

完全流体の解析力学と Euler 的記述での Euler 方程式の導出

岡山理科大・福祉 あらき けいすけ (ARAKI Keisuke)
 Dept. Assistive & Rehabilitation Eng., Okayama Univ. Sci.

1 概観

この研究の対象は流体力学を記述する位相空間 (phase space) であり、その分析のための題材として Hamilton の原理からの完全流体の運動方程式の導出を取り上げる。

本稿は Bretherton [1] の方法論の簡単なレビューになっている。彼の研究の要点は、流体力学を質点系の Lagrange 力学のアナロジーとして構成することにある。質点系とのアナロジーを元にしたアプローチに関して Salmon のレビュー [2] がある¹。Bretherton の研究の際立っている点は彼が hybrid approach と呼んでいる方法論にある。この方法論の特徴は、Lagrangian marker によってラベルされている質点の移流の履歴の追跡を、Euler 的に記述された場の量で計算することにある。この方法論の方針の下での最大の成果は、変分計算において速度場の変分 (\tilde{u}_t としよう) を、仮想変位を受ける前の基準となる速度場 u_t と粒子の仮想変位を表す場 ξ_t を用いて表す式 (本稿 p.5 の Eq.(19) 参照)

$$\tilde{u}_t = \dot{\xi}_t + [\xi_t, u_t]$$

を導いたことにある (上付きドットは t に関する偏微分を表す、演算 $[\cdot, \cdot]$ の定義は本稿 p.4 の脚注 10 を参照)。この一見「鬼面人を驚かすような」基準速度場と仮想変位場が絡みあう双線形項が現れることは、流体の配位 (configuration) を記述する空間が非可換 Lie 環の構造を持っていることの反映である²。この式を用いる事で自然に 2 次の非線形項が運動方程式に誘導される。

Nomenclature

本研究では初期時刻を $t = 0$ 、終端時刻を $t = 1$ とおくことにする。流体の容器を記号 $M \subset \mathbb{R}^3$ で表し、流体の運動による容器の変形はないものとする。流体の容器 M 内の点の位置ベクトル、すなわち集合 M の元には「上付き矢印付きローマン体」(例: \vec{a}) を用い、 M 上のベクトル場、すなわち集合 $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ の元の表記には「ポールド体」(例: ξ) を用い、これらを厳密に区別する。ベクトル場の引数 (例: $\xi(\vec{x})$ の \vec{x}) は必ず Euler 的に与えるものとする。ベクトル、ベクトル場の成分の添え字は「上付き」とし (例: $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$, $\xi = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial x^3}$)、³「下付き」の添え字には時刻や振動のパラメーターを記すものとする (例: $u_{\alpha,t}$)。煩わしいが Einstein の記法は (脚注を除いて) 用いない³。

2 仮想変位に伴う速度場の変分

本節では粒子の仮想変位に伴う速度場の変分を計算する。本節の考察は移流について一般的に取り扱っている⁴ので、粘性、非粘性のいずれの場合にも適用することが出来る⁴。

2.1 移流、流跡線、Lagrangian marker の配位

本小節では「移流」「流跡線」「Lagrangian marker の配位」の数学的な取り扱いをハッキリさせる。

¹しかしながら Salmon のレビューでは何故か Bretherton の方法論は積極的に採り上げられていない。

²本論考では Lie 環に関する用語は本文中では極力用いない。そのような用語を導入しなくても計算法を説明できるからである。数学的な記述はなるべく脚注送りにしようと思う。

Lie 群上の力学系の研究として Arnold を嚆矢とする一連の研究の流れがある (教科書 [3] 付録 2 参照、最近のレビューとしては文献 [4] 参照)。Arnold は Lie 群上の力学系 (例:剛体の運動) の無限次元アナロジーとして、非圧縮完全流体の運動を定式化できることを示している。しかしこのアプローチは主に定常解の安定性の解析 (例えば文献 [5] とその参考文献を参照) に用いられ、乱流の研究にはほとんど応用されなかった (乱流への応用は文献 [6])。

³運動エネルギーの計算の際に上付き添え字の成分どうして和を取る場合があるから。

⁴完全流体の運動と粘性流体の運動の差はベクトル場の満たすべき境界条件の違いにある。本稿では完全流体の運動を考察するので現れるベクトル場は全て「境界でベクトルは接平面方向を向く」という境界条件を満たしているものとする。

初期位置が $\bar{a} \in M$ であり、あらかじめ与えられた「速度場」の時系列 $\{u_t; 0 \leq t \leq 1\}$ によって移流される流体粒子の時刻 t での位置を考えよう。時刻 t での Lagrangian marker の位置を $g_t \bar{a}$ と表記しよう⁵。 $g_t \bar{a}$ は次式によって再帰的に計算される:

$$g_t \bar{a} = \bar{a} + \int_0^t u_s(g_s \bar{a}) ds. \quad (1)$$

「(\bar{a} を起点とする) 流跡線 (path line, π と表記しよう)」とは $g_t \bar{a}$ を \bar{a} を固定した上で $t \in [0, 1]$ に関して集めたものである:

$$\pi(\bar{a}) := \{g_t \bar{a}; t \in [0, 1]\}. \quad (2)$$

Lagrangian marker の時刻 t における「配位」 g_t とは $g_t \bar{a}$ を $\bar{a} \in M$ に関して集めたものである:

$$g_t := \{g_t \bar{a}; \bar{a} \in M\}. \quad (3)$$

実際には様々な速度場の履歴を考えることができる。この可能な速度場の履歴の全体に対応する粒子の配位 g_t の全体を考えたものが流体力学の配位空間 (configuration space) である。以下、本稿ではこの空間を記号 G で表す。配位 g_t は N 個の質点系の配位ベクトル \bar{q}_i ($i=1, 2, \dots, N$) に対応するものである。

