数理解析研究所講究録 1345 巻 2003 年 1-30

楕円ファイバー空間の構造

京都大学・数理解析研究所　中山 昇 (Noboru Nakayama)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto University

序

今回の研究集会で行った楕円ファイバー空間についての 4 日間 (8 時間) の連続講演の簡単な紹介をする. 内容は主に論文 [15], [16] の解説である. 詳しくはこの文献を参照されたい. 尚, 本稿では解析空間はハウスドルフ (Hausdorff) で第二可算な複素解析空間を意味する.

楕円曲線を一般ファイバーにもつファイバー空間 $f\colon X \to S$ を楕円ファイバー空間 (elliptic fibration) とよぶ. X が 2 次元のときは, X を楕円曲面 (elliptic surface) とよぶ. 小平の解析的楕円曲面論 [7], [8] を高次元化することが楕円ファイバー空間の研究目的である. ただし高次元にするのは底空間 S である. 一般にファイバー空間は正規解析空間の間の固有全射でファイバーが連結なもののことである. 楕円ファイバー空間 f は底空間 S のある稠密なザリスキ (Zariski) 開集合 $S^\star$ 上は楕円曲線のスムーズ (smooth) な変形族だが, その補集合 $S \setminus S^\star$ の点 P の上の (スキーム論的) ファイバー $f^{-1}(P)$ は楕円曲線ではないかもしれない. そのような楕円曲線にならないファイバーを特異ファイバーという. S が 1 次元のときは特異ファイバーは 楕円曲線の変形の極限であり, f は楕円曲線の退化 (degeneration) ともよばれる. しかし S が 2 次元以上のときは f が平担射 (flat morphism) とはかぎらず特異ファイバーの次元が 2 以上になることがある. しかし代数幾何においてファイバー空間が有用なのはこの特異ファイバーが多様体の構造を決める重要な情報になるからである. 複素函数論の擬凸領域等の研究にあるように「境界の形状から領域の内部構造を調べる」ということや, モース (Morse) 理論にあるように「臨界点の情報から多様体の構造を調べる」ということに似ている.

飯高ファイバー空間の構造が解明されれば代数多様体の分類に大きく役立つが, 楕円ファイバー空間はその意味で最も簡単な場合である. 簡単であるがゆえ周期写像もモ

ノドロミー (monodromy) も詳しく具体的に調べることができる．しかし周期から楕円曲線を構成するように，周期写像やモノドロミーの情報からもとの楕円ファイバー空間 $X \to S$ が即構成できるわけではない．もっと情報が必要なのである．それが何かを解明し，それを使って具体的に X を再構成をするのが「楕円ファイバー空間の構造」の研究目的である．

楕円ファイバー空間の研究について歴史的経緯をのべる．解析的な楕円曲面は１９５０年代後半から始まる小平の研究 [7], [8] において詳細に調べられた．X が 2 次元なので X は S 上の相対的極小モデル (relatively minimal model) と仮定できる．つまり f のファイバーに含まれる第一種例外曲線は無いとしてよい．論文 [7] では，まず初めに楕円曲面に現れる特異ファイバーのタイプが交点数を調べることにより

$$\mathrm{I}_a, \quad {}_m\mathrm{I}_a, \quad \mathrm{I}_a^*, \quad \mathrm{II}, \quad \mathrm{II}^*, \quad \mathrm{III}, \quad \mathrm{III}^*, \quad \mathrm{IV}, \quad \mathrm{IV}^*$$

と分類された．ただし a は非負整数，m は 2 以上の整数である．このうち，${}_m\mathrm{I}_a$ はすべての既約成分が重複度 m をもつ因子であるが他のタイプは必ず重複度 1 の成分 (被約成分) をもつ．タイプ ${}_m\mathrm{I}_a$ のファイバーは重複ファイバー (multiple fiber) とよばれる．[7] では次に周期写像とモノドロミー表現の情報から大域切断 (global section) をもつ基本 (basic) 楕円曲面 $B \to S$ が標準的に構成された．もし $X \to S$ が大域切断を持てば，$X \simeq B$ である．そのことから重複ファイバーでない特異ファイバーの近傍の記述が得られる．基本楕円曲面 B から特異ファイバーの特異点集合を取り除いて得られる開集合 $B^\sharp$ は S 上の群多様体である．代数的な場合この $B^\sharp \to S$ をネロン (Néron) モデルという．B 自身も S 上に有理型群構造 (meromorphic group structure) をもつ．もとの楕円曲面 X が S のすべての点で局所切断 (local section) をもつならば，X は B を局所切断でひねって貼り合わせて得られるもの，すなわちトーサー (torsor) とか主等質空間 (principal homogeneous space) とよばれるものとして表示される．このトーサー全体のなす群は $B \to S$ の切断の芽のなす層 $\mathfrak{S}$ についてのコホモロジー群 $H^1(S, \mathfrak{S})$ である．局所切断を持たない点 $P \in S$ ではある近傍 U と P でのみ分岐する巡回被覆 $V \to U$ が存在し，引き戻し $X \times_S V$ の V 上の極小モデル X_V は V 上に切断をもつ．ゆえにガロア群が V 上の基本楕円曲面にいかに作用するのかがわかれば，もとの X の U 上の構造がわかる．この記述から U 上 X は B から対数的変換 (logarithmic transformation) という一種の手術 (surgery) で得られることが論文 [8] で示され，それによって重複ファイバーの近傍の記述が完全になされた．

この詳細な研究により，例えば標準束公式 (canonical bundle formula) のように，周期写像，モノドロミー表現および特異ファイバーの情報と曲面の不変量とを結びつける様々な手法が生まれた．そうして楕円曲面論は複素解析的曲面の分類論の中で中心的役割を果たすこととなった．

代数的な楕円曲面についても小平とほぼ同じ頃オッグ (Ogg) やシャファレヴィッチ (Shafarevich) らによる研究が始まっていた ([17], [19])．代数的議論では周期とモノドロミーではなく，その代わりに生成ファイバー (generic fiber) X_η のヤコビ (Jacobi) 多様体として得られる，函数体 $K(S)$ 上の 1 次元固有群スキーム[1] E に注目する．E は上記基本楕円曲面の生成ファイバーでもある．生成ファイバー X_η は E のトーサーであり，X は X_η から適当な閉包と相対的極小モデルをとることで再構成されると考える．E のトーサー全体のなす群はヴェイユ (Weil)・シャトレ (Châtelet) 群 $\mathrm{WC}(E)$ であり，そのうち重複ファイバーをもたない楕円曲面 X を定めるトーサー全体のなす部分群がテイト (Tate)・シャファレヴィッチ群 $\text{Ш}_S(E)$ である．S がコンパクトなとき，$\text{Ш}_S(E)$ は解析的楕円曲面の場合のコホモロジー群 $H^1(S, \mathfrak{S})$ に同型である．E はワイエルシュトラス (Weierstrass) の方程式により平面 3 次曲線として表示される．重複ファイバー以外の特異ファイバーの記述がこの方程式から得られる．

楕円曲面論の一般化はいろいろな方向に向かってなされている．

ファイバーを一般種数の曲線としてその特異ファイバー，周期写像，モノドロミーなどを調べる研究は今も盛んになされている．ファイバーを一般次元のアーベル多様体にすることはアーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化と関連して研究されている．ただしそこでは大域切断を持つ場合や特異ファイバーとして半安定還元されたもののみを扱う場合が多い．しかしコンパクト化に際し用いられるトーラス埋め込み (torus embedding) 理論は特異ファイバーの記述に非常に役立つ．

底空間 S の高次元化については河井 [6]，上野 [20] の研究があり，そこでは周期とモノドロミーの情報から基本楕円ファイバー空間が構成されている．また藤田 [3] は楕円曲面の標準束公式を S が一般次元の場合に一般化した．これは平坦化 (flattening) と組み合わせることで非常に有用な公式である．ミランダ (Miranda) [9] は S が 2 次元で，

[1] 体上の楕円曲線をこの意味で定義する論文も多い．

$X \to S$ が大域切断をもつとき, S をブローアップで取り換え X も双有理同値なものに取り換えれば, X は S 上の平坦な非特異相対的極小モデルになることを示した. 曲面 S 上の非特異因子に沿った対数的変換の構成が上野 [21] においてなされた. 藤本 [2] はさらに正規交差因子に沿った対数的変換の例を構成し, 重複ファイバーの交わり方について述べた.

次に楕円ファイバー空間についての筆者の今までの研究について述べる. 最初は論文 [12] にあるように, ホッジ構造の変動 (variation of Hodge structure, VHS と略す) とワイエルシュトラスモデルの関係を調べるところから始まった. 周期写像とモノドロミーの情報は VHS の情報と同じである. 与えられた VHS から基本楕円ファイバー空間を構成するのに, 河井・上野の方法とは異なるワイエルシュトラスモデルの延長という方法を得た. その結果 VHS と基本楕円ファイバー空間とワイエルシュトラスモデルの三つが同等の情報を持つことがわかった. ワイエルシュトラスモデルはある状況の下では標準特異点 (canonical singularity) を許す相対的極小モデルでもある. 3 次元極小モデル理論のフリップ予想は当時まだ未解決だったが, ワイエルシュトラスモデルを利用して, 3 次元代数多様体 X が大域切断を持つ楕円ファイバー空間 $X \to S$ の構造をもつならば X は単線織 (uniruled) かまたは極小モデルをもつということを証明した.

フリップ予想の解決 [11] により曲面上の楕円ファイバー空間の研究はその相対的極小モデルに帰着される. その方向の研究は [15, Appendix A] にある標準 (standard) 楕円ファイバー空間や, 底空間に現れる特異点についてのグロス (Gross) の結果 [4] などがあるが, あまり進んでいない.

切断を持たない楕円ファイバー空間については S が局所的な場合に詳しく調べる必要がある. それを行ったのが論文 [15] である. そこでは S を単位多重円板とし座標超平面の和からなる正規交差因子 D を固定した上で, $S^\star := S \setminus D$ 上スムーズな射影的楕円ファイバー空間 $X \to S$ の双有理型 (bimeromorphic) 同値類の分類を行った. 射影的 (projective) というのは写像が射影的, つまり相対的豊富 (relatively ample) な可逆層 (invertible sheaf) が存在する, ということである. [15] の内容は以下のとおり.

(1) 開集合 $S^\star$ 上の VHS がモノドロミーのタイプによって分類される.

(2) $S^\star$ 上定義されるスムーズな楕円ファイバー空間が基本ファイバー空間のトーサーとして表示できるが, このトーサー全体のなす群が具体的に求まる.

(3) モノドロミーがユニポテントで自明でないとき, 基本楕円ファイバー空間の相対的極小モデルが存在し. それらはトーリックモデルというトーラス埋め込み理論によって構成されるモデルのどれかに同型ということがわかる [15, §4.2].

(4) 次のトーリックモデル定理およびスムーズモデル定理の主張がなりたつ [15, §4.3]: モノドロミーがユニポテントで, D の一般の点で $X \to S$ が局所有理型切断を持つならば, X は S 上のトーリックモデルかまたは S 上スムーズな基本楕円ファイバー空間に双有理型同値である.

(5) 楕円曲面の場合と同様に, (4) の定理の帰結として, 一般の $X \to S$ に対し高々 D のみで分岐するクンマー (Kummer) 被覆 $T \to S$ と $X \times_S T$ の T 上の切断の存在がわかる. 特にここで $X \times_S T$ の主成分は T 上の基本楕円ファイバー空間である.

(6) 一般のモノドロミーのタイプの場合の $X \to S$ の双有理型同値類の分類を群のコホモロジーの帰納極限として記述しその群を計算する.

