

双曲形方程式と非正則度

防衛大学校 打越敬祐

Keisuke Uchikoshi

e-mail: uchikosh@cc.nda.ac.jp

(プログラムに記載した表題は「双曲形方程式と非正則度」でしたが、実際は「半線形双曲形方程式の超関数解」について講演しました。以下の報告もそのときの記録です。)

本稿では半線形双曲形初期値問題の超関数解について考察する。

$l \geq 1, m \geq 2, n \geq 2$ とする。 $x = (x_1, \dots, x_n) = (x_1, x') = (x'', x_n) = (x_1, x''', x_n) \in \mathbb{R}^n, D = \partial/\partial x$ として次の m 階半線形偏微分作用素 F を考える:

$$\begin{cases} Fu = F_0(x, D)u + f(x, u), \\ F_0(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \\ f(x, u) = \sum_{0 \leq k \leq l} f_k(x) u^k. \end{cases}$$

係数 a_α, f_k はすべて原点において解析的であるとする。 F_0 が初期平面 $\{x_1 = 0\}$ に対して双曲形であるとして、初期値問題

$$(1) \quad \begin{cases} Fu = 0, \\ D_1^j u(0, x') = v_j(x') \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases}$$

の原点での局所解を求める。ここで初期値 $v_j(x')$ が「超関数」である場合を考察するが、はじめに考え方の筋道を説明する。

超関数解 u がきちんと求められるようにするため

性質 A u は シュワルツ超関数 である

性質 B u の解析的波面集合 $WF_a u$ が $\mathbb{R}^n \times \{(0, \dots, \overbrace{0}^{n-1}, 1)\} \subset S^* \mathbb{R}^n$ の適切な近傍に含まれる

となるようにしたい. すなわち (1) の解で性質 A, B をみたすものが存在するか, という問題を考える. 性質 B は積が well-defined になるようにするためであるが, 性質 A を要求するのは u が 佐藤超関数 などであれば積を考えたときに特異性が大きくなりすぎるからである. たとえば $u(x) = (x_n + \sqrt{-1})^{-q}$ とすると, これはシュワルツ超関数で

$$\begin{aligned} u^2 &= (x_n + \sqrt{-1})^{-2q} \\ D_n^q u &= \text{const.} \times (x_n + \sqrt{-1})^{-2q} \end{aligned}$$

となり, 次数だけをみればシュワルツ超関数 u を 2 乗するのは u を q 回微分するのと同じことになる. ここで q を大きくすると低階項に現れる非線形項がどんどん大きくなってしまい, 解の計算が困難になってしまう. まして u が 佐藤超関数なら収拾がつかなくなる.

そこで

条件 C v_j は シュワルツ超関数 である

条件 D $WF_a v_j$ が $\mathbf{R}^{n-1} \times \{(0, \dots, 0, 1)\}$ ($\subset S^* \mathbf{R}^{n-1}$) の適切な近傍に含まれる

と仮定することにする. しかし条件 C, D を仮定したからといって性質 A, B が保証されるわけではない. 具体的には, ふたつの障害が存在する. ひとつは解が動く特異点をもてば, $WF_a u$ がどこに現れるか予測がつかなくなり, 性質 B が期待できなくなることである [1, 3]. もうひとつは線形方程式の場合でも, 条件 C のもとで性質 A が成立するとは限らないことである [2].

そこでこうした障害を避けるため, もっとも基本的な場合を考えてみよう. すなわち F_0 は双曲形で, $x=0$, $\xi = (0, \dots, 0, 1)$ として定まる点 $x^* \in S^* \mathbf{R}^n$ において主要形とする:

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha = \prod_{1 \leq j \leq m} P_j(x, \xi), \\ P_i(x, \xi) = \sum_{1 \leq j \leq n} P_{ij}(x) \xi_j, \quad P_{i1} = 1, \\ P_{in}(0) \neq P_{jn}(0) \quad (i \neq j), & (x^* \text{ において主要形}) \\ x \in \mathbf{R}^n \implies P_{ij}(x) \in \mathbf{R} & (\text{双曲形}) \end{cases}$$