さて「流跡線」と「配位」の定義より明らかなように、ある特定の速度場の履歴 $\{u_t\}$ に対して、流跡線 $\pi(\bar{a})$ を初期位置 $\bar{a} \in M$ に関して集めたものと、配位 g_t を時刻 $t \in [0, 1]$ に関して集めたものは同じものを表している:

$$\{g_t; t \in [0, 1]\} = \{\pi(\bar{a}); \bar{a} \in M\}. \quad (4)$$

ここで定義された $\{g_t\}$ は、速度場の履歴 $\{u_t\}$ に対応する配位空間上での径路である⁶。質点系の Lagrange 力学のアナロジーとしての流体力学の作用積分はこの径路の上で行われる。

注意: 速度場の履歴が異なっても、特定の時刻 t での配位 g_t が同じになることはあり得る。

2.2 配位 g_t の導関数、Lagrange 速度場

Eq.(1) の両辺を t について微分すると、初期位置 \bar{a} の流体粒子の時刻 t での速度ベクトルを得る:

$$\dot{g}_t \bar{a} = u_t(g_t \bar{a}) \in TM_{g_t \bar{a}}. \quad (5)$$

これを $\bar{a} \in M$ について集めたものを \dot{g}_t と表記しよう。これは履歴 $\{u_t\}$ に伴う時刻 t での Lagrange 速度場を表している⁷:

$$\dot{g}_t := \{u_t(g_t \bar{a}); \bar{a} \in M\}. \quad (6)$$

注意: \dot{g}_t によって配位空間上の曲線 $\{g_t\}$ の点 g_t での接ベクトルをイメージしてもらいたい。これは N 個の質点系の速度ベクトル \bar{q}_i ($i=1, 2, \dots, N$) に対応するものである。

2.3 指数写像、すなわち定ベクトル場による有限時間の移流

「指数写像」とは時間的に変化しない場による有限時間の移流のことである⁸。本稿では「 u の指数写像」を時刻を表すパラメーター t を用いて $\exp(tu)$ または e^{tu} と表記する。指数写像は次式で与えられる:

$$(\exp(tu)\bar{a})^i = a^i + \int_0^t u^i(g_{t_1}\bar{a}) dt_1 = a^i + t u^i(\bar{a}) + \frac{t^2}{2!} \sum_j u^j(\bar{a}) \frac{\partial u^i}{\partial x^j}(\bar{a}) + O(t^3). \quad (7)$$

⁵本稿では $\bar{X}(\bar{a}, t)$ のような表記ではなく、 $g_t \bar{a}$ という表記を用い、「 g_t の \bar{a} への作用」という側面を強調する。作用 g_t は M 上の点から M 上の点への 1 対 1 の上への写像であり、 g_t の集合は群をなしている。この群を微分同相写像群と呼ぶ。

⁶Lie 群論の用語を用いて数学的に厳密な表現をすると、 $\{g_t\}$ は群 G の 1 パラメーター部分群、配位空間上の径路 $\{g_t\}$ の接ベクトルの集合を、配位空間の原点まで右移動したものが速度場の履歴 $\{u_t\}$ である。

⁷Lagrange 速度場に対する特別な記法は用いない。Euler 的なベクトル場の引数に Lagrangian marker の値を代入する。この表記法の利点は積分変数の置換 (particle relabelling) の際に混乱が少ない点にある。

⁸指数写像の概念には質点系の対応物が無い。ここが連続体力学の独自性が現れる源泉である。

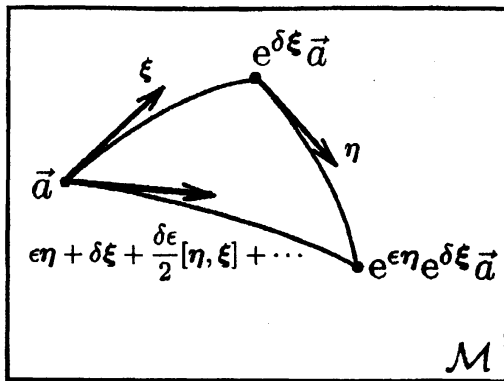


Figure 1 : 二つの指数写像による移流の合成。
図の $\vec{a} \rightarrow e^{\epsilon\eta} e^{\delta\xi} \vec{a}$ の径路は、定ベクトル場

$$\epsilon\eta + \delta\xi + \frac{\epsilon\delta}{2}[\eta, \xi] + o(\delta^2) + o(\epsilon^2)$$

による 1 回の指数写像による移流として取り扱うことができる。

ここで配位空間上の 2 点 $g_{t+\epsilon}$ と g_t を考えよう。この 2 点間の距離がとてもしも近いならば、すなわち十分に短い時間 $[t, t+\epsilon]$ ならば、その間の移流を時刻 t での速度場 u_t の指数写像で近似することができる：

$$g_{t+\epsilon} = e^{\epsilon u_t} g_t + O(\epsilon^2) \tag{8}$$

この両辺を ϵ に関して微分すれば Eq.(6) を再び得る⁹。すなわち Lagrange 速度場の計算に対して指数写像は配位空間上の径路の良い近似を与える。

2.4 指数写像の積

本小節では前節で定義した指数写像の積を計算する。この計算によって Hausdorff の公式として知られる関係式を得る。この計算は、基準となる径路と仮想変位を受けた径路の関係性を議論する上で重要になる。

まず位置 \vec{a} にある粒子をある定ベクトル場 ξ で時間 $[0, \delta]$ だけ移流しよう：

$$(e^{\delta\xi} \vec{a})^i = a^i + \delta \xi^i(\vec{a}) + \frac{\delta^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \xi^j(\vec{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\vec{a}) + O(\delta^3). \tag{9}$$