(3) のトーリックモデルはアーベル多様体の退化の議論におけるトーラス埋め込みによる部分コンパクト化の方法を利用して構成されている. ただしそのトーリックモデルたちが非特異で相対的極小となり, さらに互いにフロップの合成で移りあうことを示すには別の組み合わせ論的議論が必要だった. (4) の定理の証明は D の特異点集合 $\mathrm{Sing}\, D$ の補集合 $S^\circ = S \setminus \mathrm{Sing}\, D$ に着目して行うが, 射影的な $X \to S$ が S° 上ではトーサーのなすコホモロジー群の捩れ元に対応することが証明の鍵となる. (5) により T 上の基本楕円ファイバー空間 $B_T \to T$ における $T \to S$ のガロア群 G の作用を記述できればもとの X と双有理型同値な空間が B_T の商空間として構成できる. $B_T \to T$ の切断のなすアーベル群 $\mathfrak{S}(T)$ は G 加群となるがそれについての群のコホモロジー群 $H^1(G, \mathfrak{S}(T))$ が G の B_T への作用を記述する. したがってガロア被覆 $T \to S$ についての $H^1(G, \mathfrak{S}(T))$ の帰納極限が求まればいいが, その計算の段階が (6) である.

[15] の最初の版は 1991 年 12 月に東大のプレプリントシリーズ (UTYO-MATH 91-28) に出たが, その後長い空白期間を経て 1999 年ごろ内容が少し修正され最終的に去年出版された. その間の期間に代数的方面からの研究がドルガチェフ (Dolgachev), グロスによって進展した ([1], [5], [4]). 彼らの方法は, ミランダの構成した極小モデルを使って生成ファイバーのテイト・シャファレヴィッチ群を計算し, それにより代数曲面上の代数的楕円ファイバー空間の双有理 (birational) 同値類全体を記述するというものであ

る. ここでは S が曲面という制約があるものの, S が局所的である必要はない. 函数体 $K(S)$ 上の楕円曲線 E が基本楕円ファイバー空間 $B \to S$ の生成ファイバーで B が稠密開集合 $S^\star \subset S$ 上スムーズな場合, ここでのテイト・シャファレヴィッチ群は $Ш_{S^\star}(E)$ である. 解析的に考えればこの群は $B \to S$ の切断の芽のなす層 $\mathfrak{S}$ についてのコホモロジー群 $H^1(S^\star, \mathfrak{S})$ に同型と思われるがそうではない. たとえば対数的変換で現れるように $S^\star$ に制限すれば同型だが S 上では双有理型同値にならない二つの楕円ファイバー空間が存在する. そのためこの代数的方法はそのままでは解析的楕円ファイバー空間には応用できない.

局所的でない一般の S 上の解析的楕円ファイバー空間の記述はどうするべきか？論文 [15] でわかった局所構造の情報を張り合わせれば大域構造になるはずだが, 良い記述方法がなかなか見つからない. 具体的には次のような問題設定を考えた. S は複素多様体, D はその正規交差因子として固定し, さらに $S^\star = S \setminus D$ 上に VHS H を一つ固定する. $S^\star$ 上スムーズな楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ があればそれは $S^\star$ 上に VHS $H(f)$ を定義する. ここで同型 $\phi\colon H(f) \simeq H$ を印付け (marking) とよび, 組 $(f\colon X \to S, \phi)$ を印付き楕円ファイバー空間とよぶ. 問題は印付き楕円ファイバー空間の S 上の双有理型同値類全体 $\widetilde{\mathcal{E}}(S, D, H)$ を何らかのコホモロジー群で記述することである. 実際は, 局所射影的 (locally projective) 楕円ファイバー空間から定まるもの全体のなす部分集合 $\mathcal{E}(S, D, H)$ や, 射影的楕円ファイバー空間から定まるもの全体のなす部分集合 $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ の記述が問題になる. この $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ は S がコンパクトな代数多様体上の場合, 上記テイト・シャファレヴィッチ群 $Ш_{S^\star}(E)$ に対応する.

論文 [16] はこの問題をほぼ解決した. そこではこのテイト・シャファレヴィッチ群がある ∂ エタールコホモロジー群の捩れ部分として表示される. ∂ エタール位相は代数多様体の圏におけるエタール位相の解析的 ∂ 空間の圏における類似である. 解析的 ∂ 空間 $\underline{X} = (X, B)$ は解析空間 X とその疎な解析的閉集合 B の組から定義される. ∂ エタール射の定義は境界 B の外側で不分岐な X 上の分岐被覆の性質を抽象化したものである. VHS H に付随する基本楕円ファイバー空間 $B \to S$ を解析的 ∂ 空間の射に自然に拡張し, $B \to S$ の切断の芽のなす解析的 ∂ 空間 $\underline{S} = (S, D)$ 上の ∂ エタール位相におけるアーベル群の層を $\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ とおく. すると $\mathcal{E}(S, D, H)$ は ∂ エタールコホモロジー群 $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ の部分群と同一視されその中で $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ が $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ の捩れ部分と一対一に対応するという定理が得られる [16, §6.3]. 前述の S が局所的な場

合に当てはめると $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ は捩れ元から成り, その群は前述のガロア群の帰納極限と同型である.

論文 [16] の最初の版は 1996 年 4 月に数理研のプレプリントシリーズ (RIMS-1072) に出た. その後 ∂ エタールコホモロジー群の計算に有効ないくつかの完全系列や導来圏の射を考えることによって, テイト・シャファレヴィッチ群との同型や対数的変換のコホモロジー論的記述に成功した. これらの新結果を含めさらに S, D の条件を緩め $S^\star = S \setminus D \subset S$ がトロイド埋め込み (toroidal embedding) の場合に拡張してできたものが [16] であり, 去年出版された.

本稿の構成は以下のとおり. 第 1 節でスムーズな楕円ファイバー空間についての一般論を述べ, 第 2 節で基本楕円ファイバー空間についてワイエルシュトラスモデルの構成も含めて紹介する. 第 3 節は論文 [15] の紹介, あとの節は論文 [16] の紹介である. 第 4 節では ∂ エタール位相について, 第 5 節では大域構造の記述, 第 6 節では応用について述べた.

研究集会では講演のペースが段々と遅れ, 予定より約 1 日分話ができなかったことを参加者にはおわびしたい. 特に論文 [16] についての部分がかけ足で進んでしまった点は申し訳ない. その部分は本稿の後半の部分にあるが, これについては数年前の数理研でのシンポジウム「基本群と代数関数」の報告集にも記述があり ([14]), 内容もかなり重複している. 今回の研究集会は楕円曲線よりむしろ種数 2 以上の曲線の退化がテーマであり, 楕円ファイバー空間は少し離れた話題だった. にもかかわらず長い時間聴講してくださった参加者と研究集会を企画された今野一宏先生に感謝したい.

1. スムーズな楕円ファイバー空間

楕円曲線は種数 1 の代数曲線であり, 原点を指定すれば 1 次元アーベル多様体でもある. 楕円曲線 C の整係数コホモロジー群 $H = H^1(C, \mathbb{Z})$ は重み 1 階数 2 のホッジ構造 (Hodge structure) を持ち, カップ (cup) 積と向き (orientation) による自然な交代形式 $H \times H \to H^2(C, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ がその偏極構造を与える. 逆に $\mathbb{Z}$ に値を持つ偏極付き, 重み 1, 階数 2 のホッジ構造はある楕円曲線 C から定まり, この C は同型を除きただ 1 つに決まる. この偏極付きホッジ構造は上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ における $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ の 1 次分数変換による軌道と一対一に対応する. こうして楕円曲線の同型類全体が複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視される.

この原理は大域切断をもつスムーズな楕円ファイバー空間にも当てはまる. $f\colon X \to S$ がスムーズな楕円ファイバー空間ならば局所系 $H = H(f) = R^1 f_* \mathbb{Z}_X$ に重み 1 階数 2 のホッジ構造の変動 (VHS) が入り, カップ積と向きによる自然な交代形式 $H \times H \to R^2 f_* \mathbb{Z}_X \to \mathbb{Z}_X$ がその偏極構造を与える. 逆に $\mathbb{Z}$ に値を持つ偏極付き, 重み 1, 階数 2 の VHS H は大域切断 $s\colon S \to B$ をもつスムーズな楕円ファイバー空間 $p\colon B \to S$ から定まる. すなわち $H(p) \simeq H$. この p は同型を除きただ 1 つに定まり, H に付随するスムーズな基本楕円ファイバー空間 (basic elliptic fibration) と呼ばれる. p は s を 0 切断とする S 上のアーベル群の構造をもつ. つまり p は S 上の解析空間のなす圏における可換な群対象である.

大域切断を持たない場合でもスムーズな楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ は VHS $H = H(f)$ に付随する基本楕円ファイバー空間 $p\colon B \to S$ のトーサー (torsor) である. つまり S 上 B は X に作用し, その作用と可換な同型 $B \simeq X$ が S 上局所的に存在する. p の正則切断の芽のなす層を $\mathfrak{S}_H$ と書くと, p のトーサー全体はコホモロジー群 $H^1(S, \mathfrak{S}_H)$ で表される. このコホモロジー群を計算するには完全系列

$$0 \to H \to \mathcal{L}_H \to \mathfrak{S}_H \to 0 \tag{1.1}$$

が有効である. ここで $\mathcal{L}_H$ はホッジ束 $H \otimes \mathcal{O}_S$ のホッジフィルトレーションを $\mathcal{F}^p$ と書いたときの可逆層 $\mathcal{F}^0/\mathcal{F}^1$ を表す. たとえばトーサー $f\colon X \to S$ が定める $H^1(S, \mathfrak{S}_H)$ の元は次のように求まる. X 上の指数完全系列から長完全系列

$$0 \to R^1 f_* \mathbb{Z}_X \to R^1 f_* \mathcal{O}_X \to R^1 f_* \mathcal{O}_X^\star \to R^2 f_* \mathbb{Z}_X \simeq \mathbb{Z}_S \to 0$$

が従うこと, VHS の同型 $H(f) \simeq H$ により準同型射 $R^1 f_* \mathbb{Z}_X \to R^1 f_* \mathcal{O}_X$ が $H \to \mathcal{L}_H$ と同一視できること, これらと (1.1) から短完全系列

$$0 \to \mathfrak{S}_H \to R^1 f_* \mathcal{O}_X^\star \to \mathbb{Z}_S \to 0$$

が得られる. これを層の拡大と見れば $H^1(S, \mathfrak{S}_H)$ の元が定まるが, これがトーサー f に対応する. 相対的豊富な可逆層の像を見ることで, 射影的な f は $H^1(S, \mathfrak{S}_H)$ の捩れ元に対応することがわかる ([15, Proposition 1.3.3] 参照).

たとえば $S = \Delta^2 \setminus \{(0,0)\}$ のときを考える. ここで Δ は単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を表す. S は単連結なので VHS H は周期写像 $S \to \mathbb{H}$ から決まるがそれも定数になる. ゆえに H に付随する基本楕円ファイバー空間は S とある楕円曲線 C との直積 $S \times C$

に同型である．完全系列 (1.1) から $H(f) \simeq H$ となる S 上のスムーズな楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ 全体は無限次元ベクトル空間 $H^1(S, \mathcal{O}_S)$ によって表される．特に f が射影的ならば f は大域切断をもつ．大域切断をもたない $f\colon X \to S$ が Δ^2 上の楕円ファイバー空間に延長できるかというのが上野の問題である．実は延長できないことが大域構造の研究 [16] によりわかった (第6節参照).

