数理解析研究所講究録 1344 巻 2003 年 7-10

アーベル多様体の特殊化

京都大学・大学院理学研究科数学教室　森脇　淳 (ATSUSHI MORIWAKI)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY

1. はじめに

A を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義されたアーベル多様体とし，素数 p で良還元 (good reduction) をもっているとすると，後で詳しく書くが，特殊化写像 $\rho_p : A(\mathbb{Q}) \to A_p(\mathbb{F}_p)$ が得られる．ここで，$A(\mathbb{Q})$ は A の $\mathbb{Q}$-有理点全体を表し，$A_p(\mathbb{F}_p)$ は A の p での良還元 A_p の $\mathbb{F}_p$-有理点全体を表す．このとき，もし $A(\mathbb{Q})$ が有限群であれば，ρ_p は単射であることはよく知られている．しかしながら，$A_p(\mathbb{F}_p)$ は有限群であるので，$A(\mathbb{Q})$ が無限群であれば ρ_p は単射に成り得ない．それでは，$\mathbb{Q}(T)$ 上定義されていた場合はどうなるだろうだろうか？　実は，幾何学的な適当な点による還元を考えれば，単射になる．この現象を左右するのはヒルベルトの既約性定理である．講演では，これらのことについて基本的な事柄から述べた．参考文献として，

[1] S. Lang, Fundamentals of Diophantine Geometry, Springer-Verlag.
[2] J.-P. Serre, Lectures on the Mordell-Weil Theorem, Aspects of Mathematics, Vol. 15.

をあげておく．

2. 特殊化写像

まずはじめに特殊化写像について考えていこう．S を 1 次元の正規なネータースキームとし，$f : X \to S$ を S 上の固有なネータースキームとする．S の点 s に対して，s の剰余体を $\kappa(s)$ で，f の s でのファイバー $f^{-1}(s)$ を X_s で表すことにする．さて，η を S の生成点とし，生成ファイバー X_η の $\kappa(\eta)$-有理点 $P \in X_\eta(\kappa(\eta))$，つまり，$P : \mathrm{Spec}(\kappa(\eta)) \to X_\eta$ を考える．P の像の X におけるザリスキー閉包を Δ_P で表す．Δ_P は $f : X \to S$ の切断である．ここで，$s \in S$ をとり，$\Delta_P \cap X_s$ を考えると，これは X_s の $\kappa(s)$-有理点である．この有理点を，$\rho_s(P)$ と表すことにする．以上により，写像

$$\rho_s : X_\eta(\kappa(\eta)) \to X_s(\kappa(s))$$

が定まる．これを，点 s への**特殊化写像**という．

ここで，自然な疑問が生じる．s をうまくとると，ρ_s は単射であろうか？　もしこのようなことがわかれば，特殊ファイバーの性質（例えば，有理点が有限個であるとか）から生成ファイバーの性質が導ける可能性がある．この講演では，このことに関連した話題を考えたいと思う．まずは例から考えよう．

例 2.1. $S = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$，$X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ とおき，$f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は自然な射とする．素数を順番に並べて

$$2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

とする．$Q_n \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$ を，$(p_1 \cdots p_n : 1)$ で定まる点とすると，容易に

$$\rho_{p_i}(Q_j) = \begin{cases} (p_1 \cdots p_j \bmod p_i \ : \ 1) & \text{もし } j < i \\ (0:1) & \text{もし } j \geq i \end{cases}$$

であることがわかる．したがって，

$$\rho_{p_i}\left(\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}\right) = \{(0:1), (p_1 \bmod p_i \ : \ 1), \ldots, (p_1 \cdots p_{i-1} \bmod p_i \ : \ 1)\}$$

となり，$\#(\rho_{p_i}(\{Q_j\}_{j=1}^{\infty})) < \infty$ である．これは，どの素数で特殊化写像を考えても，単射にならないことを示している．このようなことは，あとでいうヒルベルト的でない $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ の特殊性であろうか？　次の同様の例はそうでもないことを示している．

