 2 つの方法のうち，拡張 Hensel 構成を用いる方法を 3 変数以上の場合に拡張する.

4.1 2 変数の場合

初期処理を施して基本形に変換された $F(x,u)$ を，拡張 Hensel 構成を用いてさらに分解する．その際の Newton 線の傾きを $-\hat{\delta}/\hat{d}$ $(\gcd(\hat{d},\hat{\delta})=1)$ とするとき，Newton 多項式 F_{New} は次のように表すことができる．ただし $c_j\in\overline{K}$ で, Newton 多項式が無平方でないので $m_i\geq 2$ である.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
F_{\mathrm{New}} & = & x^{n_0} & (x^{\hat{d}}-c_1u^{\hat{\delta}}) & \cdots & (x^{\hat{d}}-c_ru^{\hat{\delta}}) & (x^{\hat{d}}-c_{r+1}u^{\hat{\delta}})^{m_1} & \cdots & (x^{\hat{d}}-c_{r+r'}u^{\hat{\delta}})^{m_{r'}} \\
\text{拡張 Hensel 構成} & \Downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\
F(x,u) & = & F_0^{(\infty)} & F_1^{(\infty)} & \cdots & F_r^{(\infty)} & F_{r+1}^{(\infty)} & \cdots & F_{r+r'}^{(\infty)}
\end{array}
$$

ここで，上式右辺の各因子は次のように処理していく.

- $F_0^{(\infty)}(x,u)$: 原点に特異点をもつので，さらに拡張 Hensel 構成を続行する.
- $F_1^{(\infty)}(x,u),\cdots,F_r^{(\infty)}(x,u)$: 解析的に既約な因子となっている.
- $F_{r+1}^{(\infty)}(x,u),\cdots,F_{r+r'}^{(\infty)}(x,u)$: 解析的に既約とは限らないため，次に述べる展開基底法か，共役とそれに伴う変換を導入した拡張 Hensel 構成を用いる方法で解析的に既約な因子に分解する.

4.1.1 展開基底を用いる方法

Abhyankar の展開基底による方法 [Abh89] [Abh90] では，Newton 多項式の重複既約因子 $x^{\hat{d}} - cu^{\hat{\delta}}$ を新たな変数 G_1 とおき，与えられた多項式 $F(x,u)$ を G_1 を主変数とする多項式と見ることで，途中で分数べきを出すことなく解析的因数分解を行う．多項式 $F(x,u)$ に対する展開基底の生成方法，既約性判定，及び可約な場合の既約因子の構成法の詳細は [Abh90] [Kuo89] [McC97] を参照されたい．

例 2 (展開基底法)

$$F(x,u) = (x^2 - u^3)^2 - u^7 \in K[x,u].$$

Newton 多項式 $F_{\mathrm{New}} = (x^2-u^3)^2$ は $\overline{K}[x,u]$ 内で互いに素な因子に分解できていない．よって，従変数，主変数，重複既約因子の順に，次のように展開基底とその weight を定める．

展開基底	$G_{-1} := u,$	$G_0 := x,$	$G_1 := x^2 - u^3$
weight	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$

従変数の weight $w(G_{-1})$ を 1 と定め，これを基準に，x^2-u^3 すなわち $G_0^2 - G_{-1}^3$ の各項の weight が同じになるように $w(G_0)$ を $\frac{3}{2}$ と，$(x^2-u^3)^2 - u^7$ すなわち $G_1^2 - G_{-1}^7$ の各項の weight が同じになるように $w(G_1)$ を $\frac{7}{2}$ と定めている．

$F(x,u)$ を G_1, G_0, G_{-1} の順に割って $F(x,u) = G_1^2 - G_{-1}^7$ と表し，各項に対して，横軸に G_1 のべき，縦軸に weight 付きで G_{-1}, G_0 のべきの和をとった 2 次元平面上の点を対応させると，その Newton 多項式 $F_{\mathrm{NewG_1}}$ は $F_{\mathrm{NewG_1}} = G_1^2 - G_{-1}^7$ となる．ここで，$-G_{-1}^7$ を G_1^2 に割り振りたいのであるが，このままではうまくいかないため，$-G_{-1}^7$ と weight を同じくする別の表現を探す．この場合は，

展開基底を用いた表現	$-G_{-1}^7$	$=$	$G_{-1}^4 G_1$	$-$	$G_{-1}^4 G_0^2$
	($-u^7$	$=$	$u^4(x^2-u^3)$	$-$	u^4x^2)
各項の weight	7		7.5		7
	(1×7)		$(1\times 4 + \frac{7}{2}\times 1)$		$(1\times 4 + \frac{3}{2}\times 2)$