2. 基本楕円ファイバー空間

非特異連結複素解析空間 (すなわち複素多様体) S とその正規交差因子 D を固定する．補集合 $S \setminus D$ を $S^\star$ と書き, 埋め込み写像 $S^\star \hookrightarrow S$ を j と書く．開集合 $S^\star$ 上定義された重み1階数2の $\mathbb{Z}$ に値を持つ VHS H を固定する．楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ で $S^\star$ 上スムーズなものと $S^\star$ 上に定義される VHS の同型 $\phi\colon H(f) = R^1 f_* \mathbb{Z}_X|_{S^\star} \simeq H$ の組 (f, ϕ) を印付き楕円ファイバー空間と呼ぶ．二つの印付き楕円ファイバー空間は, VHS H との同型と両立する S 上の双有理型写像で移りあうとき双有理型同値であるという．印付き楕円ファイバー空間の双有理型同値類全体のなす集合を $\widetilde{\mathcal{E}}(S, D, H)$ と書き, そのうち局所射影的楕円ファイバー空間が定めるもの全体を $\mathcal{E}(S, D, H)$, 射影的楕円ファイバー空間が定めるもの全体を $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ と書く．

H にはそれに付随する $S^\star$ 上定義されたスムーズな基本楕円ファイバー空間 $p^\star\colon B^\star \to S^\star$ があった．$p^\star$ は次の定理により S 上の楕円ファイバー空間に延びる．

定理. 大域切断をもつ射影的楕円ファイバー空間 $p\colon B \to S$ で p の $S^\star$ への制限が $p^\star$ と同型なものが存在し, それは S 上の双有理型同値性を除きただ一つに定まる．

大域有理型切断をもつ楕円ファイバー空間 $p\colon B \to S$ を一般に基本楕円ファイバー空間とよぶ．ここで合成 $p \circ s$ が恒等写像となる有理型写像 $s\colon S \cdots\to B$ を有理型切断とよんでいる．基本楕円ファイバー空間 p が $S^\star$ 上スムーズで VHS としての同型 $H(p) \simeq H$ が存在するならば, p を H に付随する基本楕円ファイバー空間という．したがって H が $S^\star$ 上に定義されているにもかかわらず, それに付随する基本楕円ファイバー空間が S 上に存在し, しかもそれらはみな S 上互いに双有理型同値である．この定理の証明で本質的なのは周期写像から定まる J 函数 $S^\star \to \mathbb{C}$ が S 上の有理型函数に延びることである．

基本楕円ファイバー空間を記述する手段としてワイエルシュトラスモデルによる方法 [12] がある．S 上の可逆層 $\mathcal{L}$ と $4a^3+27b^2$ が $S^\star$ で 0 をもたない大域切断 $a \in H^0(S, \mathcal{L}^{-4})$, $b \in H^0(S, \mathcal{L}^{-6})$ からなる三つ組 $(\mathcal{L}, a, b)$ をとる．階数 3 のベクトル束 $\mathcal{V} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}^2 \oplus \mathcal{L}^3$ に付随する射影平面束 $p\colon \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{V}) \to S$ とその自明直線束 $\mathcal{O}(1)$ について $\mathtt{X} \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1) \otimes p^*\mathcal{L}^{-2})$, $\mathtt{Y} \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1) \otimes p^*\mathcal{L}^{-3})$, $\mathtt{Z} \in H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}(1))$ をそれぞれ標準的埋め込み $\mathcal{L}^2 \to \mathcal{V}$, $\mathcal{L}^3 \to \mathcal{V}$, $\mathcal{O}_S \to \mathcal{V}$ に対応する大域切断とする．三つ組 $(\mathcal{L}, a, b)$ に対応するワイエルシュトラスモデル $W = W_S(\mathcal{L}, a, b)$ は $\mathbb{P}$ の中で方程式 $\mathtt{Y}^2\mathtt{Z} = \mathtt{X}^3 + a\mathtt{X}\mathtt{Z}^2 + b\mathtt{Z}^3$ で定義される超曲面であり以下の性質をもつ:

(1) $\mathtt{X} = \mathtt{Z} = 0$ で定義される部分多様体 $\Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ は $p\colon W \to S$ の正則切断を与え，W の特異点部分に含まれない．

(2) $p\colon W \to S$ は平坦射で $S^\star$ 上スムーズ．D 上のファイバーは既約平面 3 次曲線と同型．

(3) W の標準層 ω_W は $p^*(\omega_S \otimes \mathcal{L}^{-1})$ と同型．

特に $\mathcal{L}$ の $S^\star$ への制限は $\mathcal{L}_H$ と同型である．$\Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ は標準切断 (canonical section) とよばれる．

D の任意の既約成分 Γ に対し，$\mathrm{ord}_\Gamma(a) < 4$ または $\mathrm{ord}_\Gamma(b) < 6$ が成り立つとき，$(\mathcal{L}, a, b)$ は極小であるという．ここで ord_Γ は正則函数の Γ におけるゼロの位数を表す．一般に三つ組 $(\mathcal{L}, a, b)$ に対し，$a = a_0\delta^4$ かつ $b = b_0\delta^6$ となる極小な三つ組 $(\mathcal{L}_0, a_0, b_0)$ と切断 $\delta \in H^0(S, \mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}^{-1})$ が存在する．ここで $W(\mathcal{L}, a, b)$ と $W(\mathcal{L}_0, a_0, b_0)$ は S 上双有理型同値である．

定理 (cf. [12, §2]).　(1) 大域正則切断 $s\colon S \to X$ をもつ楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ について X は非特異，f は $S^\star$ 上スムーズと仮定する．するとあるワイエルシュトラスモデル $W = W_S(\mathcal{L}, a, b)$ への S 上の双有理型正則写像 $h\colon X \to W$ があって，$h \circ s$ の像は標準切断 $\Sigma(\mathcal{L}, a, b)$ になる．

(2) ワイエルシュトラスモデル $W = W_S(\mathcal{L}, a, b)$ について，W が有理特異点(rational singularities) のみしかもたないことは $(\mathcal{L}, a, b)$ が極小ということと同値である．このとき，W は S 上の標準特異点を許した意味での相対的極小モデルである．

特に $S^\star$ 上スムーズな基本楕円ファイバー空間 $B \to S$ は S 上に標準特異点を許した意味での相対的極小モデルをもつ．

VHS と標準層の高次順像との関係から以下のことが知られている. 非特異な X からの楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ が $S^\star$ 上スムーズなとき、相対標準層 $\omega_{X/S} = \omega_X \otimes f^*\omega_S^{-1}$ の順像 $f_*\omega_{X/S}$ は $\mathcal{F}^1$ を $H \otimes \mathcal{O}_{S^\star}$ の上方標準延長 (upper canonical extension) によって延長して得られる可逆層に同型である. 双対をとれば $R^1 f_*\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{L}_H$ を $H \otimes \mathcal{O}_{S^\star}$ の下方標準延長 (lower canonical extension) によって延長した可逆層 (これを $\mathcal{L}_{H/S}$ と書く) に同型である.

極小な三つ組 $(\mathcal{L}, a, b)$ はワイエルシュトラスモデルにより $S^\star$ 上に VHS H を定義するが, このとき $\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}_{H/S}$ となる.

これらのことから以下の三つが本質的に同値になる.

(1) $S^\star$ 上に $\mathbb{Z}$ に値を持つ偏極付き, 重み 1, 階数 2 の VHS H を与える;

(2) $S^\star$ 上スムーズな S 上の基本楕円ファイバー空間を与える;

(3) S 上に極小な三つ組 $(\mathcal{L}, a, b)$ を与える.

H に付随する基本楕円ファイバー空間 $p\colon B \to S$ のもつ $S^\star$ 上の群構造は, S 上の有理型群構造に延びる. つまり大域切断 $S \cdots\to B$ をアーベル群の 0 写像と見なして群の積写像と逆元を与える写像に対応する有理型写像 $B \times_S B \cdots\to B$ と $B \cdots\to B$ が存在する. 特に p の有理型切断の芽のなす層 $\mathfrak{S}_{H/S}$ が $j_*\mathfrak{S}_H$ の部分層として S 上に定義される. 完全系列 (1.1) は

$$0 \to j_*H \to \mathcal{L}_{H/S} \to \mathfrak{S}_{H/S} \to R^1 j_*H$$

と延びるが, 最後の準同型射は全射とは限らない.

基本楕円ファイバー空間は $\widetilde{\mathcal{E}}(S, D, H)$ の元 0 を定める. 実はトーサーのときと同様, $\widetilde{\mathcal{E}}(S, D, H)$ にはこの 0 を単位元とするアーベル群の構造が入り, $\mathcal{E}(S, D, H)$, $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ はその部分群になる. しかし, 一般にコホモロジー群 $H^1(S, \mathfrak{S}_{H/S})$ が $\mathcal{E}(S, D, H)$ などと直接一対一対応するのではない. たとえば $H^1(S, \mathfrak{S}_{H/S})$ では重複ファイバーを持つ場合を拾えない. しかし $H^1(S, \mathfrak{S}_{H/S})$ の捩れ部分は, 局所有理型切断を持つ射影的楕円ファイバー空間全体のなす, $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ の部分群に同型である.

$S^\star$ 上のスムーズな基本楕円ファイバー空間が S に延びることと, スムーズな射影的楕円ファイバー空間が捩れ元に対応するトーサーであることを利用して以下の定理が証明できる [15, Theorem 4.1.1].

定理. $S^\star$ 上定義されたスムーズな射影的楕円ファイバー空間は S 上の射影的楕円ファイバー空間に延長できる.

3. 局所構造

S が d 次元単位多重円板

$$\Delta^d = \Delta \times \cdots \times \Delta = \{(s_1, s_2, \ldots, s_d) \in \mathbb{C} \mid |s_1|, |s_2|, \ldots, |s_d| < 1\}$$

で, D が座標超平面 $D_i = \{s_i = 0\}$ の $l(\leq d)$ 個の和 $\sum_{i=1}^{l} D_i$ の場合を考察する. この場合を S が局所的な場合とよぶことにする. $\Delta^\star = \Delta \setminus \{0\}$ と書くと, 補集合 $S^\star = S \setminus D$ は $(\Delta^\star)^l \times \Delta^{d-l}$ に同型でその普遍被覆空間 $\mathbb{H}^l \times \Delta^{d-l}$ からの被覆写像

$$e\colon (u_1, u_2, \ldots, u_l, s_{l+1}, \ldots, s_d) \mapsto (s_1, s_2, \ldots, s_d)$$

は $s_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\pi u_i)$ $(1 \leq i \leq l)$ で与えられる. VHS H は周期写像 $\tau\colon \mathbb{H}^l \times \Delta^{d-l} \to \mathbb{H}$ とそれに両立するモノドロミー表現 $\rho\colon \pi_1(S^\star) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ とで与えられるが, これらは分類可能である. 特に H の (モノドロミー表現の) タイプを以下のように分類する[2]:

(1) ρ の像が有限群のとき, それは巡回群で位数は 1, 2, 3, 4, 6 のいずれかである. この順に応じて H のタイプを I_0, $\mathrm{I}_0^{(*)}$, $\mathrm{IV}^{(*)}$, $\mathrm{III}^{(*)}$, $\mathrm{II}^{(*)}$ と定義する.