次いで、さらに別のベクトル場 η を用いて、時間 $[\delta, \delta+\epsilon]$ だけ移流しよう (以下の計算の詳細は付録を参照のこと)：

$$\begin{aligned} (e^{\epsilon\eta} e^{\delta\xi} \vec{a})^i &= a^i + \delta \xi^i(\vec{a}) + \epsilon \eta^i(\vec{a}) + \frac{\delta^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \xi^j(\vec{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\vec{a}) + \epsilon \delta \sum_{j=1}^3 \xi^j(\vec{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\vec{a}) \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \eta^j(\vec{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\vec{a}) + O(\epsilon^2 \delta) + O(\epsilon \delta^2) + O(\epsilon^3) + O(\delta^3) \\ &= a^i + \left(\delta \xi^i(\vec{a}) + \epsilon \eta^i(\vec{a}) + \frac{\epsilon\delta}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\xi^j(\vec{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\vec{a}) - \eta^j(\vec{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\vec{a}) \right) + o(\delta^2) + o(\epsilon^2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^3 \left[\delta \xi^j(\vec{a}) + \epsilon \eta^j(\vec{a}) + \dots \right] \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta \xi^i + \epsilon \eta^i + \dots \right) \Big|_{\vec{a}} \\ &\quad + O(\epsilon^2 \delta) + O(\epsilon \delta^2) + O(\epsilon^3) + O(\delta^3) \\ &= \left(\exp \left[\sum_{k=1}^3 \left(\delta \xi^k + \epsilon \eta^k + \frac{\epsilon\delta}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\xi^j \frac{\partial \eta^k}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \right) + o(\delta^2) + o(\epsilon^2) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right] \vec{a} \right)^i. \tag{10} \end{aligned}$$

この最後の式が二つの指数写像の積を与える公式となる¹⁰。この式は、まず二つの連続した移流が

$$\epsilon\eta + \delta\xi + \frac{\epsilon\delta}{2}[\eta, \xi] + o(\delta^2) + o(\epsilon^2) \tag{11}$$

⁹指数写像を用いて Lagrange 速度場を次式で定義できる： $\left. \frac{d}{d\epsilon} e^{\epsilon u_t} g_t \right|_{\epsilon=0} = R_{*g_t} u_t$ 、ここで記号 R_* は群 G の右移動 ($R_h g = gh$) から群の接空間 TG 上に誘導される写像であり、これもまた右移動と呼ばれる。Lie 群論の言葉を用いれば「Lagrange 速度場 \dot{g}_t は Euler 速度場 u_t の g_t による右移動で得られる」と言うことができる。

で与えられるベクトル場による1回の移流と等価であることを示している(演算 $[\ast, \ast]$ の定義は脚注 10 Eq.(12) を参照)。また「有限時間の二つの移流は一般に可換ではない」ことを意味している。

2.5 仮想変位に伴う速度場の変化

本小節では、配位空間上の作用積分の経路とその変分、経路の変分と個別の粒子の仮想変位を調べ、経路の変分に伴う Lagrange 速度場の変動について考察する。

作用積分を考える基準となる経路を $\{g_t\}$, 仮想変位に伴い摂動を受けた経路を $\{g_{\alpha,t}\}$ と表記することにしよう。ここで α は仮想変位に関する微小パラメーターであり、 $\alpha = 0$ が基準状態を現わす、すなわち $\{g_{0,t}\} = \{g_t\}$ とする。

この経路の変分に伴い、時刻 t における個別の粒子の位置は $g_t \bar{a} \rightarrow g_{\alpha,t} \bar{a}$ と変化する。粒子の変位 $g_{\alpha,t} \bar{a}$ を t を固定して α について偏微分をすることで、変位ベクトルを得る。この変位ベクトルを \bar{a} についてまとめたものを「時刻 t における仮想変位ベクトル場」と呼び、以下 ξ_t と表記することにする。すなわち

$$\xi_t := \left\{ \xi_t(g_t \bar{a}); \bar{a} \in \mathcal{M}, \xi_t(g_t \bar{a}) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{g_{\alpha,t} \bar{a} - g_t \bar{a}}{\alpha} \right\}. \tag{13}$$

ここで ξ_t を Euler 的に定義していることに注意されたい。このベクトル場を用い、仮想変位を次のように表現することができる:

$$g_{\alpha,t} \bar{a} = g_t \bar{a} + \alpha \xi_t(g_t \bar{a}) + O(\alpha^2) = e^{\alpha \xi_t} g_t \bar{a} + O(\alpha^2). \tag{14}$$

次に変分に伴う摂動を受けた軌道 $\{g_{\alpha,t}\}$ の生成する速度場(これを以下 $u_{\alpha,t}$ と表記しよう)を求めよう。 $g_{\alpha,t} \bar{a}$ の t に関する偏導関数は摂動を受けた軌道の Lagrange 速度場 $\dot{g}_{\alpha,t} \bar{a} = u_{\alpha,t}(g_{\alpha,t} \bar{a})$ である。 $\alpha = 0$ は基準状態なので $u_{0,t} = u_t$ である。速度場の変分を \tilde{u}_t で表す、すなわち $u_{\alpha,t} = u_t + \alpha \tilde{u}_t + O(\alpha^2)$ とする。これより次の二つの式が成り立つ:

$$\tilde{u}_t = \left(\frac{\partial u_{\alpha,t}}{\partial \alpha} \right)_{t=\text{constant}}, \quad g_{\alpha,t+\epsilon} = \exp(\epsilon u_{\alpha,t}) g_{\alpha,t} + O(\epsilon^2). \tag{15}$$