であるから，$-G_{-1}^7$ のかわりに $-G_{-1}^4 G_0^2$ を用いて以下のように割り振ることができる．

$$\begin{aligned} F(x,u) &= G_1^2 - G_{-1}^7 \\ &= G_1^2 - G_{-1}^4 G_0^2 + \cdots \\ &= (G_1 + G_{-1}^2 G_0)(G_1 - G_{-1}^2 G_0) + \cdots. \end{aligned}$$

互いに素な多項式因子に分解できたので，あとは拡張互除法を用いて高次項を割り振っていく． □

4.1.2 拡張 Hensel 構成を用いる方法 [Sas00]

$F_{r+i}^{(\infty)} = (x^{\hat{d}} - c_{r+i}u^{\hat{\delta}})^{m_i} + \Delta F_{r+i}^{(1)} + \Delta F_{r+i}^{(2)} + \cdots \ (i = 1, \cdots, r')$ を簡単のため，
$F = (x^{\hat{d}} - cu^{\hat{\delta}})^m + \Delta F^{(1)} + \Delta F^{(2)} + \cdots$ として話をすすめる．このとき Newton 多項式 F_{New} は，

$$F_{\mathrm{New}} = (x^{\hat{d}} - cu^{\hat{\delta}})^m = \prod_{i=1}^{\hat{d}} (x - c^{1/\hat{d}} e^{2i\pi \mathrm{i}/\hat{d}} u^{\hat{\delta}/\hat{d}})^m, \ \mathbf{i} = \sqrt{-1}.$$

と分解できるので，これら $\hat{d}$ 個の因子を初期因子として拡張 Hensel 構成することができる．

定義 7 (写像 $\mathbf{R}_{\hat{d}}$ と共役多項式) $\hat{d} \in \mathbf{Z}$, $\hat{d} \geq 2$ に対して，次のような写像 $\mathbf{R}_{\hat{d}}$ を定義する．

$$\bar{K}\{u^{1/\hat{d}}\}[x] \longrightarrow \bar{K}\{u^{1/\hat{d}}\}[x],$$

$$\mathbf{R}_{\hat{d}} : G(x, u^{1/\hat{d}}) \mapsto G(x, e^{2\pi \mathrm{i}/\hat{d}} u^{1/\hat{d}}),$$

$$G_i(x, u^{1/\hat{d}}) = \mathbf{R}_{\hat{d}}^i \cdot G_0(x, u^{1/\hat{d}}) = G_0(x, e^{2i\pi \mathrm{i}/\hat{d}} u^{1/\hat{d}}),\ i = 1, \cdots, \hat{d}.$$

このとき，$G_1, \cdots, G_{\hat{d}}$ (もしくは $G_0, \cdots, G_{\hat{d}-1}$) は $\mathbf{R}_{\hat{d}}$ に関して**共役**であるという. □

上記 F_{New} の分解を初期因子とする Hensel 因子は $\mathbf{R}_{\hat{d}}$ に関して共役であることが分かる.

$$\begin{array}{rcccccl} F_{\mathrm{New}} = (x^{\hat{d}} - cu^{\hat{\delta}})^m = & (x - \zeta_1 u^{\hat{\delta}/\hat{d}})^m & \cdots & (x - \zeta_{\hat{d}} u^{\hat{\delta}/\hat{d}})^m, & & \zeta_i = c^{1/\hat{d}} e^{2i\pi \mathrm{i}/\hat{d}} \\ = & G_1^{(0)}(x, u) & \cdots & G_{\hat{d}}^{(0)}(x, u) & & \\ \text{拡張 Hensel 構成} & \Downarrow & \cdots & \Downarrow & & \\ F(x, u) = & G_1^{(\infty)}(x, u) & \cdots & G_{\hat{d}}^{(\infty)}(x, u), & & G_i^{(\infty)}(x, u) \in \bar{K}\{u^{1/\hat{d}}\}[x] \end{array}$$

$$G_1^{(\infty)}(x, u), \cdots, G_{\hat{d}}^{(\infty)}(x, u) \text{ は } \mathbf{R}_{\hat{d}} \text{に関して共役.}$$

解析的因数分解を行うには, $G_i^{(\infty)} (i = 1, \cdots, \hat{d})$ をさらに分解する必要がある. しかし，$G_i^{(\infty)}$ の Newton 多項式 $G_{i\mathrm{New}} = (x - \zeta_i u^{\hat{\delta}/\hat{d}})^m$ が 2 つ以上の互いに素な因子に分解できないので，拡張 Hensel 構成することができない. よって，次のような変換を考える.