(2) ρ の像が無限群のとき, その元がすべてユニポテントなとき, H のタイプを $\mathrm{I}_{(+)}$, ユニポテントでない元があるとき, $\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}$, と定義する. ただしここで非負の整数からなる数ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_l)$ と 0, 1 からなる数ベクトル $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_l)$ を, D_i の周りを正の向きにまわるモノドロミーに対する行列が

$$(-1)^{c_i} \begin{pmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と共役という性質で定める. また α を $(a_1, a_2, \ldots, a_l)$ の最大公約数とおく. $\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}$ を条件: $\boldsymbol{a} \equiv 0 \mod 2$, $\boldsymbol{a} \equiv 0 \mod 2$, $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{c} \not\equiv 0 \mod 2$ に応じて, $\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}(0)$, $\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}(1)$, $\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}(2)$, と三つの場合に分ける.

---

[2] [15] の表記でなく [16] の表記を採用した

$S^\star = S \setminus D$ 上定義されたスムーズな楕円ファイバー空間は上の VHS H のどれかについてのコホモロジー群 $H^1(S^\star, \mathfrak{S}_H)$ によって記述できる．このコホモロジー群は $H^2(S^\star, H)$ に同型でさらには群のコホモロジー群 $H^1(\pi_1(S^\star), \mathbb{Z}^2)$ にも同型である．ただしここで $\mathbb{Z}^2$ はモノドロミー表現によって $\pi_1(S^\star)$ 加群とみる．実際このコホモロジー群は以下の表のように計算される．

Type	I_0	$\mathrm{I}_0^{(*)}$	$\mathrm{II}^{(*)}$	$\mathrm{III}^{(*)}$	$\mathrm{IV}^{(*)}$
	$\bigwedge^2(\mathbb{Z}^{2l})$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2(l-1)}$	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(l-1)}$	$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{(l-1)}$
Type	$\mathrm{I}_{(+)}$	$\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}(0)$	$\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}(1)$	$\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}(2)$	
	$\bigwedge^2(\mathbb{Z}^l) \oplus (\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z})^{l-1}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2(l-1)}$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{(l-1)}$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{(l-1)}$	

特に，I_0, $\mathrm{I}_{(+)}$ の場合以外，$H^1(S^\star, \mathfrak{S}_H)$ は有限群である．

$S^\star$ ではなく S 上の楕円ファイバー空間の構造について調べる上で次の定理が重要である．[15] では定理の I_0 の場合がスムーズモデル定理 (Theorem 4.3.1), $\mathrm{I}_{(+)}$ の場合がトーリックモデル定理 (Theorem 4.3.2) と分けて書かれている．

定理 (スムーズモデル定理，トーリックモデル定理)．$S = \Delta^d$ 上の射影的楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ に対し，それが $S^\star = S \setminus D$ 上スムーズで，その定める VHS $H(f)$ のタイプが I_0 または $\mathrm{I}_{(+)}$ と仮定する．さらに，各超平面因子 D_i $(1 \le i \le l)$ に対し，$f(\Gamma) = D_i$ を満たす f^*D_i の被約な既約成分 Γ が存在すると仮定する．すると f は大域切断をもつ．また非特異な f の極小モデルが存在し，そのモデルは I_0 のときは S 上スムーズ，$\mathrm{I}_{(+)}$ のときはトーラス埋め込みにより記述される．

証明のアイデアは以下の通り．まず第一に極小モデルとして得られる予定の基本楕円ファイバー空間 $B \to S$ を記述しておく．

I_0 のとき，H は局所系としては自明で周期写像は正則関数 $\tau\colon S \to \mathbb{H}$ で与えられる．極小モデル $B \to S$ はスムーズな基本楕円ファイバー空間であり，B は $S \times \mathbb{C}$ に対する $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ の作用

$$S \times \mathbb{C} \ni (s, z) \mapsto (s, z + m\tau(s) + n)$$

についての商空間である．

$I_{(+)}$ のとき, H の周期写像 $\tau\colon \mathbb{H}^l \times \Delta^{d-l} \to \mathbb{H}$ はある正則関数 $h\colon S \to \mathbb{C}$ によって

$$\tau(u_1, \ldots, u_l, s_{l+1}, \ldots, s_d) = \sum_{i=1}^{l} a_i u_i + h(s_1, \ldots, s_d)$$

と表される. H に付随するスムーズな基本楕円ファイバー空間 $B^\star \to S^\star$ は $S^\star \times \mathbb{C}^\star$ に対する作用

$$\vartheta\colon S^\star \times \mathbb{C}^\star \ni (s, \zeta) \mapsto \left(s, \zeta \exp\left(2\pi\sqrt{-1}h(s)\right) \prod_{i=1}^{l} s_i^{a_i}\right)$$

についての商空間として得られる. 極小モデル $B \to S$ はこれを S に延長したものだが, それは以下のように構成される: $S^\star \times \mathbb{C}^\star$ を代数的トーラス $\mathbb{T} = (\mathbb{C}^\star)^l \times \mathbb{C}^\star$ の標準的開集合と見なし, 適当なトーラス埋め込み $\mathbb{T} \subset \mathbb{X}$ を探し, それに沿ってトロイド埋め込み $S^\star \times \mathbb{C}^\star \subset \mathcal{X}$ をつくる. ここで ϑ が $\mathcal{X}$ に正則にかつ自由に作用するようにトーラス埋め込みを探すのである. この $\mathcal{X}$ の ϑ による商空間として B を得る. ただし B が非特異で S 上極小にとれるという性質を満たすトーラス埋め込みはただ一つではなく, $\sum_{i=1}^{l} a_i$ 個の元からなる集合を各々が a_i 個の元からなる l 個の部分集合 F_i $(1 \le i \le l)$ に分割する仕方によって決まる ([15, §4.2] 参照). こうしてできた極小モデル B をトーリックモデル (Toric model) とよぶ. f の相対的極小モデルで $\mathbb{Q}$ 分解的なものはすべてトーリックモデルとして得られ, それらは互いに簡単なフロップとよばれる双有理型変換の合成で移りあう [15, Theorem 4.2.9].

第二に, 補集合が余次元 2 以上の解析的集合となる S の開集合 S° を考え, $X \to S$ の S° 上の制限が (適当な印付けと合わせて) $H^1(S^\circ, \mathfrak{S}_{H/S})$ の捩れ元に対応する場合を考える. 実際, 定理の証明はこのような S° が存在する場合に帰着できる.

H がタイプ I_0 のときは (1.1) と同じ完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}_S^2 \to \mathcal{O}_S \to \mathfrak{S}_{H/S} \to 0 \tag{3.1}$$

が存在し, タイプ $I_{(+)}$ のときは二つの完全系列

$$0 \to \mathbb{Z}_S \to \mathcal{O}_S(*D^+)^\star \to \mathfrak{S}_{H/S} \to 0, \tag{3.2}$$

$$0 \to \mathcal{O}_S^\star \to \mathcal{O}_S(*D^+)^\star \to \bigoplus_{a_i>0} \mathbb{Z}_{D_i} \to 0 \tag{3.3}$$

が存在する. ここで $D^+ = \sum_{a_i>0} D_i$ であり, $\mathcal{O}_S(*D^+)^\star$ は, そのゼロも極も D^+ にしか持たない S 上の有理型函数の芽のなす乗法的アーベル群の層である. 誘導され

る長完全系列でコホモロジー群 $H^1(S^\circ, \mathfrak{S}_{H/S})$ の捩れ元を追っていくと，位相的条件 $H^1(S^\circ, \mathbb{Z}) = H^2(S^\circ, \mathbb{Z}) = 0$ などから捩れ元が 0 しかないことがわかる．したがって $X \to S$ は S° 上に有理型切断をもつのである．これが S 上の有理型切断に延びることは $S \setminus S^\circ$ の余次元が 2 以上なのでハルトグス (Hartogs) 型の定理から従う．こうしてスムーズモデル定理, トーリックモデル定理が証明される．

なお S が 2 次元のときは 3 次元極小モデルの存在定理を利用した別証明が [13] にある．

$S^\star$ 上スムーズな射影的楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S = \Delta^d$ に対し, 適当な自然数の列 $m_1, m_2, \ldots, m_l$ によって定まるクンマー拡大

$$T = \Delta^d \ni (t_1, t_2, \ldots, t_l, s_{l+1}, \ldots, s_d) \mapsto (t_1^{m_1}, \ldots, t_l^{m_l}, s_{l+1}, \ldots, s_d) \in S$$

により f を基底変換すればトーリックモデル定理, スムーズモデル定理の仮定をみたすようにできる．したがって次の系を得る．

系. $S^\star$ 上スムーズな射影的楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S = \Delta^d$ に対し, 高々 D のみで分岐する被覆 $T \to S$ が存在し, 引き戻し $X \times_S T \to T$ が大域有理型切断をもつ．

この系は後述の ∂ エタール位相を導入する上で重要な性質だったが, ∂ エタールコホモロジー群の計算結果からこの系自身を証明することもできる．またトーリックモデル定理を使わない分岐理論による系の証明も [15] に書いてある．

上のクンマー拡大 $T \to S$ のガロア群 G の T 上の基本楕円ファイバー空間 B_T における (有理型) 作用を記述できればもとの f の双有理型構造がわかる．$B_T \to T$ は T 上に誘導された VHS H_T に付随する基本楕円ファイバー空間である．その大域有理型切断のなすアーベル群 $\mathfrak{S}(T) = H^0(T, \mathfrak{S}_{H_T})$ は自然に G 加群の構造をもつ．詳しくは略すが上記の G の B_T への有理型作用 (のある同値類) とコホモロジー群 $H^1(G, \mathfrak{S}(T))$ の元は一対一に対応する．ゆえに帰納極限との同一視

$$\mathcal{E}^+(S, D, H) \leftrightarrow \varinjlim_{T \to S} H^1(G, \mathfrak{S}(T))$$

ができる．この帰納極限は以下のように計算できる．

(1) H のタイプが I_0 のとき, $\mathrm{Hom}(\pi_1(S^\star), (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2)) \simeq (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2l}$ に同型.

(2) H のタイプが $\mathrm{I}_{(+)}$ のとき, 数ベクトル $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_l)$ と正数 α を前述のように定めさらに $k:=\{i \mid a_i>0\}$ とおく. このとき帰納極限は

$$\bigoplus_{a_i=0}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\oplus\left\{(p_i)\in\bigoplus_{a_i>0}\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\mid p_ia_j\equiv p_ja_i \text{ for any } i,j\right\}\simeq(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{(l-k+1)}\oplus(\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z})^{(l-1)}$$

に同型.

(3) H のタイプがその他のとき, $H^2(\pi_1(S^\star),\mathbb{Z}^2)$ に同型.

ここでの計算方法は, モノドロミーが有限のときは完全系列 (3.1) を利用し, モノドロミーが無限のときは $\mathrm{I}_{(+)}$ の場合の二つの完全系列 (3.2), (3.3) を利用する.

H のタイプが I_0, $\mathrm{I}_{(+)}$ 以外のとき, 制限写像 $\mathcal{E}^+(S,D,H)\to\mathcal{E}(S^\star,\emptyset,H)$ は同型である. このことは H を VHS としてもつスムーズな楕円ファイバー空間 $X^\star\to S^\star$ は S 上の射影的楕円ファイバー空間 $X\to S$ に延長でき, しかもその延長は双有理型同値を除きただ一つに定まる, ということを意味する.

I_0 のときは制限写像 $\mathcal{E}^+(S,D,H)\to\mathcal{E}(S^\star,\emptyset,H)$ はゼロ写像である. このことは H を VHS としてもつスムーズな楕円ファイバー空間 $X^\star\to S^\star$ が S 上に延長可能なのはそれが基本楕円ファイバー空間の場合に限る, ということを意味する. またその延長は必ずしも互いに双有理型同値でない. 実際 B_T への G の作用を調べれば重複ファイバーの出方が無数ある.