超関数を記述するためにつぎの複素領域を考える. $C > 1 > r > 0$ として

$$\begin{aligned} h(z) &= \text{Im } z_n - (r + C |\text{Re } z_1|) |\text{Im } z'| - C |\text{Im } z_1| \\ h'(z') &= \text{Im } z_n - r |\text{Im } z'| \end{aligned}$$

とする. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を原点の近傍として,

$$\begin{aligned}\Omega_{C,r} &= \{z \in \Omega; h(z) > 0\}, \\ \Omega'_{C,r} &= \Omega_{C,r} \cap (\{0\} \times \mathbb{C}^{n-1})\end{aligned}$$

とする. したがって

$$\Omega'_{C,r} = \{z' \in \Omega'; h'(z') > 0\}$$

となる. Ω を小さくし, $r + C|\operatorname{Re} z_1| < 1$ としておく. $r' = r + C|\operatorname{Re} z_1|$ とすると, $\Omega_{C,r}, \Omega'_{C,r}$ の極集合は

$$\begin{aligned}\Omega_{C,r}^o &= \{(x, \xi); |\xi_1| \leq C\xi_n, |\xi'''| \leq \frac{r'}{\sqrt{1-r'^2}}\xi_n\}, \\ \Omega'_{C,r}^o &= \{(x, \xi); |\xi'''| \leq \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\xi_n\}\end{aligned}$$

となる. 条件 C, D のもとで性質 A, B を満たす解を求める, ということは $WF_a v_j(x') \subset \Omega'_{C,r}^o$ を満たすシュワルツ超関数を初期値として, $WF_a u(x) \subset \Omega_{C,r}^o$ を満たす (1) のシュワルツ超関数解を求めるということである. ここで $p > 0$ に対して

$$\begin{aligned}\omega_{C,r} &= \Omega_{C,r} \cap \mathbb{R}^n, \\ \omega'_{C,r} &= \Omega'_{C,r} \cap \mathbb{R}^n, \\ \mathcal{O}_p(\Omega_{C,r}) &= \{g(z) \in \mathcal{O}(\Omega_{C,r}); |g(z)| \leq \exists M h(z)^{-p}\}, \\ \mathcal{O}_p(\Omega'_{C,r}) &= \{g(z') \in \mathcal{O}(\Omega'_{C,r}); |g(z')| \leq \exists M h'(z')^{-p}\}, \\ \mathcal{B}_p(\omega_{C,r}) &: g(z) \in \mathcal{O}_p(\Omega_{C,r}) \text{ が定める佐藤超関数全体}, \\ \mathcal{B}_p(\omega'_{C,r}) &: g(z') \in \mathcal{O}_p(\Omega'_{C,r}) \text{ が定める佐藤超関数全体}\end{aligned}$$

と定める. もちろん $\mathcal{B}_p(\omega_{C,r}), \mathcal{B}_p(\omega'_{C,r})$ の元は実際にはシュワルツ超関数である. 結局 $v_j(x') \in \mathcal{B}_{p+j}(\omega'_{C,r})$ のとき解 $u(x) \in \mathcal{B}_p(\omega_{C,r})$ を求めればよい. これは $v_j(z') \in \mathcal{O}_{p+j}(\Omega'_{C,r})$ のとき解 $u(z) \in \mathcal{O}_p(\Omega_{C,r})$ を求めよといっても同じである. 線形方程式のときはこれはたぶん正しいが, 非線形方程式ならすぐに反例が見つかる.

例. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とする. $u(z) = 1/(z_1 + az_n^p)$ は

$$u_{z_1} + u^2 = 0, \quad u(0, z') = 1/az_n^p$$

の解である. 原点の近くで考えて, もし $p < 0$ なら $u(z)$ は $\{z_n = 0\}$ だけに特異点をもつ. これは見かけ上, 線形方程式の特異性の伝播と同じ結