定義 8 (変換 T_x)

$$G(x, u) = x^m + g_{m-1}(u) x^{m-1} + \cdots + g_0(u) \in \bar{K}\{u^{1/\hat{d}}\}[x]$$

に対して，変換 T_x を次式で定義する.

$$T_x : G(x, u) \mapsto H(x, u) := G(x - g_{m-1}(u)/m, u).$$

□

上記の $G_i^{(\infty)}(x, u)$ を次式のように表し, $H_i(x, u) := T_x \cdot G_i^{(\infty)}$ とおく.

$$\begin{cases} G_i^{(\infty)}(x, u) := x^m + g_{i,m-1}(u) x^{m-1} + \cdots + g_{i,0}(u) \in \bar{K}\{u^{1/\hat{d}}\}[x], \\ H_i(x, u) := T_x \cdot G_i^{(\infty)}(x, u) = G_i^{(\infty)}(x - g_{i,m-1}(u)/m, u) \quad (i = 1, \cdots, \hat{d}). \end{cases}$$

すると，$G_i^{(\infty)} \equiv G_i^{(0)} = (x - \zeta_i u^{\hat{\delta}/\hat{d}})^m \pmod{S_1}$, $g_{i,m-1}(u) x^{m-1} \equiv -m\zeta_i u^{\hat{\delta}/\hat{d}} x^{m-1} \pmod{S_1}$ より，$H_i(x, u) \equiv x^m \pmod{S_1}$ となる. したがって，H_i に対して Newton 線を引き直すと，$F(x, u)$ のものに比べて傾きが大きくなることが分かる. この変換後，H_i の Newton 多項式が再び $H_{i\mathrm{New}}(x, u) = (x - cu)^m$ となることもあるが，この場合は再び上記変換を適用する. こうすることにより，H_i の Newton 多項式を次のように $\overline{K}[x, u^{1/\hat{d}}]$ 内で互いに素な因子に分解する. 分解不可能なら $F(x, u)$ は解析的に既約である.

$$H_{i\mathrm{New}} = H_{i1}^{(0)}(x, u) \cdots H_{i\lambda}^{(0)}(x, u) \quad (i = 1, \cdots, \hat{d}),$$

$$H_{ij}^{(0)}(x, u) \in \bar{K}[x, u^{1/\hat{d}}] \quad (i = 1, \cdots, \hat{d}\ ;\ j = 1, \cdots, \lambda).$$

これらを初期因子として拡張 Hensel 構成した結果を次のようにおく.

$$H_i(x, u) = H_{i1}(x, u) \cdots H_{i\lambda}(x, u), \quad H_{ij} \in \bar{K}\{u^{1/\hat{d}}\}[x] \quad (j = 1, \cdots, \lambda).$$

以上の分解を用いて，次のように解析的因数分解を行うことができる.

1. $\overline{K}[x,u^{1/\hat{d}}]$ 内で拡張 Hensel 構成

$$\begin{array}{rccccc} F_{\rm New}=(x^{\hat{d}}-cu^{\hat{\delta}})^m = & (x-\zeta_1 u^{\hat{\delta}/\hat{d}})^m & \cdots & (x-\zeta_{\hat{d}} u^{\hat{\delta}/\hat{d}})^m, & & \zeta_i=c^{1/\hat{d}}e^{2i\pi\mathrm{i}/\hat{d}} \\ = & G_1^{(0)}(x,u) & \cdots & G_{\hat{d}}^{(0)}(x,u) & & \\ \text{拡張 Hensel 構成} & \Downarrow & \cdots & \Downarrow & & \\ F(x,u)= & G_1^{(\infty)}(x,u) & \cdots & G_{\hat{d}}^{(\infty)}(x,u) & & \end{array}$$