$\mathrm{I}_{(+)}$ のときは制限写像 $\mathcal{E}^+(S,D,H)\to\mathcal{E}(S^\star,\emptyset,H)$ は部分群 $(\mathbb{Z}/\alpha\mathbb{Z})^{(l-1)}$ への全射である. ゆえにスムーズな射影的楕円ファイバー空間 $X^\star\to S^\star$ のみが S 上の楕円ファイバー空間に延びる.

局所構造の研究の次の目標は $\mathcal{E}^+(S,D,H)$ の各元についての相対的極小モデルの構成とその記述である. I_0 の場合はトーリック多様体の双有理射についての極小モデルの存在 [18] を利用してその構成ができる [15, Theorem 6.2.1]. 他の場合は現在も研究中である.

4. ∂ エタールコホモロジー

楕円ファイバー空間の局所構造を理解し, 適当な張り合わせのデータを与えれば大域構造はわかったことになる. しかしそれを層 $\mathfrak{S}_{H/S}$ のコホモロジー群と関連づけることは自明ではない. とくに重複ファイバーについてそうである.

楕円曲面の場合の大域構造の記述は, 重複ファイバーをもたない楕円曲面全体に対してはそれをコホモロジー群 $H^1(S, \mathfrak{S}_{H/S})$ と同一視することで済ませ, 一方重複ファイバーをもつものについては各ファイバーにおいて対数的変換を施して重複ファイバーの無い場合に帰着するという局所的記述で済ませている. しかし, S が 2 次元以上になれば重複ファイバーは一般に孤立しておらず局所的にとらえられない.

一方代数的楕円ファイバー空間においては大域構造を表現する方法が別にあった ([17], [19], [1]). それは VHS を固定するのではなく大域切断をもった楕円ファイバー空間の底空間 S の生成点上のファイバー E を固定するのである. E は S の函数体 $K(S)$ 上定義された相対次元 1 の固有群スキームである. E の $K(S)$ 上のトーサー全体のなすヴェイユ・シャトレ群 $\mathrm{WC}(E)$ はエタールコホモロジー群 $H^1(\mathrm{Spec}\, K(S)_{\text{ét}}, E)$ に同型である. このトーサーは適当に閉包をとることで S 上の射影的楕円ファイバー空間 $X \to S$ に延びる. つまり $X \otimes K(S) \simeq E$ が成り立つ. この延長の仕方は当然 S 上の双有理同値性を除きただ一つである. S の各点のあるエタール近傍上に局所切断をもつ $X \to S$ に延長されるトーサーたち全体は $\mathrm{WC}(E)$ の部分群をなす. これがテイト・シャファレヴィッチ群 $\text{Ш}_S(E)$ である. 生成点からの射を $i\colon \mathrm{Spec}\, K(S) \to S$ と書いたときのエタールコホモロジー群 $H^1(S_{\text{ét}}, i_*E)$ が $\text{Ш}_S(E)$ と同型である.

したがって S が代数的な場合 $B \to S$ を H に付随する基本楕円ファイバー空間とすれば, その生成ファイバー $E = B \otimes K(S)$ についてのテイト・シャファレヴィッチ群 $\text{Ш}_{S^\star}(E)$ が $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ に同型である. しかし S が解析的な場合は生成ファイバーも閉包をとる操作も無い. 局所的な場合で見たように $S^\star$ 上の楕円ファイバー空間の S への延長は存在しない場合もあるし, 双有理型同値性を除いてもただ一つとは限らない. だからコホモロジー群 $H^1(S^\star, \mathfrak{S}_H)$ は幾何学的意味からすれば $\text{Ш}_{S^\star}(E)$ と差が無いようだが, $S^\star = S$ でなければ全く異なる群である. 代数的な場合, $S^\star$ 上のエタール射 $U \to S^\star$ は適当に閉包をとることにより S 上の準有限 (quasi finite) 射 $V \to S$ に延びる. ここで $V \to S$ は $S^\star$ 上エタールにとれる. 一方解析的な場合のエタール射 (局所同型射) $U \to S^\star$ は S に延びるかといえば, それが有限射でなければほとんど無理である. この違いが大きく影響している.

そこで境界上に延びるエタール射を使ってあるグロタンディック (Grothendieck) 位相を考え, その場合のコホモロジー群として解析的な場合におけるテイト・シャファレ

ヴィッチ群の類似を作れないか, と考えた. それが以下に述べる解析的 ∂ 空間上の ∂ エタール位相である.

解析空間 X とその疎な解析的部分集合 B の組 $[X, B]$ を対象とし, 射の集合として正則写像 $f\colon X_1 \to X_2$ で $f^{-1}B_2 \subset B_1$ となるもの全体をとることによって得られる圏を境界付き解析空間のなす圏とよぶ. 射 $f\colon [X_1, B_1] \to [X_2, B_2]$ が ∂ エタールとは f が離散的ファイバーしか持たず, $f^{-1}B_2 = B_1$ でさらに制限した射 $X_1 \setminus B_1 \to X_2 \setminus B_2$ がエタール射となるものである. ここでさらに $X_1 \setminus B_1 \to X_2 \setminus B_2$ が同型のとき f を ∂ 同型という.

二つの組 $[X_1, B_1], [X_2, B_2]$ は第三の組 $[X_3, B_3]$ からそれぞれへの ∂ 同型射 $[X_3, B_3] \to X_1, B_1], [X_3, B_3] \to [X_2, B_2]$ が存在するとき ∂ 同型と呼ばれる. ∂ 同型による $[X, B]$ の同値類を (X, B) と書き解析的 ∂ 空間, または単に ∂ 空間とよぶ. ∂ 空間の圏が境界付き解析空間のなす圏から自然に定義される. 通常の解析空間は境界が空集合な ∂ 空間と見なす. また標準射 $\varepsilon\colon \underline{X} = (X, B) \to (X, \emptyset)$ により, 解析空間 X を ∂ 空間 $\underline{X}$ の実現とよぶ. 開集合 $X \setminus B$ は ∂ 空間 $\underline{X}$ の実現 X の取り方に依らず, これを $\underline{X}^*$ と書き $\underline{X}$ の内部とよぶ. ∂ 空間 $\underline{X}$ の内部 $\underline{X}^*$ が正規解析空間ならば, 正規解析空間 X が $\underline{X}$ の実現として存在し, 他の実現 X' に対し X はその正規化となる. 以下で扱う ∂ 空間はその内部が正規と仮定する. そして X の点を $\underline{X}$ の点とよぶ. 点 $x \in X$ における $\underline{X}$ の局所基本群を次のように定義する: $\underline{X} = (X, B)$ とし, 通常の解析空間としての X における x の近傍 U をとってまず基本群 $\pi_1(U \setminus B, *)$ の副有限完備化 (profinite completion) $\widehat{\pi}_1(U \setminus B, *)$ を考える. これが ∂ 空間 $(U, B \cap U)$ の基本群に相当する. U を縮め基点 $*$ を x に近づけて得られる射影極限 $\varprojlim \widehat{\pi}_1(U \setminus B, *)$ が局所基本群 $\widehat{\pi}_1^{\mathrm{loc}}(\underline{X}; x)$ である. ∂ 空間 (X, B) がトロイド埋め込み $X \setminus B \subset X$ から定まるとき, 局所基本群は有限生成自由アーベル群の副有限完備化である.

∂ エタール射が定めるグロタンディック位相を ∂ エタール位相とよぶ. ∂ エタール位相についての層として ∂ 空間 $\underline{X}$ 上の層が定義される. アーベル群 M の定める定数層 $M_{\underline{X}}$ や正則函数の芽のなす層 $\mathcal{O}_{\underline{X}}$ は自然に定義される. また前層の層化, $\underline{X}$ の点における茎などが定義される. x における茎は局所基本群 $\widehat{\pi}_1^{\mathrm{loc}}(\underline{X}; x)$ の離散連続加群になる. $\underline{X}$ 上の層の圏には単射的対象が存在し左完全関手に対する右導来関手が定義できる. その意味で層 F のコホモロジー群 $H^p(\underline{X}, F)$ が定義されるが, これはチェック (Čech) のコホモロジー群 $\check{H}^p(\underline{X}, F)$ と同型になる [16, Theorem 2.2.9]. また標準写像

$\varepsilon\colon \underline{X} \to X$ についての高次導来層 $R^q\varepsilon_*F$ の点 x における茎は連続群コホモロジー

$$H^q_{\mathrm{cont.}}(\widehat{\pi}_1^{\mathrm{loc}}(\underline{X};x), F_x) = \varinjlim_{K\subset\widehat{\pi}_1^{\mathrm{loc}}(\underline{X};x)} H^q(\widehat{\pi}_1^{\mathrm{loc}}(\underline{X};x)/K, H^0(K, F_x))$$

に同型である．ただしここで K は $\widehat{\pi}_1^{\mathrm{loc}}(\underline{X}, x)$ の指数有限な正規部分群すべてをわたる．特に F が $\mathbb{Q}$ 加群の層ならば $q > 0$ に対し $R^q\varepsilon_*F = 0$ である．ルレイ (Leray) のスペクトル系列

$$H^p(X, R^q\varepsilon_*F) \Rightarrow H^p(\underline{X}, F)$$

により，コホモロジー群 $H^p(\underline{X}, F)$ は局所基本群のコホモロジーのデータと X 上の通常のコホモロジーにより計算できると考えられる．

トロイド埋め込み $X^\star = X\setminus B \subset X$ から定まる ∂ 空間 $\underline{X} = (X, B)$ についての ∂ エタールコホモロジー群の計算例を挙げる．定数層 $\mathbb{Z}_{\underline{X}}$ のコホモロジー群については次の二つの長完全系列がある [16, Theorem 3.4.2]:

$$\cdots \to H^{p-1}(\underline{X}, \mathbb{Z}) \to H^p_B(X, \mathbb{Z}) \to H^p_B(X, \mathbb{Q}) \oplus H^p(X, \mathbb{Z}) \to H^p(\underline{X}, \mathbb{Z}) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^{p-1}(X^\star, \mathbb{Q}) \to H^p(\underline{X}, \mathbb{Z}) \to H^p(X, \mathbb{Q}) \oplus H^p(X^\star, \mathbb{Z}) \to H^p(X^\star, \mathbb{Q}) \to \cdots$$

最初の系列を見ると $H^p(\underline{X}, \mathbb{Z})$ は $H^p(X, \mathbb{Z})$ と境界 B における $\mathbb{Q}$ 係数局所コホモロジー群 $H^p_B(X, \mathbb{Q})$ を合わさせてできた群と思える．このことはカルティエ (Cartier) 因子群の場合にはよりはっきりする．構造層 $\mathcal{O}_{\underline{X}}$ を正則函数の芽のなす層と考えて通常の解析空間のように可逆正則函数の芽のなす乗法的アーベル群の層 $\mathcal{O}^\star_{\underline{X}}$, 有理型函数の芽のなす層 $\mathfrak{M}_{\underline{X}}$, 可逆有理型函数の芽のなす乗法的アーベル群の層 $\mathfrak{M}^\star_{\underline{X}}$ が定義できる．商層 $\mathcal{D}iv_{\underline{X}} := \mathfrak{M}^\star_{\underline{X}}/\mathcal{O}^\star_{\underline{X}}$ の切断を $\underline{X}$ のカルティエ 因子と考え，その全体のなす群 (カルティエ因子群) $H^0(\underline{X}, \mathcal{D}iv_{\underline{X}})$ を $\mathrm{Div}(\underline{X})$ と書く．X の (通常の) カルティエ因子群を $\mathrm{Div}(X)$, そのうち B に台 (support) をもつ因子全体のなす部分群を $\mathrm{Div}_B(X)$ と書く．また B に台を持つ $\mathbb{Q}$ カルティエ因子全体のなす群を $\mathrm{Div}_B(X, \mathbb{Q})$ と書く．ピカール (Picard) 群 $\mathrm{Pic}(\underline{X})$ を可逆層，すなわち階数 1 の局所自由 $\mathcal{O}_{\underline{X}}$ 加群の層，のなす乗法的アーベル群と定義すれば $\mathrm{Pic}(\underline{X}) \simeq H^1(\underline{X}, \mathcal{O}^\star_{\underline{X}})$ である．ただし局所は ∂ エタール位相の意味での局所である．コホモロジー完全系列の連結準同型射

$$H^0(\underline{X}, \mathcal{D}iv_{\underline{X}}) \to H^1(\underline{X}, \mathcal{O}^\star_{\underline{X}})$$

