数理解析研究所講究録 1343 巻 2003 年 144-146

可微分多様体の同変リプシッツ同相群に対する 1次元ホモロジー群のモジュライの存在性

Existence of moduli for the first homology group of equivariant Lipschitz homeomorphisms

信州大学・理学部 阿部 孝順 (Kōjun Abe)
Department of Mathematical Sciences,
Shinshu University

§1. 序と主結果

ここでは可微分 G-多様体に対して同変リプシッツ同相群の1次元ホモロジー群を調べることが目的である。リプシッツ多様体については Siebenmann, Sullivan, Luukkainen and Väisälä (cf. [LV], [SS]) により研究されている。

$\mathcal{L}(M)$: リプシッツ多様体 M のコンパクトな台をもつリプシッツ同相群

$L(M)$: $\mathcal{L}(M)$ にコンパクト開位相をいれたときの単位元の連結成分

$\mathcal{H}_{LIP}(M)$: $\mathcal{L}(M)$ にコンパクトリプシッツ開位相をいれたときの単位元の連結成分 (c.f. [AF3])

可微分多様体は自然にリプシッツ多様体 の構造をもつ。以下では可微分多様体の場合を考察する。

Theorem 1.1 ([AF3]) $L(M)$ と $\mathcal{H}_{LIP}(M)$ は完全群である。

G をコンパクトリー群とし、 M を可微分 G-多様体とする。

$\mathcal{L}_G(M) = \{h \in \mathcal{L}(M) |\ h \text{ is } G \text{ equivariant}\}$.

$L_G(M)$: $\mathcal{L}_G(M)$ にコンパクト開位相をいれたときの単位元の連結成分

$\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$: $\mathcal{L}_G(M)$ にコンパクトリプシッツ開位相をいれたときの単位元の連結成分

Theorem 1.2 ([AF3],[AF4])

(1) M を自由な作用をもつ可微分 G-多様体で $\dim M/G > 0$ とする。このとき $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ は完全群である。

(2) G を有限群とし、M を可微分 G-多様体とする。このとき $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ は完全群である。

Theorem 1.3 ([AFM])

(1) M を自由な作用をもつ可微分 G-多様体で $\dim M/G > 0$ とする。このとき $L_G(M)$ は完全群である。

(2) M が唯1つの軌道型をもつ可微分 G-多様体で $\dim M/G > 0$ とする。このとき $L_G(M)$ は完全群である。

次に 標準的 $U(n)$-作用をもつ $\mathbf{C}^n$ の場合を考える。このときは $L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)$ は完全群ではないことが分かる。

群 $L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)$ の1次元ホモロジー群は

$$H_1(L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)) = L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)/[L_{U(n)}(\mathbf{C}^n), L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)]$$

で与えられる。

$\mathcal{C}(\mathbf{R})$ を次の条件 $(*)$ を満たす正数 K をもつ $(0,1]$ 上の実数値関数 f 全体の集合とする。

$$(*) \quad |f(x) - f(y)| \leqq \frac{K}{x}(y - x) \quad \text{for } 0 < x \leqq y \leqq 1.$$

このとき $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間となる。
$\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ を $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ の $(0,1]$ 上で有界な関数からなる $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ の部分空間とする。

Theorem 1.4 ([AFM])

$$H_1(L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)) \cong \mathcal{C}(\mathbf{R})/\mathcal{C}_0(\mathbf{R}).$$

Remark 1.5

(1) 群 $\mathcal{C}(\mathbf{R})/\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ は $(0,1]$ にパラメーターをもつ一次独立な基底からなる部分空間を含む。このことから1次元ホモロジー群 $H_1(L_{U(n)}(\mathbf{C}^n))$ が 連続なモジュライをもつことが分かる。

(2) Theorem 1.4 の同型写像は、 $h \in L_{U(n)}(\mathbf{C})$ に対して 点が原点に近づいたときの h の変動を表す関数 $\hat{a}_h \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ から誘導される。

(3) $D_{U(n)}(\mathbf{C}^n)$ をコンパクトな台をもつイソトピーで恒等写像とイソトピックな $\mathbf{C}^n$ の同変微分同相のなす群とする。このとき

$$H_1(D_{U(n)}(\mathbf{C}^n)) \cong \mathbf{R} \times U(1)$$

となる ([AF3])。この同型は $h \in D_{U(n)}(\mathbf{C}^n)$ に h の原点での微分を対応させる写像から誘導される。 このことから包含写像 $D_{U(n)} \hookrightarrow L_{U(n)}(\mathbf{C}^n)$ から誘導される準同型写像 $H_1(D_{U(n)}(\mathbf{C}^n)) \to H_1(L_{U(n)}(\mathbf{C}^n))$ は零写像なことが分かる。従ってこれらの2つの1次元ホモロジー群は全く異なる幾何学的量を表していることが分かる。

次に特に $n=1$ の場合を考察する。
$\mathcal{L}(\mathbf{C},0)=\{h\in\mathcal{L}(\mathbf{C});\ h(0)=0\}$.
$L(\mathbf{C},0)$: $\mathcal{L}(\mathbf{C},0)$ の単位元の連結成分
i : $L_{U(1)}(\mathbf{C})\hookrightarrow L(\mathbf{C},0)$: 包含写像

Theorem 1.6 i から誘導された準同型写像 i_* : $H_1(L_{U(1)}(\mathbf{C}))\to H_1(L(\mathbf{C},0))$ は単射である。

Theorem 1.4、Theorem 1.6 より $H_1(L(\mathbf{C},0))$ はまた連続なモジュライをもつことが分かる。

$\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{C},0)$ は定義より $L(\mathbf{C},0)$ の単位元の連結成分である。[AF4] の結果をから次が証明される。

Theorem 1.7 写像類群 $L(\mathbf{C},0)/\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{C},0)$ の1次元ホモロジー群は 連続なモジュライをもつ。

References

[AB1] K. Abe, *On the homotopy type of the groups of equivariant diffeomorphisms*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 16(1980), 601-626.

[AB2] K. Abe, *Pursell-Shanks type theorem for orbit spaces of G-manifolds*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 18(1982), 265-282

[AF3] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups*, J. Math. Soc. Japan, 53 (2001), 501-511.

[AF4] K. Abe and K. Fukui, *On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[AFM] K. Abe, K. Fukui and T. Miura, *On the first homology of the group of equivariant Lipschitz homeomorphisms*, preprint.

[LV] J. Luukkainen and J. Vaisala, *Elements of Lipschitz topology*, Ann. Acad. Sci. Fenn., 3 (1977), 85-122.

[SS] L. Sibenmann and D. Sullivan, *On complexes that are Lipschitz manifolds*, Academic Press, New York, (1979), 503-525.