

Surfaces with $c_1^2 = 2\chi - 1$ and their torsion groups

村上雅亮 (Masaaki MURAKAMI)
 京都大学大学院理学研究科 (Kyoto University)

講演で述べた主結果

研究集会の講演¹では $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ を満たす一般型極小複素代数曲面の, Picard 群のねじれ部分の位数の評価について解説した。ここに c_1 は複素代数曲面の 1 次 Chern 類を, $\chi(\mathcal{O})$ は構造層の Euler 数を表す。次の二つが主定理であった。

定理 1. X は $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ を満たす一般型極小代数曲面とする (不正則数 $q = 0$ が従う)。このとき次が成立する。ただし $\#\text{Tors}(X)$ は Picard 群のねじれ部分 $\text{Tors}(X)$ の位数である。

- i) $\chi(\mathcal{O}) = 2$ であれば $\#\text{Tors}(X) \leq 3$,
- ii) $\chi(\mathcal{O}) \geq 3$ であれば $\#\text{Tors}(X) \leq 2$,
- iii) $\chi(\mathcal{O}) \geq 7$ であれば $\#\text{Tors}(X) = 1$.

定理 2. $\lambda = 2, 3$ または 4 のとき, 一般型極小代数曲面 X で $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ かつ $\chi(\mathcal{O}) = \lambda$ かつ $\text{Tors}(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ となるものが存在する。

本稿では, 上記の二つの定理の位置づけを与えるために筆者のこれまでの研究を紹介する。また, 講演で時間をとれなかった定理 2 における曲面の具体的構成について述べる。以下代数曲面は全て複素数体 \mathbb{C} 上のものとし, 代数曲面の Picard 群のねじれ部分をねじれ群と呼ぶことにする。

興味の対象

これまで筆者は小さな幾何種数の一般型複素代数曲面に関する研究を行ってきた。幾何種数 p_g の小さな一般型極小代数曲面は, 同一の数値的不変量のもとでも複数の位相型をとる傾向を持ち, 豊富で興味深い対象である。これらの曲面を Picard 群のねじれ部分および基本群の観点をまじえて研究するのが主な興味の対象である。より詳しくはこれらの曲面のうち不正則数 $q = 0$ のものについて, 具体的に幾何種数 p_g と 1 次 Chern 数 c_1^2 を指定したうえで,

1. どのようなアーベル群が Picard 群のねじれ部分 (以下ねじれ群と呼ぶ) として現れるか, どのような基本群が現れるか,

¹講演の機会を与えてくださりまして有難うございました。今野一宏先生, 中山昇先生をはじめとするオーガナイザー, 研究集会の世話をしてくださった方々に感謝致します。

2. 有限アーベル群 G を指定したとき、ねじれ群が G と同型であるような曲面を全て見つけること（すなわち具体的で完全な記述。例えば後述の定理 3 を見よ）,
3. 変形型の個数等, それらの不変量を持つ曲面のモジュライの研究,

等の問題である。これらの問題について筆者はこれまで幾つかの成果を得てきた。以下では, まず研究の背景について, 次にこれまでの研究成果について, 最後に定理 2 の曲面の具体的構成について述べる。

研究の背景

この方向の研究の雛型の一つは数値的 Godeaux 曲面の分類である。数値的 Godeaux 曲面とは 1 次 Chern 数 $c_1^2 = 1$ で幾何種数 p_g と不正則数 q が共に 0 の一般型極小曲面をさす。Castelnuovo の有理性判定条件の観点から L. Godeaux により初めて構成されて以来, 様々な研究者により研究されてきた。Picard 群のねじれ部分が 1 次整係数ホモロジー群（すなわち基本群の可換化）と一致するので, ねじれ群が位相構造を反映する。そのためその分類に際してはねじれ群が切口として用いられた。すなわち, まずねじれ群がどのような値をとり得るか, そして与えられたねじれ群をもつ数値的 Godeaux 曲面がどのように具体的に記述できるか, といった筋道がとられた。実際数値的 Godeaux 曲面では 5 次までの巡回群のみがねじれ群として可能であり, これら 5 つのアーベル群は全て実際にねじれ群として現れることが知られている ([1, p.237] 参照)。またねじれ群が $\mathbb{Z}/5, \mathbb{Z}/4$ 又は $\mathbb{Z}/3$ の場合は曲面の具体的で完全な記述が知られている (Y. Miyaoka [5], M. Reid [9])。ねじれ群が $\mathbb{Z}/2$ 又は 0 の場合については, 曲面の具体的記述は現在でも完全には分かっていない。