によりカルティエ因子 D は可逆層 $\mathcal{O}_{\underline{X}}(D)$ を定める. X が非特異かまたは B の既約成分がみな正規と仮定すると同型

$$\mathrm{Div}(\underline{X}) \simeq (\mathrm{Div}_B(X,\mathbb{Q}) \oplus \mathrm{Div}(X)) \,/\, \mathrm{Div}_B(X),$$
$$\mathrm{Pic}(\underline{X}) \simeq (\mathrm{Div}_B(X,\mathbb{Q}) \oplus \mathrm{Pic}(X)) \,/\, \mathrm{Div}_B(X)$$

が存在する [16, Proposition 3.4.3]. つまり $\underline{X}$ の因子は B の既約成分には $\mathbb{Q}$ 係数を許す. X が非特異ならば B に台を持つ $\mathbb{Q}$ 因子は $\underline{X}$ の可逆層を定めるのである. 同様に階数有限の局所自由 $\mathcal{O}_{\underline{X}}$ 加群の層は $\mathbb{Q}$ 局所自由層と考えても良さそうだが, 実は放物的層 (parabolic sheaf) と対応する [16, §3.5].

5. 大域構造

S を複素多様体, D をその正規交差因子とし $\underline{S}$ を ∂ 空間 (S,D) とおく. $S^\star = S \setminus D$ からの開埋め込みを $j\colon S^\star \to S$, $\underline{j}\colon S^\star \to \underline{S}$ と書く. 重み 1 階数 2 の $\mathbb{Z}$ 偏極付き VHS H が $S^\star$ 上に定義されているとする. このときホッジ束 $\mathcal{H} = H \otimes \mathcal{O}_{S^\star}$ の標準延長 $\mathcal{H}_{\underline{S}}$ が局所自由 $\mathcal{O}_{\underline{S}}$ 加群として定義され, 通常の下方標準延長は標準写像 $\varepsilon\colon \underline{S} = (S,D) \to (S,\emptyset) = S$ による順像 $\varepsilon_*\mathcal{H}_{\underline{S}}$ に同型となる. ホッジフィルトレーション $\mathcal{F}^p(\mathcal{H})$ も $\mathcal{H}_{\underline{S}}$ の部分ベクトル束 (subbubdle) となる $\mathcal{O}_{\underline{S}}$ 加群 $\mathcal{F}^p(\mathcal{H}_{\underline{S}})$ に延びる. ここで可逆層 $\mathcal{L}_{H/\underline{S}}$ を $\mathcal{H}_{\underline{S}}/\mathcal{F}^1(\mathcal{H}_{\underline{S}})$ と定義する. 前述の $\mathcal{L}_{H/S}$ は $\varepsilon_*\mathcal{L}_{H/\underline{S}}$ に同型である. また対数的 p 形式の芽のなす局所自由層 $\Omega^p_{\underline{S}}(\log D)$ と対数的接続 (logarithmic connection)

$$\nabla_{\underline{S}}\colon \mathcal{H}_{H/\underline{S}} \to \Omega^1_{\underline{S}}(\log D) \otimes \mathcal{H}_{H/\underline{S}}$$

が存在する. 通常のようにそれから層の複体 (complex) $\Omega^\bullet_{\underline{S}}(\log D) \otimes \mathcal{H}_{H/\underline{S}}$ が定まるが, これは $R\underline{j}_*H_{\mathbb{C}}$ と擬同型 (quasi-isomorphic) である. すると導来圏における射 $R\underline{j}_*H \to R\underline{j}_*\mathcal{L}_H \sim_{\mathrm{qis}} \underline{j}_*\mathcal{L}_H$ は $R\underline{j}_*H \to \mathcal{L}_{H/\underline{S}}$ を経由することがわかる.

$S^\circ = S \setminus \mathrm{Sing}\, D$, $D^\star = D \cap S^\circ$ とおき, ∂ 空間 $\underline{S}^\circ = (S^\circ, D^\star)$ や開埋め込み $\underline{j}^\star\colon S^\star \hookrightarrow \underline{S}^\circ$, $\underline{j}^\circ\colon \underline{S}^\circ \to \underline{S}$ を考える. 高次順像 $R^p\underline{j}_*H$ や少し複雑な $R^p\underline{j}^\circ_*(R^q\underline{j}^\star_*H)$ の D の点における茎は S が局所的な場合の群のコホモロジーを使って計算できる. するとたとえば $(p,q) \neq (2,0)$ かつ $p+q \geq 2$ ならば $R^p\underline{j}^\circ_*(R^q\underline{j}^\star_*H)$ の茎は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間になるこ

とがわかる. 新たな層 $\mathfrak{T}_{H/\underline{S}}$, $\mathfrak{Q}_{H/\underline{S}}$ を

$$\mathfrak{T}_{H/\underline{S}} = \operatorname{Ker}\left(R^1\underline{j}_*H \to \underline{j}^\circ_*\left((R^1\underline{j}^\star_*H)\otimes\mathbb{Q}\right)\right), \quad \mathfrak{Q}_{H/\underline{S}} = R^1\underline{j}_*H/\mathfrak{T}_{H/\underline{S}}$$

と定義する. $\mathfrak{Q}_{H/\underline{S}}$ は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間の層である. S が局所的な場合 $\mathfrak{T}_{H/\underline{S}}$ の原点 0 での茎は以下のようなる:

$$(\mathfrak{T}_{H/\underline{S}})_0 \simeq \begin{cases} 0, & H \text{ のモノドロミーが有限;} \\ \mathbb{Q}^l/\left(\mathbb{Z}\boldsymbol{a}+\bigoplus_{a_i=0}\mathbb{Q}\right) \simeq \mathbb{Q}^{(k-1)}\oplus\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & H \text{ のモノドロミーが無限.} \end{cases}$$

ただし $k = \sharp\{i \mid a_i > 0\}$. ここでさらに通常の S 上の層 $\mathfrak{T}_{H/S}$, $\mathfrak{Q}_{H/S}$ を上と同様に

$$\mathfrak{T}_{H/S} = \operatorname{Ker}\left(R^1 j_*H \to j^\circ_*\left((R^1 j^\star_*H)\otimes\mathbb{Q}\right)\right), \quad \mathfrak{Q}_{H/S} = R^1 j_*H/\mathfrak{T}_{H/S}$$

と定義する. ただし $j^\circ\colon S^\circ \hookrightarrow S$, $j^\star\colon S^\star \hookrightarrow S^\circ$ と開埋め込みを書いた. すると $\varepsilon_*\mathfrak{Q}_{H/\underline{S}} \simeq \mathfrak{Q}_{H/S}\otimes\mathbb{Q}$ であり, S が局所的な場合 $\mathfrak{Q}_{H/S}$ の原点 0 における茎は

$$\left(\mathfrak{Q}_{H/S}\right)_0 \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}^{2l}, & \text{タイプ } \mathrm{I}_0 \text{ のとき;} \\ \mathbb{Z}\oplus\bigoplus_{a_i=0}\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^{(l-k+1)}, & \text{タイプ } \mathrm{I}_{(+)} \text{ のとき;} \\ 0, & \text{その他のタイプのとき} \end{cases}$$

と表される.

完全系列 (1.1) に $R\underline{j}_*$ を施して得られる完全系列を調べて次の完全系列の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{j}_*H & \longrightarrow & \underline{j}_*\mathcal{L}_H & \longrightarrow & \underline{j}_*\mathfrak{S}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & R^1\underline{j}_*H & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \underline{j}_*H & \longrightarrow & \mathcal{L}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{T}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

$\mathbb{L}^\bullet_{H/\underline{S}}$ で $\mathcal{L}_{H/\underline{S}}$ が 0 次に置かれた層の複体 $[\cdots\to 0\to\mathcal{L}_{H/\underline{S}}\to\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}\to 0\to\cdots]$ を表すことにする. すると上記可換図式の下の系列から導来圏の特別三角図式 (distinguished triangle)

$$\cdots \xrightarrow{+1} \mathbb{L}^\bullet_{H/\underline{S}} \to \tau_{\leq 1}R\underline{j}_*H \to \mathfrak{Q}_{H/\underline{S}}[-1] \xrightarrow{+1} \cdots$$

を得る．ここで $\tau_{\leq 1}$ は truncation, $[-1]$ はシフトを表す．射 $R\underline{j}_*H \to \mathcal{L}_{H/\underline{S}}$ から可換図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{+1} & \mathbb{L}^{\bullet}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathcal{L}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} & \xrightarrow{+1} & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
\cdots & \xrightarrow{+1} & \tau_{\leq 1}R\underline{j}_*H & \longrightarrow & \mathcal{L}_{H/\underline{S}} \oplus \mathfrak{Q}_{H/\underline{S}}[-1] & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} & \xrightarrow{+1} & \cdots
\end{array}$$

が導かれる．これより ∂ エタールコホモロジー群 $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ に付いて次の完全系列が存在する:

$$\begin{aligned}(5.1)\quad H^0(S, \mathfrak{S}_{H/S}) \to H^1(S^*, H) \to H^1(S, \mathcal{L}_{H/S}) \oplus H^0(S, \mathfrak{Q}_{H/S} \otimes \mathbb{Q}) \\ \to H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}}) \to H^2(S^*, H) \to H^0(S, (R^2j_*H) \otimes \mathbb{Q}).\end{aligned}$$

また射 $\mathfrak{Q}_{H/\underline{S}}[-1] \to \mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ は部分層 $\mathfrak{S}^{\log}_{H/\underline{S}} \subset \underline{j}_*\mathfrak{S}_H$ と層の拡大

$$(5.2)\qquad 0 \to \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} \to \mathfrak{S}^{\log}_{H/\underline{S}} \to \mathfrak{Q}_{H/\underline{S}} \to 0$$

を引き起こす．誘導された写像 $H^0(S, \mathfrak{Q}_{H/S} \otimes \mathbb{Q}) \to H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ が対数的変換のコホモロジー論的表示と見なせることが第6節 (D) でわかる．

H に付随する基本楕円ファイバー空間 $p\colon B \to S$ として B は非特異, $p^{-1}D$ は正規交差因子となるものを考える．p は ∂ 空間の射 $\underline{p}\colon \underline{B} = (B, p^{-1}D) \to \underline{S}$ を誘導する．p の有理型切断の芽のなす ∂ エタール位相についての層を $\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ と書く．すると $\mathfrak{S}_{H/S} \simeq \varepsilon_*\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ である．$\underline{B}$ 上の指数完全系列から次の完全系列の可換図式が存在する:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R^1\underline{p}_*\mathbb{Z}_{\underline{B}} & \longrightarrow & R^1\underline{p}_*\mathcal{O}_{\underline{B}} & \longrightarrow & R^1\underline{p}_*\mathcal{O}^*_{\underline{B}}/\mathcal{V}_{\underline{B}} & \longrightarrow & R^2\underline{p}_*\mathbb{Z}_{\underline{B}}/\mathcal{V}_{\underline{B}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{j}_*H & \longrightarrow & \mathcal{L}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{T}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