例 2.2. 次に，K は可算濃度の体（例えば，$K = \mathbb{Q}$）とし，$S = \mathrm{Spec}(K[T])$，$X = \mathbb{P}^1_{K[T]}$ とおく．K は可算濃度であるので，番号をふって，

$$K = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,\}$$

とおく．さらに，多項式 $f_n(T)$ を $f_n(T) = (T-a_1)\cdots(T-a_n)$ とおく．点 $P_n \in \mathbb{P}^1_{K(T)}(K(T))$ を $P_n = (f_n(T):1)$ と定める．このとき，

$$\rho_{a_i}(P_n) = \begin{cases} ((a_i - a_1)\cdots(a_i - a_n):1) & \text{もし } i < n \\ (0:1) & \text{もし } i \geq n \end{cases}$$

となり特殊化写像はどの点で考えても単射にならない．

以上のように，特殊化写像の単射性は，けっこうやっかいな問題である．このことを考える上で重要になるヒルベルト性について考えよう．

3. ヒルベルト的スキーム

X を整なスキームとする．X の部分集合についての「薄集合」なる概念，及び，X がヒルベルト的であるという性質を定義しよう．

定義 3.1. Y は整なスキームで，$\pi : Y \to X$ を支配的な射とする．ここで，Y の函数体 $\mathrm{Rat}(Y)$ は X の函数体 $\mathrm{Rat}(X)$ 上有限次代数拡大であり，π の生成ファイバーは $\mathrm{Rat}(X)$-有理点をもたないとする．このとき，

$$\Omega(Y \to X) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } y \in Y \text{ があって } \pi(y) = x \text{ であり，} \\ \pi \text{ により } y \text{ の剰余体と } x \text{ の剰余体の間の同型を導く．} \end{array} \right\}$$

を Y についての X の**基本薄集合** (basic thin set) という．さらに，基本薄集合の有限和集合を X の**薄集合** (thin set) という．

定義 3.2. S を X の部分集合とし，これを固定する．例えば，X の閉点全体であるとか，X が体 k 上定義されているとき，X の k-有理点全体が S の典型的な例である．さて，X が S について**ヒルベルト的**であるとは，X の任意の薄集合 Ω に対して，$\Omega \cap S \subsetneq S$ が成立するときにいう．

例 3.3. $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$，$Y_1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^2+3))$ とおくとき，

$$\Omega(Y_1 \to X) = \{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \mid X^2 + 3 \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ 上で根をもつ.}\}$$

である．まず，$2,3 \in \Omega(Y_1 \to X)$ である．さらに，$p \neq 2,3$ のとき，相互法則を用いれば，

$$X^2+3 \text{ は } \mathbb{F}_p \text{ 上で根をもつ.} \iff \left(\frac{-3}{p}\right) = 1$$
$$\iff p \equiv 1 \mod 3$$

となる．よって，

$$\Omega(Y_1 \to X) = \{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \mid p = 2,3 \text{ または } p \equiv 1 \mod 3\}$$

である．

例 3.4. $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$，$Y_2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[X]/(X^3-2))$ とおく．p を $p \geq 5$ で $p \equiv 2 \mod 3$ となる素数とする．このとき，$\mathbb{F}_p^\times$ は位数 3 の元を持たないので，$X^3 = 1$ の $\mathbb{F}_p$ での根は 1 のみである．よって，$f : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$ を $f(x) = x^3$ と定めると，これは単射になる．しがって，$x^3 = 2$ となる $x \in \mathbb{F}_p$ が存在する．ゆえに，

$$\Omega(Y_2 \to X) \supseteq \{p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{0\} \mid p \geq 5 \text{ でかつ } p \equiv 2 \mod 3\}$$

となる．

例 3.5. 例 3.3 と 例 3.4 から，$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ は，$S = \{$ 素数全体 $\}$ についてヒルベルト的でないことがわかる．