ここで流体粒子の位置 $g_{\alpha,t+\epsilon} \bar{a}$ を二通りの経路に沿って近似して評価しよう (Fig.2 参照)。まず $g_t \rightarrow g_{\alpha,t} \rightarrow g_{\alpha,t+\epsilon}$ となぞっていく経路:

$$\begin{aligned} g_{\alpha,t+\epsilon} \bar{a} &= e^{\epsilon u_{\alpha,t}} e^{\alpha \xi_t} g_t \bar{a} + O(\alpha^2) + O(\epsilon^2) \\ &= \exp\left(\epsilon u_{\alpha,t} + \alpha \xi_t + \frac{\epsilon \alpha}{2} [u_{\alpha,t}, \xi_t] + \dots\right) g_t \bar{a} + O(\alpha^2) + O(\epsilon^2) \\ &= \exp\left(\epsilon u_t + \alpha \xi_t + \epsilon \alpha \left(\tilde{u}_t + \frac{1}{2} [u_t, \xi_t]\right) + O(\alpha^2) + O(\epsilon^2)\right) g_t \bar{a} + O(\alpha^2) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{16}$$

¹⁰これは Lie 群論において現れる Hausdorff の公式に他ならない。この公式が行列の Lie 群においてよく知られた式

$$\exp A \exp B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2} [A, B] + \dots\right)$$

と首尾一貫した表式になるためには、Lie 環を定義する Lie 括弧 $[\ast, \ast]$ を通常の (conventional) ベクトル場の Poisson 括弧に負号をつけたもので定義しなくてはならない:

$$[\eta, \xi] := \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{12}$$

この定義が Lie 環の条件を満たすことは明らかである。

蛇足 1: 文献 [6] では Hausdorff の公式を導く際に群 G のバッシュスカラーに対する作用から求めたが、今回は粒子の位置ベクトルに対する作用から直接導いた。群 G のバッシュスカラー $f \in C^\infty(\mathcal{M})$ に対する作用 ($g_t f$ と表記しよう) は、群 G の位置ベクトルに対する作用 $g_t \bar{a}$ を用いて次式で定義される: $g_t f(\bar{x}) := \int_{\mathcal{M}} f(\bar{a}) \delta(\bar{x} - g_t \bar{a}) d^3 \bar{a}$, ここで δ は Dirac のデルタ関数である。この積分作用素は Kaneda が LRA 方程式系を導く際に導入した「位置関数 (position function)」である [7]。このとき指数写像は次式で与えられる: $e^{t u} f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(- \sum_{j=1}^3 u^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^n f$. もちろんこの表現を用いても、指数写像の積に関する計算結果は変わらない。

蛇足 2: ここまでの計算で、ベクトル場が非発散であるという条件は付けていない。面白いことに、非発散 3 次元ベクトル場の Lie 括弧 (あるいは Poisson 括弧) は非発散 3 次元ベクトル場となる、すなわち、非発散 3 次元ベクトル場のなす Lie 環は 3 次元ベクトル場のなす Lie 環の閉部分環となる。この事実が Arnold の非圧縮流体の運動の数学的解析の根底にある。

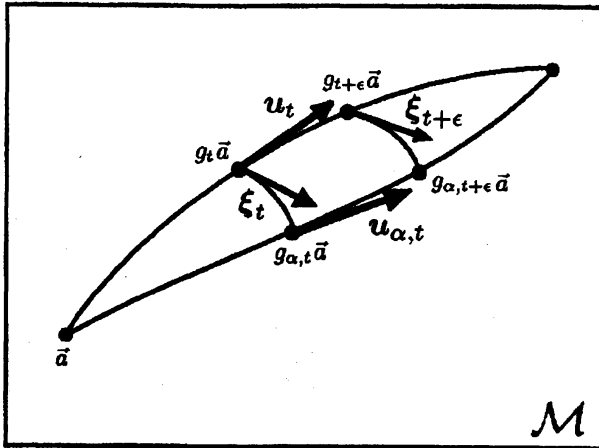


Figure 2 : 二つの径路を用いた粒子の位置の評価。径路

$$g_t \xrightarrow{\xi_t} g_{\alpha,t} \xrightarrow{u_{\alpha,t}} g_{\alpha,t+\epsilon}$$

と径路

$$g_t \xrightarrow{u_t} g_{t+\epsilon} \xrightarrow{\xi_{t+\epsilon}} g_{\alpha,t+\epsilon}$$

の移流は α, ϵ の1次のオーダーで同じ結果を与えなければならない。

次いで $g_t \rightarrow g_{t+\epsilon} \rightarrow g_{\alpha,t+\epsilon}$ となぞっていく径路:

$$\begin{aligned} g_{\alpha,t+\epsilon} \bar{a} &= e^{\alpha \xi_{t+\epsilon}} e^{\epsilon u_t} g_t \bar{a} + O(\alpha^2) + O(\epsilon^2) \\ &= \exp\left(\alpha \xi_{t+\epsilon} + \epsilon u_t + \frac{\alpha \epsilon}{2} [\xi_{t+\epsilon}, u_t] + \dots\right) g_t \bar{a} + O(\alpha^2) + O(\epsilon^2) \\ &= \exp\left(\alpha \xi_t + \epsilon u_t + \alpha \epsilon \left(\dot{\xi}_t + \frac{1}{2} [\xi_t, u_t]\right)\right) g_t \bar{a} + O(\alpha^2) + O(\epsilon^2) \quad (17) \end{aligned}$$

この両者の表式はいずれも α, ϵ の1次の精度で同じ点の位置を評価した式であるから、 $g_{\alpha,t+\epsilon}$ の α, ϵ に関する偏導関数は一致してはならない:

$$\frac{\partial^2 g_{\alpha,t+\epsilon} \bar{a}}{\partial \alpha \partial \epsilon} = \left(\tilde{u}_t + \frac{1}{2} [u_t, \xi_t] \right) \Big|_{g_t \bar{a}} = \left(\dot{\xi}_t + \frac{1}{2} [\xi_t, u_t] \right) \Big|_{g_t \bar{a}}. \quad (18)$$