ただしここで $\mathcal{V}_{\underline{B}}$ は D に台をもつ芽のなす $R^1\underline{p}_*\mathcal{O}^*_{\underline{B}}$ の部分層, つまり局所コホモロジー群の層 $\mathcal{H}^0_D(R^1\underline{p}_*\mathcal{O}^*_{\underline{B}})$, を表す．$\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ からの縦の準同型射は有理型切断 $s\colon S \cdots \to B$ に対し可逆層 $\mathcal{O}_B(s(S) - \Sigma)$ の類を対応させることで得られる．ただし $\Sigma \subset B$ はあらかじめ固定した p のゼロ切断の像．ゆえに分裂する完全系列

$$0 \to \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} \to R^1\underline{p}_*\mathcal{O}^*_{\underline{B}}/\mathcal{V}_{\underline{B}} \to \mathbb{Z}_{\underline{S}} \to 0$$

が引き起こされる．ここでの $\mathbb{Z}_{\underline{S}}$ への準同型射は，可逆層に対しそれと一般ファイバーとの交点数を与えることで得られる．

次に印付き楕円ファイバー空間 $(f\colon X \to S, \phi)$ で f が S 上局所射影的なもの，つまり $\mathcal{E}(S,D,H)$ の元を定めるもの，を考える．前と同様 X は非特異，$f^{-1}D$ は正規交差因子と仮定する．すると f は ∂ エタール位相の意味で $\underline{S}$ 上局所的に切断をもつことがトーリックモデル定理，スムーズモデル定理の系からわかる．ゆえに $(f\colon X \to S, \phi)$ から基本楕円ファイバー空間のときと同様に ∂ 空間 $\underline{X} = (X, f^{-1}D)$ 上の指数完全系列から可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & R^1\underline{f}_*\mathbb{Z}_{\underline{X}} & \longrightarrow & R^1\underline{f}_*\mathcal{O}_{\underline{X}} & \longrightarrow & R^1\underline{f}_*\mathcal{O}^\star_{\underline{X}}/\mathcal{V}_{\underline{X}} & \longrightarrow & R^2\underline{f}_*\mathbb{Z}_{\underline{X}}/\mathcal{V}_{\underline{X}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{j}_*H & \longrightarrow & \mathcal{L}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{G}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & \mathfrak{T}_{H/\underline{S}} & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

が得られる．ここで $\underline{f}\colon \underline{X} \to \underline{S}$ は f の定める ∂ 空間の射を表し，$\mathcal{V}_{\underline{X}} = \mathcal{H}^0_D(R^1\underline{f}_*\mathcal{O}^\star_{\underline{X}})$ である．また縦の同型左二つは印付け ϕ によって引き起こされている．ただし $\mathfrak{G}_{H/\underline{S}}$ からの縦の準同型射の引き起こす完全系列

$$0 \to \mathfrak{G}_{H/\underline{S}} \to R^1\underline{f}_*\mathcal{O}^\star_{\underline{X}}/\mathcal{V}_{\underline{X}} \to \mathbb{Z}_{\underline{S}} \to 0$$

は必ずしも分裂しない．(f,ϕ) にこの層の拡大を与えることにより写像 $\mathcal{E}(S,D,H) \to H^1(\underline{S}, \mathfrak{G}_{H/\underline{S}})$ を得る．これについて次の定理が成り立つ [16, §6.3].

定理． $\mathcal{E}(S,D,H) \to H^1(\underline{S}, \mathfrak{G}_{H/\underline{S}})$ は単射であり，$\mathcal{E}^+(S,D,H)$ と $H^1(\underline{S}, \mathfrak{G}_{H/\underline{S}})$ の捩れ部分が一対一に対応する．

S が局所的な場合，$H^1(\underline{S}, \mathfrak{G}_{H/\underline{S}})$ は $R^1\varepsilon_*\mathfrak{G}_{H/\underline{S}}$ の多重円板 S の原点での茎に同型になる．従って局所構造は長完全系列 (5.1) より導かれる完全系列

$$0 \to \mathfrak{Q}_{H/S} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to R^1\varepsilon_*\mathfrak{G}_{H/\underline{S}} \to (R^2 j_* H)_{\mathrm{tor}} \to 0$$

で計算できる．ただし tor はアーベル群の捩れ部分をあらわす．

この定理から射影的楕円ファイバー空間全体は $H^1(\underline{S}, \mathfrak{G}_{H/\underline{S}})_{\mathrm{tor}}$ で表されることがわかった．写像 $\mathcal{E}(S,D,H) \to H^1(\underline{S}, \mathfrak{G}_{H/\underline{S}})$ の全射性については以下のことしかわかっていない．

(1) $\dim S \leq 2$ または D が非特異ならば全射．

(2) $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ の元は $H^1(\underline{S}, \mathfrak{T}_{H/\underline{S}})$ の捩れ元に写されるならば, $\mathcal{E}(S, D, H)$ の像に含まれる.

また全射性を否定すると思われる疑わしい例もある. しかし, D が非特異な場合は一対一対応 $\mathcal{E}(S, D, H) \leftrightarrow H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ があるだけでなく, $\mathcal{E}(S, D, H)$ の各元が平坦な相対的極小モデル $X \to S$ をもち, その X は非特異で S 上の同型を除きただひとつに定まる.

このように ∂ エタールコホモロジー群 $H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ が局所射影的楕円ファイバー空間の双有理型同値類全体をほぼ表すが, それに対し通常のコホモロジー群 $H^1(S, \mathfrak{S}_{H/S})$ は局所有理型切断をもつ楕円ファイバー空間の双有理型同値類全体を表すと考えられる. だたし, 射影的な場合は $H^1(S, \mathfrak{S}_{H/S})_{\mathrm{tor}}$ がぴったり対応するものの, そうでないときは上に述べた $\mathcal{E}(S, D, H) \to H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ の全射性に関わる問題が残る. 局所有理型切断を持たないのはおおざっぱに言えば重複ファイバーがあるためだろうと思われるが, それに関しては以下の定理がある [16, Theorem 6.3.10].

定理. S が局所的な場合とし H のタイプが $\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}$ でないと仮定する. $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ に属する楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ について以下の 2 条件は互いに同値である.

(1) f が S 上有理型切断をもたない;

(2) あるブローアップ $\mu\colon S' \to S$ と既約因子 $\Gamma \subset \mu^{-1}D$ があって, 引き戻し $X \times_S S'$ の非特異モデル X' からの楕円ファイバー空間 $f'\colon X' \to S'$ について $f'^*\Gamma$ は Γ を支配する被約成分をもたない.

ただし, タイプ $\mathrm{I}_{(+)}^{(*)}(0)$ のときはこの定理の反例がある [16, Example 6.3.11].

6. 応用

∂ エタールコホモロジー群による大域構造の記述に対し, 論文 [16] では以下の応用を考えた.

(A) S の開集合上定義された楕円ファイバー空間の S 上への延長の可能性についての上野の問題の解決 [16, §7.1].

(B) 代数的な場合のテイト・シャファレヴィッチ群の ∂ エタールコホモロジー群による記述とそのさらなる応用 [16, §7.2, §7.3].

(C) コンパクトケーラー (Kähler) 多様体 S 上の楕円ファイバー空間 $X \to S$ に対し, X がケーラー多様体と双有理型同値となるための必要十分条件 [16, §7.4].

(D) 対数的変換の高次元化とその ∂ エタールコホモロジーによる記述 [16, §7.5, §7.6].

(A) 上野の問題は 2 次元単位多重円板 Δ^2 に対し, 原点 $(0,0)$ の補集合 $\Delta^2 \setminus (0,0)$ 上定義されたスムーズな楕円ファイバー空間が常に Δ^2 上の楕円ファイバー空間に延長できるかという問題であった. 設定を次のように一般化した. S を一般次元の単位多重円板, D を座標超平面の和となる正規交差因子とおき, D に含まれる余次元 2 以上の解析的閉集合 $Z \subset S$ を考え, $U = S \setminus Z$ とおく. $Y \to U$ が局所射影的楕円ファイバー空間で $S \setminus D$ 上スムーズと仮定する. 次の定理が成り立つ [16, Theorem 7.1.3].

定理. 次の 2 条件は互いに同値:

(1) $Y \to U$ はある楕円ファイバー空間 $X \to S$ の U 上への制限と U 上双有理型同値;

(2) $Y \to U$ は U 上の射影的楕円ファイバー空間と双有理型同値.

特にもともとの上野の問題では $Y \to \Delta^2 \setminus (0,0)$ が切断をもたないときは Δ^2 上に延びないことがわかる. 定理の証明は, 誘導される VHS H のモノドロミーがユニポテントで $\operatorname{Sing} D \subset Z$ の場合に (1) から (2) を示すことに簡単に帰着される. 平坦化することを考えれば, あるブローアップ $\mu\colon M \to S$ が存在しそれによる $X \to S$ の引き戻しが (ある印付けと合わせて) $\mathcal{E}(M, \mu^{-1}D, H)$ の元を定める. ここで μ は U 上同型としていい. そして制限写像 $\mathcal{E}(M, \mu^{-1}D, H) \to \mathcal{E}(U, U \cap D, H)$ の像が捩れ元からなることを ∂ エタールコホモロジー群の計算から示すことで証明が終わる.

(B) 非特異な S とその正規交差因子 D, $S^\star = S \setminus D$ 上の VHS H を固定する. また $S^\star$ を含むザリスキ開集合 $U \subset S$ に対し

$$\text{Ш}(U/S, H) = \operatorname{Ker}\left(H^1(\underline{S}, \mathfrak{S}_{H/\underline{S}})_{\mathrm{tor}} \to H^0(U, R^1\varepsilon_*\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})\right)$$

と定義し, $U = S$ のときこれを $\text{Ш}(S, H)$ と書く. 第 5 節の大域構造の記述から $\text{Ш}(U/S, H)$ は S 上の印付き射影的楕円ファイバー空間で U 上局所有理型切断をもつもの全体のなす $\mathcal{E}^+(S, D, H)$ の部分群に同型である. H に付随する基本楕円ファイバー空間 $p\colon B \to S$ で B が非特異なものを考え, $B_U = p^{-1}U$ と書く. また巡回群

$\boldsymbol{\mu}_m = m^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を導入する. 次の定理が成り立つ [16, Theorem 6.2.9, Proposition 6.2.11]:

定理. 次の二つの完全系列が存在する:

$$0 \to H^0(S, \mathfrak{G}_{H/S}) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \varinjlim{}_m H^1\left(U, \mathbb{L}^\bullet_{H/S} \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \boldsymbol{\mu}_m\right) \to Ш(U/S, H) \to 0,$$

$$(\mathrm{Pic}(B)/\mathrm{Pic}(S)) \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \varinjlim{}_m H^2(B_U, \boldsymbol{\mu}_m)/H^2(U, \boldsymbol{\mu}_m) \to Ш(U/S, H).$$

第二の系列の右の準同型射は $U = S^\star$ のときは全射, S がコンパクトのときはその余核が有限群である.