例 3.6. k を体とし，d を 2 以上の整数とする．このとき，$\{a^d \mid a \in k\}$ は，$\mathbb{A}^1_k(k)$ について $\mathbb{A}^1_k$ の中で薄集合である．実際，X を X^d に送る準同型 $k[X] \to k[X]$ から定まるスキームの射 $f : \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{A}^1_k$ を考えると，

$$\Omega(\mathbb{A}^1_k \xrightarrow{f} \mathbb{A}^1_k) = \{a^d \mid a \in k\}$$

となるからである．これから，k が閉体のとき，$\mathbb{A}^1_k$ はヒルベルト的でない．

ここまでは，否定的な例を中心に取り上げてきたが，肯定的な例をあげよう．それは，次のヒルベルトの既約性定理と呼ばれるものである．

定理 3.7. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$ についてヒルベルト的である．

この定理の証明は，いろいろ知られている．たとえば，Lang の本にある Puiseux 級数を巧みに利用すもの，ジーゲルの定理を利用するものがあり，モデル理論の立場からの証明も知られている（例えば，板井昌典さんの「幾何学的モデル理論入門」）．また，上の定理の系として次がわかる．

系 3.8. K を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体とする．このとき，$\mathbb{P}^n_K$ は $\mathbb{P}^n_K(K)$ についてヒルベルト的である．

4. アーベル多様体の場合の特殊化

最後に，アーベル多様体の場合の特殊化写像がいつ単射になるかを考えよう．

定理 4.1. S を正規なネータースキームとし，K をその函数体とする．$A \to S$ をアーベルスキームで，その生成ファイバーの有理点 $A_K(K)$ は有限生成であると仮定する．このとき，S の薄集合 Ω と真のザリスキー閉集合 T が存在して，任意の $s \in S \setminus (\Omega \cup T)$ について，特殊化写像 $\rho_s : A_K(K) \to A_s(\kappa(s))$ は単射である．

証明. まず, 次のことに注意する. $\phi : M \to N$ をアーベル群の間の準同型とする. n を2以上の整数で次が成立していると仮定する.

(1) M は有限生成である.
(2) ϕ による $M/nM \to N/nN$ は単射である.
(3) ϕ による $M_{\mathrm{tor}} \to N_{\mathrm{tor}}$ は単射である.
(4) $M_n = \{x \in M \mid nx = 0\}$, $M_n = \{y \in N \mid ny = 0\}$ とおくと, ϕ により M_n と N_n は同型である.

このとき, ϕ は単射である.

n を K の標数と素になる整数をとり, $M = A_K(K)$, $N = A_s(\kappa(s))$, $\phi = \rho_s$ の場合について, 上の (1) — (4) を満たすような $s \in S$ の選らび方を考える. (1) は仮定である. (3) については, $\kappa(s)$ の標数が n と素になるところを選ぶと一般論である. さらに, S から適当な真のザリスキー閉集合を除いて, n-倍写像 $[n] : A \to A$ の核 $\ker[n]$ は S 上エタールであると仮定してよい.

さて (4) について考えよう. まず, $\ker[n] = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ を既約分解とし, $1 \le i \le l$ については $B_i \to S$ の次数は1で, $l < j \le r$ についてはは $B_j \to S$ の次数は2以上であると仮定する. さて, $l < j \le r$ について, $B_j \to S$ から定まる基本薄集合を Ω_j とする. このとき, $s \notin \Omega_{l+1} \cup \cdots \cup \Omega_r$ であるなら, $l = \#(A_K(K)_n) = \#(A_s(\kappa(s))_n)$ である. よって (4) は満たされる.

最後に, (2) について考える. $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in A_K(K)$ を $A_K(K)/nA_K(K)$ の0以外の代表元とする. (2) を満たすようにするには, 各 σ_i について $\sigma_i(s) \notin nA_s(\kappa(s))$ となるように s を選べばよい. さて, σ_i から定まる切断を Γ_i とし, $\Delta_i = [n]^{-1}(\Gamma_i)$ とおく. Δ_i は K-有理点を持たないので, $\Delta_i = T_1 \cup \cdots T_r$ を既約分解とすると, 各 $T_j \to S$ の次数は2以上である. そこで, $T_j \to S$ から定まる薄集合を Ω'_j とすると, $s \notin \Omega'_1 \cup \cdots \cup \Omega'_r$ であるなら, $\sigma_i(s) \notin nA_s(\kappa(s))$ である. □