2. 変換 T_x を施し，さらに拡張 Hensel 構成

$H_{i\rm New}$を$\overline{K}[x,u^{1/\hat{d}}]$ 内で分解 (不可能ならば解析的に既約) し，拡張 Hensel 構成する

$$\begin{array}{rclcrclll} & & & & & & \downarrow & & \\ G_1^{(\infty)}(x,u) & = & x^m+g_{1,m-1}(u)x^{m-1}+\cdots+g_{1,0}(u) & \rightarrow & H_1(x,u) & = & H_{11} & \cdots & H_{1\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & T_x & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{\hat{d}}^{(\infty)}(x,u) & = & x^m+g_{\hat{d},m-1}(u)x^{m-1}+\cdots+g_{\hat{d},0}(u) & \rightarrow & H_{\hat{d}}(x,u) & = & H_{\hat{d}1} & \cdots & H_{\hat{d}\lambda} \end{array}$$

3. 組み合わせ

$$\begin{array}{rcccccc} G_1^{(\infty)} & = & [T_x^{-1}\cdot H_1(x,u)] & = & [T_x^{-1}\cdot H_{11}] & \cdots & [T_x^{-1}\cdot H_{1\lambda}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{\hat{d}}^{(\infty)} & = & [T_x^{-1}\cdot H_{\hat{d}}(x,u)] & = & [T_x^{-1}\cdot H_{\hat{d}1}] & \cdots & [T_x^{-1}\cdot H_{\hat{d}\lambda}] \\ & & & & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ \text{解析的因数分解} & & F(x,u) & = & \hat{G}_1 & \cdots & \hat{G}_\lambda \end{array}$$

ここで，$\hat{G}_j=\prod_{i=1}^{\hat{d}}[T_x^{-1}\cdot H_{ij}]$ $(j=1,\cdots,\lambda)$ である．

4.2 3 変数以上の場合

初期処理を施して基本形に変換された $F(x,\boldsymbol{u})$ を，従変数に関する全次数変数 t を導入し，拡張 Hensel 構成を用いてさらに分解する．前述の 2 変数の場合と同様に，次のような Newton 多項式を扱う．ただし，$m_i\geq 2$ で，h_j は全次数 $\hat{\delta}$ の $\boldsymbol{u}$ の同次多項式を表すものとする．

$$\begin{array}{ccccccccc} F_{\rm New} & = & x^{n_0} & (x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h_1) & \cdots & (x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h_r) & (x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h_{r+1})^{m_1} & \cdots & (x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h_{r+r'})^{m_{r'}} \\ \text{拡張 Hensel 構成} & \Downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ F(x,\boldsymbol{u}) & = & F_0^{(\infty)} & F_1^{(\infty)} & \cdots & F_r^{(\infty)} & F_{r+1}^{(\infty)} & \cdots & F_{r+r'}^{(\infty)} \end{array}$$

ここで，上式右辺の各因子は次のように処理していく．

- $F_0^{(\infty)}(x,t,\boldsymbol{u})$: 原点に特異点をもつので，さらに拡張 Hensel 構成を続行する．
- $F_1^{(\infty)}(x,t,\boldsymbol{u}),\cdots,F_r^{(\infty)}(x,t,\boldsymbol{u})$: $\overline{K}\{(\boldsymbol{u})\}[x,t]$ の既約因子となっている．
- $F_{r+1}^{(\infty)}(x,t,\boldsymbol{u}),\cdots,F_{r+r'}^{(\infty)}(x,t,\boldsymbol{u})$: $\overline{K}\{(\boldsymbol{u})\}[x,t]$ で既約とは限らないため，次に述べるように，代数関数と変換 T_x を用いた拡張 Hensel 構成を用いる方法でさらなる分解を試みる．

以後，$F_{r+i}^{(\infty)}(x,t,\boldsymbol{u})=(x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h_{r+i}(\boldsymbol{u}))^{m_i}+\cdots$ を簡単のため $F=(x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h(\boldsymbol{u}))^m+\cdots$ として話をすすめる．まず，Newton 多項式 $F_{\rm New}=(x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h(\boldsymbol{u}))^m$ の重複部分を

$$x^{\hat{d}}-t^{\hat{\delta}}h(\boldsymbol{u})=\prod_{i=1}^{\hat{d}}(x-t^{\hat{\delta}/\hat{d}}\theta_i),\quad \theta_i=e^{2i\pi\mathrm{i}/\hat{d}}h(\boldsymbol{u})^{1/\hat{d}},\quad \mathrm{i}=\sqrt{-1}$$