定理の証明は第5節にある種々の可換図式や完全系列を使い, m 倍写像 $\mathfrak{G}_{H/\underline{S}} \to \mathfrak{G}_{H/\underline{S}}$ を考えてできる. 最初の系列を $U = S^\star$ の場合に考えさらに S を縮めれば完全系列

$$0 \to \mathfrak{T}_{H/S} \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to R^1 j_*(H \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to R^1\varepsilon_*\mathfrak{G}_{H/\underline{S}} \to 0$$

が導かれる. これにより局所構造 $(R^1\varepsilon_*\mathfrak{G}_{H/\underline{S}})_0$ の前とは別の計算方法が得られる.

この定理を使って代数的な場合のテイト・シャファレヴィッチ群, コホモロジー的ブラウアー (Brauer) 群との関連が以下のようにわかる. S が $\mathbb{C}$ 上の非特異代数多様体 S に付随する解析空間 S^{an} と同型で S の正規交差因子 D, ザリスキ開集合 U, 代数的基本楕円ファイバー空間 $\mathsf{p}\colon \mathsf{B} \to \mathsf{S}$ があって, $D = \mathsf{D}^{\mathrm{an}}$, $U = \mathsf{U}^{\mathrm{an}}$, $p = \mathsf{p}^{\mathrm{an}}$, $B = \mathsf{B}^{\mathrm{an}}$ と書かれる場合を考える. $\mathsf{S}^\star = \mathsf{S} \setminus \mathsf{D}$, $\mathsf{B}^\star = \mathsf{p}^{-1}(\mathsf{S}^\star)$, $\mathsf{B}_{\mathsf{U}} = \mathsf{p}^{-1}(\mathsf{U})$ と書く. また $\mathsf{p}\colon \mathsf{B} \to \mathsf{S}$ の生成ファイバーを E と書く. B のコホモロジー的ブラウアー群 $\mathrm{Br}'(\mathsf{B})$ は乗法的群スキーム $\mathbb{G}_{\mathsf{m}} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ についてのエタールコホモロジー群 $H^2(\mathsf{B}_{\text{ét}}, \mathbb{G}_{\mathsf{m}})$ のことである. B が非特異なので $\mathrm{Br}'(\mathsf{B})$ は捩れ元からなる.

定理. (1) U が非特異ならば $Ш(U/S, H)$ はテイト・シャファレヴィッチ群 $Ш_{\mathsf{U}}(\mathsf{E})$ に同型である.

(2) 同型 $\mathrm{Br}'(\mathsf{B}^\star)/\mathrm{Br}'(\mathsf{S}^\star) \simeq Ш(S^\star/S, H) \simeq \mathcal{E}^+(S, D, H)$ が存在する.

(3) p が U 上平坦ならば $\mathrm{Br}'(\mathsf{B}_{\mathsf{U}})/\mathrm{Br}'(\mathsf{U})$ は $Ш(U/S, H)$ の指数有限な部分群に同型.

論文 [16] の §7.2 にはあと $\text{Ш}(U/S,H)$ や $\text{Ш}(U/S,H)/\text{Ш}(S,H)$ の有限性についての結果が述べてあり，これらはグロス [5] にあるいくつかの結果の高次元化になる．

(C)　射影的射の一般化にあたるケーラー射を考えて楕円ファイバー空間がいつケーラー射になるのかを調べた．ケーラー射というのは相対ケーラー形式が存在する射のことであるが，相対ケーラー形式の定義はここでは略す．実際はケーラー射より弱い条件のコホモロジー的ケーラー射が扱いやすい．これは相対ケーラー類の存在する射のことだが，相対ケーラー類の定義は以下のとおり．正規解析空間の固有射 $f\colon X \to S$ において $H^2(X,\mathbb{R})$ の元 ξ が相対ケーラー類とは，S 上に開被覆 $\{S_\alpha\}$ があってすべての α に対し，ξ を $H^2(f^{-1}(S_\alpha),\mathbb{R})$ に制限したものが $f^{-1}(S_\alpha)$ のケーラー形式から誘導されたものになるときをいう．非特異な S, 正規交差因子 D, $S^\star$ 上の VHS H を今までと同様に固定する．

命題 ([16, Proposition 7.4.2])**.** コホモロジー群 $H^1(S^\star,H)$, $H^2(S^\star,H)$ が有限生成アーベル群と仮定する．このとき元 $\eta \in H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ について以下の 3 条件は互いに同値:

(1) η はコホモロジー的ケーラー射となる印付き楕円ファイバー空間から定まる;

(2) η を定める印付き楕円ファイバー空間 $(f\colon X \to S,\phi)$ と一般ファイバー $X_s = f^{-1}(s)$ への制限の次数 $\deg \xi|_{X_s}$ が正数になる元 $\xi \in H^2(X,\mathbb{R})$ が存在する;

(3) 特別三角図式

$$\cdots \xrightarrow{+1} \mathbb{L}^\bullet_{H/\underline{S}} \to \mathcal{L}_{H/\underline{S}} \to \mathfrak{S}_{H/\underline{S}} \xrightarrow{+1} \cdots$$

から誘導される準同型射

$$\mathsf{c}\colon H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}) \to H^2(\underline{S},\mathbb{L}^\bullet_{H/\underline{S}})$$

による像 $\mathsf{c}(\eta)$ が捩れ元．

コンパクト複素多様体が $\mathcal{C}$ に属するというのは，それがコンパクトケーラー多様体と双有理型同値なときをいう．クラス $\mathcal{C}$ について以下の定理が成り立つ [16, Theorem 7.4.4]:

定理. d 次元コンパクト複素多様体 S がクラス $\mathcal{C}$ に属するとき，コンパクト複素多様体 X からの楕円ファイバー空間 $f\colon X \to S$ について以下の 3 条件は互いに同値:

(1) X はクラス $\mathcal{C}$ に属する;

(2) f はコホモロジー的ケーラー射と双有理型同値;

(3) 準同型射 $H^{2d}(S,\mathbb{C}) \to H^{2d}(X,\mathbb{C})$ が単射.

S が 1 次元のとき, この定理は宮岡 [10] による楕円曲面のケーラー性判定を導く.

(D)　完全系列 (5.2) の誘導する準同型写像

$$\eta\colon H^0(\underline{S},\mathfrak{Q}_{H/\underline{S}}) \simeq H^0(S,\mathfrak{Q}_{H/S}\otimes\mathbb{Q}) \to H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$$

が対数的変換 (の高次元化) を代数的に記述することを示す. S が 1 次元の場合には $\tilde{\mathcal{E}}(S,D,H)$ は $\mathcal{E}(S,D,H)$ に一致し $H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ と同型. 印付き楕円曲面 $(f\colon X \to S,\phi)$ の定める元 $y \in H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ と元 $q \in H^0(\underline{S},\mathfrak{Q}_{H/\underline{S}})$ の像 $\eta(q)$ との和 $L_q(y) = y+\eta(q)$ を考える. q が点 $P \in D \subset S$ のみに台をもつとき, H はそこでユニポテントな局所モノドロミーを持つが, q を具体的に書くことにより $L_q(y)$ が $X \to S$ を P において q に関係する仕方で対数的変換を施してえられる楕円曲面 $L_q(X) \to S$ から定まることが分かる. この q に関係する仕方は $\left(\mathfrak{S}^{\log}_{H/\underline{S}}\right)_P$ が $\left(\underline{j}_*\mathfrak{S}_H\right)_P$ の部分群として $\left(\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}\right)_P$ とあと何から生成されるのかを具体的に書くことによって表される. こうして $y \mapsto L_q(y)$ が対数的変換を表すことがわかる. ゆえに対数的変換の高次元化も $y \mapsto L_q(y)$ とみなすことができる. ただし $\dim S = 2$ なら $\mathcal{E}(S,D,H) = H^1(\underline{S},\mathfrak{S}_{H/\underline{S}})$ で問題ないが, そうでないとき $\eta(q) \notin \mathcal{E}(S,D,H)$ では困る. この点についてはよく分かっていない. $\mathfrak{S}_{H/\underline{S}}$ が基本楕円ファイバー空間 $B \to S$ の有理型切断の芽のなす層であるのに対し, $\mathfrak{S}^{\log}_{H/\underline{S}}$ は $B \to S$ の対数的切断 (logarithmic section) のなす層と言ってもよいと思う. 対数的変換における $S^\star$ 上の同型は対数的切断よる平行移動によって記述される.

論文 [16] §7.5 の残りと §7.6 は X がコンパクトケーラー多様体や射影的代数多様体のとき楕円ファイバー空間 $X \to S$ に対数的変換 L_q を施して得られる $L_q(X)$ が再びケーラーや射影的なものと双有理型同値になるための q についての条件を調べている. とくに §7.6 は楕円曲面の場合を扱っているが, 楕円モジュラー曲面については特異ファイバーで対数的変換を行えばまた射影的楕円曲面が得られることを証明している.

文献

[1] I. Dolgachev and M. Gross, Elliptic threefolds I: Ogg-Shafarevich theory, J. Alg. Geom. **3** (1994), 39–80.

[2] Y. Fujimoto, Logarithmic transformations on elliptic fiber spaces, J. Math. Kyoto Univ. **28** (1988), 91–110.

[3] T. Fujita, Zariski decomposition and canonical rings of elliptic threefolds, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 19–37.

[4] M. Gross, A finiteness theorem for elliptic Calabi-Yau threefolds, Duke Math. J. **74** (1994), 271–299.

[5] ———, Elliptic three-folds II: Multiple fibers, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 3409–3468.

[6] S. Kawai, Elliptic fibre spaces over compact surfaces, Commen. Math. Univ. St. Paul. **15** (1967), 119–138.

[7] K. Kodaira, On complex analytic surfaces II, III, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626, ibid. **78** (1963), 1–40.

[8] ———, On the structure of compact complex analytic surfaces, I, Amer. J. Math. **86** (1964), 751–798.

[9] R. Miranda, Smooth models for elliptic threefolds, in *The Birational Geometry of Degenerations*, Progress in Math. vol. **29**, Birkhäuser (1983), pp. 85–113.

[10] Y. Miyaoka, Kähler metrics on elliptic surfaces, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 533–536.

[11] S. Mori, Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds, Journal of AMS. **1** (1988), 117–253.

[12] N. Nakayama, On Weierstrass models, in *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata*, Kinokuniya (1987), pp. 405–431.

[13] ———, Elliptic fibrations over surfaces I, in *Algebraic Geometry and Analytic Geometry* ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Springer (1991), 126–137.

[14] ———, 楕円ファイバー空間の構造, 基本群と代数関数 (数理解析研究所講究録**1182**) (2001), pp. 43–50.

[15] ———, Local structure of an elliptic fibration, in *HigherDimensional Birational Geometry*, Advanced Studies in Pure Mathematics **35** (2002), pp. 185–295.

[16] ———, Global structure of an elliptic fibration, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **38** (2002), 451–649.

[17] A. Ogg, Cohomology of abelian varieties over function fields, Ann. of Math. **76** (1962), 185–212.

[18] M. Reid, Decomposition of toric morphisms, in *Arithmetic and Geometry*, Progress in Math. vol. **36**, Birkhäuser (1983), pp. 395–418.

[19] I. Shafarevich, Principal homogeneous spaces over function fields, AMS Translations **37** (1964), 85–113.

[20] K. Ueno, Classification of algebraic varieties, I, Compo. Math. **27** (1973), 277–342.

[21] ———, Degeneration of elliptic surfaces and certain non-Kähler manifolds, in *Classification of algebraic and analytic manifolds*, Progress in Math. vol. **39**, Birkhäuser (1983), pp. 545–556.