この表式は Lagrangian marker の値に依らずに成り立つので、速度場の変分が次式で表されることが判る¹¹:

$$\tilde{u}_t = \dot{\xi}_t + [\xi_t, u_t]. \quad (19)$$

この式より、もし仮想変位ベクトル場 ξ_t が各時刻において PDE $\dot{\xi}_t + [\xi_t, u_t] = 0$ を満たすならば、 $\tilde{u}_t = 0$ となる。このとき二つの径路 $\{g_t\}, \{g_{\alpha,t}\}$ は $O(\alpha)$ で同じ流れ場の時系列 $\{u_t\}$ を生成する。すなわち流体の配位空間には流れ場の記述に対する冗長さがある¹²。

2.6 速度場の変分を先に与え仮想変位場を求める

速度場の変分 \tilde{u}_t が仮想変位場 ξ_t と基準速度場 u_t で記述できることが判った。これは速度場の変分 \tilde{u}_t を任意にとることが出来ないことを意味しているのだろうか? 答は否である。というのも、速度場の変分を径路の上の全ての時刻で先に与え、そのデータを元にして仮想変位場を求めることが(形式的ではあるが)できるからである。仮想変位場は速度場の変分を用いて次式によって与えられる:

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t \tilde{u}(t|s) ds, \quad (20)$$

¹¹文献 [6] では、反対称行列(剛体の運動)および非発散ベクトル場(非圧縮流体の運動)の場合にこの式を導いた。計算の本質が Hausdorff の公式の応用にあるので、外見上は全く同じ式になってしまう。

¹²圧縮性流体を取り扱う際に、この冗長さを「ラベルの貼り替え対称性 (particle relabelling symmetry)」と短絡的に考えてはいけない。というのも、ここでは二つの径路に沿った (Euler 的) 速度場が一致するだけであり、これらの径路の上で異なる (Euler 的) 密度分布関数を設定しても良いからである。もし $\rho_{\alpha,0}(\bar{x}) = \rho_{0,0}(\bar{x})$ と設定したならば、この二つの径路は流体の同じ運動を記述しており、ラベルの貼り替えの操作を行ったと言える。本稿では ξ_t による流体の仮想変位 (第 3.1 節の Eq.(24) 参照) を考えているので、 $\rho_{\alpha,t}$ と ρ_t は一般に異なる分布である。

密度が一律な非圧縮性流体の場合にはこのような問題は無い。すなわち仮想変位とラベルの貼り替えの区別が付かない。

ここで $\tilde{u}(t|s)$ は PDE

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{u}(\tau|s) + [\tilde{u}(\tau|s), \mathbf{u}_\tau] = 0 \quad (21)$$

を初期条件 $\tilde{u}(s|s) = \tilde{\mathbf{u}}_s$ の下で時間 $s \leq \tau \leq t$ にわたって積分した解の時刻 t での値である¹³。ただし最初に与えた速度場の変分が、径路の終点 $t = 1$ において $\xi_1 = \mathbf{0}$ を満たすように設定するのは難しいように思われる。

3 仮想変位と熱力学的変数

ここでは変分の計算に必要なだけの熱力学的関係式の考察を行う。

3.1 仮想変位と質量の保存則

本稿の範囲内においては質量の保存則は定理ではなく、変分計算のための前提条件である。仮想変位に伴う体積要素と密度分布の変化について考えよう。変位ベクトル場 ξ_t の引き起こす仮想変位

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}_\alpha = \vec{x} + \alpha \xi_t(\vec{x}) + O(\alpha^2) \quad (22)$$

によって密度分布 ρ_t 、体積要素 $d\vec{x} := dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ がそれぞれ次のように変換される

$$\rho_t \rightarrow \rho_{\alpha,t}, \quad d\vec{x} \rightarrow d\vec{x}_\alpha = \left| \frac{\partial(\mathbf{x}_\alpha)}{\partial(\mathbf{x})} \right| d\vec{x} = \left(1 + \alpha \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^i} + O(\alpha^2) \right) d\vec{x}, \quad (23)$$

ここで $\rho_{0,t} = \rho_t$ である。仮想変位に対する質量の保存則は次の等式で与えられる¹⁴：

$$\rho_{\alpha,t}(\vec{x}_\alpha) d^3 \vec{x}_\alpha = \rho_t(\vec{x}) d^3 \vec{x}. \quad (24)$$

この式の左辺を点 \vec{x} のまわりで α に関して Taylor 展開をし、 $O(\alpha)$ の項をとると質量の保存則の局所的な表現を得る：

$$\left. \frac{\partial \rho_{\alpha,t}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\rho_t \xi_t^i)}{\partial x^i} = 0. \quad (25)$$

質量の保存則は運動学的な性質であり、熱力学的な考察とは独立して行うことができる。

3.2 局所平衡、等エントロピーの仮定と仮想変位

流体は局所平衡にあり、また各粒子のエントロピーは変化しないと仮定する。このとき単位質量あたりの内部エネルギー E の微分は一般に次式で表される [8]：

$$dE = -p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (26)$$

ここで p は流体の圧力である¹⁵。基準となる径路 $\{g_t\}$ 上での内部エネルギー、圧力をそれぞれ E_t, p_t 、擾動を受けた径路 $\{g_{\alpha,t}\}$ 上での内部エネルギー、圧力をそれぞれ $E_{\alpha,t}, p_{\alpha,t}$ と書くと、仮想変位に伴う単位体積あたりの内部エネルギーの変化は次の式で与えられることが判る：

$$\left. \frac{\partial(\rho_{\alpha,t} E_{\alpha,t})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left(E_t + \frac{p_t}{\rho_t} \right) \left. \frac{\partial \rho_{\alpha,t}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \left(E_t + \frac{p_t}{\rho_t} \right) \left(- \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\rho_t \xi_t^i)}{\partial x^i} \right). \quad (27)$$