同様の方向の研究は他の幾つかの不変量の場合にも知られている (たとえば [12], [4], [1, p.237] 等参照)。筆者の研究の動機の一つは, 同様の理論を $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ の場合に展開することである。但しここに $\chi(\mathcal{O})$ は構造層の Euler 数である。不変量の間関係式 $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ を考えよう。この関係式をみたす不変量の一般型極小曲面については不正則数 q が自動的に消えるので, この直線は Noether 線に平行である。この直線上で $\chi(\mathcal{O}) = 1$ の場合が数値的 Godeaux 曲面に他ならないので, Noether 線と平行な直線に沿って数値的 Godeaux 曲面の仲間を考えていることになる。これがこの直線上で理論を展開した理由の一つであった。

これまでの成果

上述したように, これまで筆者は $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ を満たす一般型極小曲面について Picard 群のねじれ部分の観点をふまえて研究してきた。幾何種数の小さな場合を中心に幾つかの結果を得ており, これらにはねじれ群の位

数の評価, ある数値的 Godeaux 曲面のねじれ群の計算, $\chi(\mathcal{O}) = 2$ でねじれ群が $\mathbb{Z}/3$ の場合の曲面の具体的で完全な記述, ねじれ群が $\mathbb{Z}/2$ で $\chi(\mathcal{O})$ が小さな曲面の構成等がある。

1. ねじれ群の位数の評価

論文 [8] で上述の $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ の曲面に対して, Picard 群のねじれ部分の位数の評価を与えた。これが本稿の最初に紹介した定理 1 である。この評価は数値的 Godeaux 曲面の場合の良く知られた不等式に対応する結果であり, 幾何種数 p_g の十分小さなところで最良評価を与える。すなわち, この評価は数値的 Godeaux 曲面の場合の良く知られた不等式 $\#\text{Tors}(X) \leq 5$ に対応し, $2 \leq \chi(\mathcal{O}) \leq 4$ のとき最良評価である (定理 2, 定理 3 参照)。

2. ねじれ群の計算

論文 [7] では E. Stagnaro の構成したある数値的 Godeaux 曲面 [11] のねじれ群を計算し, この曲面が従来最も良く知られていた例に一致することを示した。すなわちねじれ群が $\mathbb{Z}/5$ であることを示し, さらにねじれ群 $\mathbb{Z}/5$ の数値的 Godeaux 曲面の Miyaoka による完全な記述 [5] (普遍被覆の標準モデルが \mathbb{P}^3 内の特別な 5 次超曲面であること等) を用いてこの曲面の普遍被覆が 3 次元射影空間 \mathbb{P}^3 内の 5 次 Fermat 型超曲面であることを示した。前述したようにねじれ群の自明な数値的 Godeaux 曲面はあまり知られておらず, 例を構成することが重要であった。Stagnaro のこの数値的 Godeaux 曲面はねじれ群の自明なものの良い候補として構成されたが, ねじれ群は不明なまま残されていた。この曲面は \mathbb{P}^2 の 2 重被覆の特異点解消として構成されたものである。ねじれ群が不明なまま残されていたのは, この分岐因子の既約性のため従来の例に比べてねじれ群の計算が遥かに困難であったことによる。