のように x の 1 次因子の積にわける．

1. $\overline{K}(\boldsymbol{u})(\theta_1,\cdots,\theta_{\hat{d}})[x,t^{1/\hat{d}}]$ **内で拡張 Hensel 構成**

$$
\begin{array}{rcccc}
F_{\mathrm{New}} = (x^{\hat{d}} - t^{\hat{\delta}}h(\boldsymbol{u}))^m = & (x - t^{\hat{\delta}/\hat{d}}\theta_1)^m & \cdots & (x - t^{\hat{\delta}/\hat{d}}\theta_{\hat{d}})^m \\
= & G_1^{(0)} & \cdots & G_{\hat{d}}^{(0)} \\
\text{拡張 Hensel 構成} & \Downarrow & \cdots & \Downarrow \\
F(x,\boldsymbol{u}) = & G_1^{(\infty)} & \cdots & G_{\hat{d}}^{(\infty)}
\end{array}
$$

$G_i^{(\infty)}$は$\theta_1,\cdots,\theta_{\hat{d}}$のうち$\theta_i$のみを用いて表すことができる.

2. **変換** T_x **を施し，さらに拡張 Hensel 構成**

$H_{i\mathrm{New}}$を$\overline{K}(\boldsymbol{u})(\theta_i)[x,t^{1/\hat{d}}]$ 内で分解 (不可能ならば解析的に既約) し，拡張 Hensel 構成する

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \downarrow & & & & \\
G_1^{(\infty)} & = & x^m + g_{1,m-1}(\boldsymbol{u})x^{m-1} + \cdots + g_{1,0}(\boldsymbol{u}) & \rightarrow & H_1 & = & H_{11} & \cdots & H_{1\lambda} \\
\vdots & \vdots & \vdots & T_x & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
G_{\hat{d}}^{(\infty)} & = & x^m + g_{\hat{d},m-1}(\boldsymbol{u})x^{m-1} + \cdots + g_{\hat{d},0}(\boldsymbol{u}) & \rightarrow & H_{\hat{d}} & = & H_{\hat{d}1} & \cdots & H_{\hat{d}\lambda}
\end{array}
$$

3. **組み合わせ**

$$
\begin{array}{ccccccccc}
G_1^{(\infty)} & = & [T_x^{-1}\cdot H_1] & = & [T_x^{-1}\cdot H_{11}] & \cdots & [T_x^{-1}\cdot H_{1\lambda}] \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
G_{\hat{d}}^{(\infty)} & = & [T_x^{-1}\cdot H_{\hat{d}}] & = & [T_x^{-1}\cdot H_{\hat{d}1}] & \cdots & [T_x^{-1}\cdot H_{\hat{d}\lambda}] \\
 & & & & \downarrow & \cdots & \downarrow \\
 & & F(x,\boldsymbol{u}) & = & \hat{G}_1 & \cdots & \hat{G}_\lambda
\end{array}
$$

ここで，$\hat{G}_j = \prod_{i=1}^{\hat{d}}[T_x^{-1}\cdot H_{ij}]$ $(j=1,\cdots,\lambda)$ である.

以上のように，$\overline{K}\{(\boldsymbol{u})\}[x,t]$ で既約な因子 $\hat{G}_1,\cdots,\hat{G}_{\hat{d}}$ に分解したあとは，分母を見て Hensel 因子を組み合わせて解析的既約因子を構成する問題に帰着する.

参 考 文 献

[Abh89] S. S. Abhyankar: Irreducibility Criterion for Germs of Analytic Functions of Two Complex Variables. Advances in Math., 74, pp. 190–257 (1989).

[Abh90] S. S. Abhyankar: *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers.* Number 35 in Mathematical Surveys and Monographs. Providence, RI: Amarican Mathematical Society (1990).

[Kuo89] T. C. Kuo: Generalized Newton-Puiseux Theory and Hensel's Lemma in $C[[x,y]]$. Can. J. Math., Vol.XLI, No. 6, pp. 1101–1116 (1989).

[McC97] S. McCallum: On Testing a Bivariate Polynomial for Analytic Reducibility. J. Symb. Comput. 24, pp. 509–535 (1997).

[SI00] T. Sasaki and D. Inaba: Hensel Construction of $F(x,u_1,\ldots,u_l)$, $l \geq 2$, at a Singular Point and Its Applications. SIGSAM Bulletin, Vol. 34, pp.9–17 (2000).

[SK99] T. Sasaki and F. Kako: Solving Multivariate Algebraic Equation by Hensel Construction. Japan J. Indus. Appl. Math., 16, 257–285 (1999).

[Sas00] T. Sasaki: Properties of Extended Hensel Factors and Application to Approximate Factorization. Preprint (unpublished), Univ. Tsukuba (2000).

[Walk78] R. J. Walker: *Algebraic Curves.* New York: Springer-Verlag (1978).