ここで最後の式変形に際し Eq.(25) を用いた。

¹³Lie 群論の言葉を用いれば、 $\tilde{u}(t|s)$ は群の随伴表現 $\text{Ad} : G \times g \rightarrow g$ を用いて次式で書ける：

$$\tilde{u}(t|s) = \text{Ad}_{g_s g_t^{-1}} \tilde{\mathbf{u}}_s = \frac{d}{dc} \left(g_t g_s^{-1} e^{c \tilde{\mathbf{u}}_s} g_s g_t^{-1} \right).$$

¹⁴これは群 G の 3-form に対する作用を定義している。言い換えると 3-form の空間を表現空間とする群 G の表現を与えている。

¹⁵ここで圧力は内部エネルギーの全微分の微分係数に過ぎない。

4 作用積分の変分

4.1 運動エネルギーの作用積分の変分

径路 $\{g_t\}$ に沿った流体の運動で、初期位置 \bar{a} の粒子のもつ運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} \rho_t(g_t \bar{a}) d^3(g_t \bar{a}) |\dot{g}_t \bar{a}|^2 = \frac{1}{2} \rho_t(g_t \bar{a}) d^3(g_t \bar{a}) \sum_{i=1}^3 (u_t^i(g_t \bar{a}))^2 \quad (28)$$

で、流体の総運動エネルギーは

$$K(g_t, \dot{g}_t) = \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \rho_t(g_t \bar{a}) \sum_{i=1}^3 (u_t^i(g_t \bar{a}))^2 d^3(g_t \bar{a}) \quad (29)$$

で、径路 $\{g_t\}$ に沿った作用積分は

$$S_K(\{g_t\}) = \int_0^1 K(g_t, \dot{g}_t) dt = \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \rho_t(g_t \bar{a}) \sum_{i=1}^3 (u_t^i(g_t \bar{a}))^2 d^3(g_t \bar{a}) dt \quad (30)$$

で与えられる¹⁶。では仮想変位を受けた径路 $\{g_{\alpha,t}\}$ に沿った作用積分を計算しよう:

$$\begin{aligned} S_K(\{g_{\alpha,t}\}) &= \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \frac{1}{2} \rho_{\alpha,t}(g_{\alpha,t} \bar{a}) \sum_{i=1}^3 (u_{\alpha,t}^i(g_{\alpha,t} \bar{a}))^2 d^3(g_{\alpha,t} \bar{a}) dt \\ &\quad (\text{全ての時刻 } t \in [0, 1] \text{ において Euler 座標系 } \bar{x} \text{ への粒子のラベルの貼り換えをして}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \rho_{\alpha,t}(\bar{x}) \sum_{i=1}^3 (u_{\alpha,t}^i(\bar{x}))^2 d^3 \bar{x} dt, \\ &\quad (\alpha \text{ に関して Taylor 展開し Eqs.(19), (25) を代入して}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \left(\rho_t(\bar{x}) - \alpha \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho_t \xi_t^j)}{\partial x^j} \Big|_{\bar{x}} + O(\alpha^2) \right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^3 \left[u_t^i(\bar{x}) + \alpha \left(\xi_t^i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^3 (u_t^j(\bar{x}) \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j}(\bar{x}) - \xi_t^j(\bar{x}) \frac{\partial u_t^i}{\partial x^j}(\bar{x})) \right) + O(\alpha^2) \right]^2 d^3 \bar{x} dt \\ &\quad (\alpha \text{ の次数ごとに整理して}) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \rho_t(\bar{x}) \sum_{i=1}^3 (u_t^i(\bar{x}))^2 d^3 \bar{x} dt + \alpha \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho_t \xi_t^j)}{\partial x^j} \sum_{i=1}^3 u_t^i u_t^i \right. \\ &\quad \left. - \rho_t \sum_{i=1}^3 \left(u_t^i \sum_{j=1}^3 \xi_t^j \frac{\partial u_t^i}{\partial x^j} \right) + \rho_t \sum_{i=1}^3 u_t^i \xi_t^i + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\rho_t u_t^i u_t^j \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j} \right) \right] d^3 \bar{x} dt + O(\alpha^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \rho_t(\bar{x}) \sum_{i=1}^3 (u_t^i(\bar{x}))^2 d^3 \bar{x} dt + \alpha \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^3 \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho_t u_t^i u_t^i \xi_t^j \right) \right. \\ &\quad \left. + \rho_t u_t^i \xi_t^i + \sum_{j=1}^3 \left(\rho_t u_t^i u_t^j \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j} \right) \right] d^3 \bar{x} dt + O(\alpha^2) \quad (31) \end{aligned}$$

これを α に関して微分して作用積分の第 1 変分を得る:

$$\frac{\partial S_K(\{g_{\alpha,t}\})}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^3 \left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\rho_t u_t^i u_t^i \xi_t^j \right) + \rho_t u_t^i \xi_t^i + \sum_{j=1}^3 \left(\rho_t u_t^i u_t^j \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x^j} \right) \right] d^3 \bar{x} dt$$

¹⁶これは Riemann 幾何学の立場で考えると \mathcal{M} 上に Euclid 的な計量 (計量テンソルの (x^1, x^2, x^3) 座標系での成分が

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で与えられる) を入れたことに他ならない。

$$\begin{aligned} & \text{(部分積分して、}\mathcal{M}, [0, 1] \text{に関する境界積分が消えて)} \\ & = - \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^3 \xi_t^i \left[\frac{\partial(\rho_t u_t^i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho_t u_t^i u_t^j) \right] d^3 \vec{x} dt. \end{aligned} \quad (32)$$

以上より運動エネルギー項からの寄与は連続体の運動量フラックスの時間発展を与える¹⁷。

4.2 内部エネルギーの作用積分の変分

内部エネルギーの作用積分の変分を計算しよう。径路 $\{g_t\}$ に沿った流体の運動において、初期位置 \vec{a} の粒子のもつ内部エネルギーは

$$E_t(g_t \vec{a}) \rho_t(g_t \vec{a}) d^3(g_t \vec{a}) \quad (33)$$

で、配位 g_t における流体の総内部エネルギーは

$$V(g_t) = \int_{\mathcal{M}} E_t(g_t \vec{a}) \rho_t(g_t \vec{a}) d^3(g_t \vec{a}) \quad (34)$$