果である。すなわち特異性は特性曲線に沿って伝播している。一方 $p > 0$ なら $u(z)$ は $(\{z_n = 0\} \cup \{z_1 + az_n^p = 0\})$ に特異点をもつ。この場合特異性の伝播は線形方程式とは異なり、方程式の形からは決定できない。これを動く特異点と呼ぶことにする。とくに $p = 1$ とすると、超関数解を考えて、

$$u = 1/(x_1 + ax_n \pm \sqrt{-1}),$$

$$\text{WF}_a u = \{x_1 + ax_n = 0, \xi = \pm(1, 0, \dots, 0, a)\}$$

となるから条件 D を仮定しても性質 B は成立しない。ここで複号は $\pm a > 0$ となるように選ぶ。

動く特異点に関して石井坦、小林隆夫、中村玄 ([1, 3]) の各氏による重要な結果を引用しておく。

定理 1. $l \neq 1$, $p = m/(l-1)$, $f_l(0) \neq 0$ とする。関数 $\varphi(z)$ が $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(0) D^\alpha \varphi(0) \neq 0$ なら、適当な正則関数 $u'(z)$ ($u'(0) \neq 0$) を選んで $u(z) = \varphi(z)^{-p} u'(z)$ が $Fu = 0$ を満たすようにできる。

定理 1 で u は非特性複素超曲面 $\{\varphi = 0\}$ の上に特異性をもつ。しかも φ が特性的のときには (常識的には正しそうなのに) 成立せず、わざわざ非特性なときに限って成立する。これは例の $p = 1$ の場合に当てはまる。なお定理 1 で初期条件を与えて u を求めることは非常におもしろそうだが、わかっていない。

もとの問題に戻ると、基本的な問題は定理 1 のような場合を除外して、初期値問題の解 $u \in \mathcal{O}_p(\Omega'_{C,r})$ を求めることになる。例では $p = 0$ が動く特異点と動かない特異点の分かれ目になっていて、この値は $p = (m-1)/(l-1)$ と書ける。 p がこれより小さければ特異点は動かず、 p が大きければ動く、と考えられる。主定理は次の通りである。

定理 2. 条件

$$0 < p < (m-1)/(l-1),$$

$$v_j(z') \in \mathcal{O}_{p+j}(\Omega'_{C,r})$$

のとき、 C を大きく取り直し、 r, Ω を小さく取り直すと、(1) の解 $u(z) \in \mathcal{O}_p(\Omega_{C,r})$ がただ一つ決まる。

注意. ここでシュワルツ超関数解 (性質 A, 条件 C) について解析的波面集合を限定 (性質 B, 条件 D) しているわけであるが、シュワルツ超関数に限った理由は冒頭で述べた。一方解析的波面集合の代わりに C^∞ 波面集合 $\text{WF } u$ について同様の条件で置き換えたらどうなるだろうか。実は線

形方程式の場合でもこのようなことはできない。たとえば $n \neq 2$ として $F = D_1^2 - D_n^2 + (1 \text{ 階})$ とする。これは正則包含的弱双曲形作用素である。

まず第一に解析的波面集合または C^∞ 波面集合についてなにも条件をつけないとき

$$(3) \quad v_0, v_1 \in \mathcal{D}' \implies u \in \mathcal{D}'$$

とはいえない。(3) が成立するのは低階項が Levi 条件を満たす場合だけである (cf. [2]).

第二に定理 2 によれば $WF_a v_j$ が小さければ (3) は正しい。

第三に $WF v_j$ が小さい場合を考えても (3) は正しくない。たとえば $WF v_j = \emptyset$ とすれば (3) は

$$(4) \quad v_0, v_1 \in \mathcal{E} \implies u \in \mathcal{D}'$$

が成立するか、ということであるがこれは正しくない (cf. [2]).

繰り返しになるが解はシュワルツ超関数でなければならず、また波面集合に制約をつけなければ困るのだが、結局シュワルツ超関数解について解析的波面集合を限定して考えるのが合理的だということになる。定理 2 はそういう意味である。

なお x^* において主要形でない方程式の場合、筆者は非正則度という概念をもちいて研究中であるが、まだ未完成なのでここでは触れない。

参考文献

- [1] T. Ishii and T. Kobayashi, *Singular solution of nonlinear partial differential equations*, 数理研講究録 545 (1985), 101–111.
- [2] V. Y. Ivrii and V. M. Petkov, *Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed*, Russian Math. Surveys, 29 (1974), 1–70.
- [3] T. Kobayashi and G. Nakamura, *Singular solutions for semilinear hyperbolic equations I*, Amer. J. Math., 108 (1985), 1477–1486.