で、径路 $\{g_t\}$ に沿った作用積分は

$$S_T(\{g_t\}) = \int_0^1 V(g_t) dt = \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} E_t(g_t \vec{a}) \rho_t(g_t \vec{a}) d^3(g_t \vec{a}) dt \quad (35)$$

で与えられる。仮想変位を受けた径路 $\{g_{\alpha,t}\}$ に沿った作用積分は次式で与えられる:

$$S_T(\{g_{\alpha,t}\}) = \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} E_{\alpha,t}(g_{\alpha,t} \vec{a}) \rho_{\alpha,t}(g_{\alpha,t} \vec{a}) d^3(g_{\alpha,t} \vec{a}) dt = \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} E_{\alpha,t}(\vec{x}) \rho_{\alpha,t}(\vec{x}) d^3 \vec{x} dt, \quad (36)$$

ここで全ての時刻 $t \in [0, 1]$ において Euler 座標系 \vec{x} への粒子のラベルの貼り換えをした。
これを α に関して微分して作用積分の第 1 変分を得る (計算の詳細は付録参照):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial S_T(\{g_{\alpha,t}\})}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \rho_{\alpha,t}(\vec{x}) E_{\alpha,t}(\vec{x}) d^3 \vec{x} dt, \\ & \text{(微分と積分の順序を交換して)} \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\rho_{\alpha,t}(\vec{x}) E_{\alpha,t}(\vec{x})) d^3 \vec{x} dt, \\ & \text{(Eq.(27) を代入して)} \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \left(E_t + \frac{p_t}{\rho_t} \right) \left(- \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\rho_t \xi_t^i)}{\partial x^i} \right) d^3 \vec{x} dt, \\ & \text{(部分積分をして、境界積分が消えて)} \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \rho_t \sum_{i=1}^3 \xi_t^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(E_t + \frac{p_t}{\rho_t} \right) d^3 \vec{x} dt, \\ & \text{(Eq.(26) を代入して)} \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \rho_t \sum_{i=1}^3 \xi_t^i \left[-p_t \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{\rho_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{p_t}{\rho_t} \right) \right] d^3 \vec{x} dt, \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{M}} \sum_{i=1}^3 \xi_t^i \frac{\partial p_t}{\partial x^i} d^3 \vec{x} dt. \end{aligned} \quad (37)$$

¹⁷非圧縮性流体 ($\rho_t = \text{constant}$, $\partial_t u_t^i = 0$, $\partial_i := \partial/\partial x^i$) の運動方程式の場合、運動量フラックスの式は全体として非発散ベクトル場でないといけないので、慣性項 $\partial_j(\rho_t u_t^i u_t^j)$ の非発散成分を取らねばならない。Hodge-de Rham-Kodaira の分解定理 [9] より $\partial_j(\rho_t u_t^i u_t^j) = (\text{非発散成分}) + (\text{発散成分})$ と一意に分解され、発散成分はスカラー値関数 (P としよう) を用いて (発散成分) $= -\partial_i P$ と書くことが出来る。これより (慣性項の非発散成分) $= \partial_j(\rho_t u_t^i u_t^j) + \partial_i P$ と一意に書くことが出来る。したがって非圧縮性流体の場合には、運動エネルギー項の変分から圧力項が導かれる。もちろんこの「圧力」項が、圧縮性流体の場合の圧力項 (第 4.2 節参照) の何らかの極限として得られるかどうかは自明ではない。

これより内部エネルギー項の変分は圧力の勾配を導くことが判った。

4.3 以上のまとめ：作用積分の変分

流体の作用積分は次式で与えられる：

$$S(\{g_t\}) = S_K(\{g_t\}) - S_T(\{g_t\}). \quad (38)$$

以上の結果をまとめて作用積分の変分は

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(S_K(\{g_{\alpha,t}\}) - S_T(\{g_{\alpha,t}\}) \right) \Big|_{\alpha=0} = - \iint \sum_{i=1}^3 \xi_t^i \left(\frac{\partial(\rho_t u_t^i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho_t u_t^j u_t^i) + \frac{\partial p_t}{\partial x^i} \right) d^3 \vec{x} dt. \quad (39)$$

したがって Hamilton の原理より運動量フラックスの釣り合いの方程式、すなわち Euler 方程式を得る¹⁸：

$$\frac{\partial(\rho_t u_t^i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho_t u_t^j u_t^i) = - \frac{\partial p_t}{\partial x^i}. \quad (40)$$

5 まとめのコメント

本稿では完全流体の運動方程式を Hamilton の原理から導くために必要な最小限のセットアップについて考察を加えた。一般に最小作用の原理を適用する利点は、配位空間 G の局所的な座標系の取り方に依存しない力学の表現を与えることにある。従ってここでの取り扱いは、例えば速度場の関数空間 $\mathfrak{X}(\mathcal{M})$ の基底の取り方に依存しない。

本稿の枠内では質量の保存則 $\dot{\rho}_t + \sum_{i=1}^3 \partial(\rho_t u_t^i)/\partial x^i = 0$ は運動学的な要請である。すなわち ρ に対する g_t の作用を微分 3-形式の保存 $(g_t \rho)(g_t \vec{a}) d^3(g_t \vec{a}) = \rho(\vec{a}) d^3 \vec{a}$ と定義したことの帰結である。

Euler 方程式の導出過程において、流体の温度分布や状態方程式についての考察をせずに済んでしまった。局所平衡と等エントロピーの仮定の下で Euler 方程式を導くだけならば、熱力学的関数に関する考察は内部エネルギーの全微分のみで十分である。この事実には積極的な意義があるものと思われる。すなわち Euler 方程式が液体、気体の区別なく完全流体一般に対して成り立つ方程式であることを示している。

その一方で、熱力学的関数に対する考察が中途半端なので、本稿の考察の枠内では導出した運動方程式が解けない。未知の変数に対し方程式が一つ足りない。(通常はここで状態方程式を導入し、密度 ρ と圧力 p の関係をつける。) これでは例えば音波を取り扱うことが出来ない。このことは流体の運動が非圧縮性であるとみなせる条件である「流体の速度が音速に比べて十分に遅いこと」[10] を判定する手掛かりが無いことを意味している。

References

- [1] Bretherton, F. P., "A note on Hamilton's principle for perfect fluids", J. Fluid Mech., Vol.44, pp.19-31 (1970).
- [2] Salmon, R., "Hamiltonian fluid mechanics", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol.20, pp.225-256 (1988).
- [3] Arnold, V. I., "Mathematical methods of classical mechanics", (Springer, 1989, New York).
- [4] Holm, D. D., Marsden, J. E., Ratiu, T. S., "The Euler-Poincare equations and semidirect products with applications to continuum theories", Adv. Math., Vol.137, pp.1-81 (1998).
- [5] Vladimirov, V. A., Moffatt, H. K., and Ilin, K. I., "On general transformations and variational principles for the magnetohydrodynamics of ideal fluids. Part 4. Generalized isovorticity principle for three-dimensional flows", J. Fluid Mech., Vol.390, pp.127-150 (1999).

¹⁸微分位相幾何学の表記に慣れていると、左辺が1階の反変ベクトルの成分、右辺が1階の共変ベクトルの成分であることが不気味に思える。これは運動エネルギーの計算の際に Riemann 計量テンソルの成分を陽に書かなかったことの副作用である。

- [6] あらきけいすけ, 『非圧縮理想流体力学の数学的方法(仮)』, 九大応用力学研究所 研究集会報告 12ME-S3 「流体力学の新しい視点」, pp.63-95 (九大応力研, 2001 May).
- [7] Kaneda, Y., “Renormalized expansions in the theory of turbulence with the use of the Lagrangian position function”, J. Fluid Mech., Vol.107, pp.131-145 (1981).
- [8] Reichl, L. E., 鈴木増雄監訳, 『現代統計物理(下)』, (丸善, 1984, 東京).
- [9] 茂木勇, 伊藤光弘, 『微分幾何学とゲージ理論』, (共立出版, 1986, 東京).
- [10] Batchelor, G. K., “An introduction to fluid dynamics”, (Cambridge Univ. Press, 1967, Cambridge).

付録：計算ノート

Hausdorff の公式の導出:

$$\begin{aligned}
(e^{\epsilon\eta} e^{\delta\xi} \bar{a})^i &= (e^{\epsilon\eta} (e^{\delta\xi} \bar{a}))^i \\
&= (e^{\delta\xi} \bar{a}) + \epsilon \eta^i (e^{\delta\xi} \bar{a}) + \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \eta^j (e^{\delta\xi} \bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} (e^{\delta\xi} \bar{a}) + O(\epsilon^3) \\
&= \left(a^i + \delta \xi^i(\bar{a}) + \frac{\delta^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\bar{a}) + O(\delta^3) \right) \\
&\quad + \epsilon \eta^i \left(\bar{a} + \delta \xi(\bar{a}) + O(\delta^2) \right) + \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \eta^j \left(\bar{a} + O(\delta) \right) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \left(\bar{a} + O(\delta) \right) + O(\epsilon^3) \\
&= a^i + \delta \xi^i(\bar{a}) + \epsilon \eta^i(\bar{a}) + \frac{\delta^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\bar{a}) + \epsilon \delta \sum_{j=1}^3 \xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\bar{a}) \\
&\quad + \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \eta^j(\bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\bar{a}) + O(\epsilon^2 \delta) + O(\epsilon \delta^2) + O(\epsilon^3) + O(\delta^3) \\
&= a^i + \delta \xi^i(\bar{a}) + \epsilon \eta^i(\bar{a}) + \frac{\epsilon \delta}{2} \sum_{j=1}^3 \xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\bar{a}) - \frac{\epsilon \delta}{2} \sum_{j=1}^3 \eta^j(\bar{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\bar{a}) \\
&\quad + \frac{\delta^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\bar{a}) + \frac{\epsilon \delta}{2} \sum_{j=1}^3 \xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\bar{a}) + \frac{\epsilon \delta}{2} \sum_{j=1}^3 \eta^j(\bar{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\bar{a}) \\
&\quad + \frac{\epsilon^2}{2!} \sum_{j=1}^3 \eta^j(\bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\bar{a}) + O(\epsilon^2 \delta) + O(\epsilon \delta^2) + O(\epsilon^3) + O(\delta^3) \\
&= a^i + \left(\delta \xi^i(\bar{a}) + \epsilon \eta^i(\bar{a}) + \frac{\epsilon \delta}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\bar{a}) - \eta^j(\bar{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\bar{a}) \right) + o(\delta^2) + o(\epsilon^2) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^3 \left[\delta \xi^j(\bar{a}) + \epsilon \eta^j(\bar{a}) + \frac{\epsilon \delta}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\xi^j(\bar{a}) \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}(\bar{a}) - \eta^j(\bar{a}) \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}(\bar{a}) \right) + o(\delta^2) + o(\epsilon^2) \right] \\
&\quad \times \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta \xi^i + \epsilon \eta^i + \frac{\epsilon \delta}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) + o(\delta^2) + o(\epsilon^2) \right) \Big|_{\bar{a}} \\
&\quad + O(\epsilon^2 \delta) + O(\epsilon \delta^2) + O(\epsilon^3) + O(\delta^3). \tag{41}
\end{aligned}$$