3. 曲面の具体的で完全な記述

論文 [6] では $\chi(\mathcal{O}) = 2$ の場合を研究し, ねじれ群 $\text{Tors}(X)$ が 3 次巡回群 $\mathbb{Z}/3$ の場合に曲面の具体的で完全な記述を得た。曲面の具体的で完全な記述を用いて基本群を決定した。またこの結果を用いてモジュライ空間の次元を計算した。

定理 3. X は一般型極小代数曲面で $c_1^2 = 3$, $\chi(\mathcal{O}) = 2$ かつ $\mathbb{Z}/3 \subset \text{Tors}(X)$ を満たすとする。このときねじれ群 $\text{Tors}(X)$ 及び基本群 $\pi_1(X)$ は共に 3 次巡回群 $\mathbb{Z}/3$ である。さらに X は本質的には, 4 次元射影空間 \mathbb{P}^4 内の 3 次式 2 つにより定まる完全交差部分多様体を $\mathbb{Z}/3$ の自由作用で割ることにより得られる。

上の定理で「本質的には」とは、「完全交差部分多様体の特異点を持つ場合にはすべて有理 2 重点であり，極小特異点解消をとらなければならない」ことを意味する。完全交差を定義する 2 つの 3 次式は特別な形でなければならないが，[6] ではその定義式の形も書き下した。また基本群 $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z}/3$ の作用の \mathbb{P}^4 内での形も具体的に与えたので，上の定理から全ての X が復元できる。具体的に完全な記述である。この定理を用いてモジュライ空間が 14 次元であることも示した。モジュライ空間の 14 次元既約成分がただ一つであることもこの定理から分かる。

$p_g = q = 0$ の場合に多くの研究が知られているのとは対照的に， $p_g = 1$ かつ $q = 0$ の曲面についてはあまり知られていない。例えば上述の筆者の定理 3 以外では，曲面の完全な表示が知られているのは $c_1^2 = 1$ の場合 (Catanese [2], Todorov [12]) と $c_1^2 = 2$ の場合 (Catanese-Debarre [4], Catanese-Cragolini-Oliverio [3]) のみである。

4. 曲面の構成

論文 [8] でねじれ群が $\mathbb{Z}/2$ となる例を $2 \leq \chi(\mathcal{O}) \leq 4$ の場合に構成した。これが本稿の最初に紹介した定理 2 である。良い方法で構成したので単なる例ではなく，曲面の完全な記述を研究する際に手がかりとなるべきものとなっている。定理 3 及び定理 2 より，定理 1 の不等式が $2 \leq \chi(\mathcal{O}) \leq 4$ の場合に最良評価を与えることがわかる。構成はまず Hirzebruch 曲面 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の 2 重被覆の極小特異点解消をとり，次に $\mathbb{Z}/2$ のある自由作用により極小特異点解消の商をとることによる。条件を満たす曲面が存在するとすればどの様なものとなるべきかある程度追い詰めてから構成したので，完全な記述のための手がかりとなるべきものとなっている。完全な分類が完成した際には，幾つかあるタイプの一つとなるはずである。

定理 2 の曲面の具体的構成

以上定理 1，定理 2 に関連して筆者の結果を紹介してきた。最後に講演で時間をあまりとれなかった定理 2 について述べる。すなわち $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ を満たす一般型極小曲面でねじれ群 $\text{Tors}(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ のものを $2 \leq \chi(\mathcal{O}) \leq 4$ でどの様に構成するかについて具体的に述べる。

前述したように条件を満たす曲面が存在するとすればどの様なものとなるべきかある程度追い詰めてから構成した。条件を満たす曲面 X が存在したとしよう。Miyaoaka [5] に習いねじれ群 $\text{Tors}(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ に対応する不分岐 2 重被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ をとり，その Galois 群を $G \simeq \mathbb{Z}/2$ とおく。このとき Y の標準写像

$$\Phi_{K_Y}: Y \dashrightarrow \Phi_{K_Y}(Y) \subset \mathbb{P}^{p_g(Y)-1}$$

を Galois 群 G の作用を用いて調べ，この逆を辿ることにより例を構成した。ただしこの方法で十分に追い詰められたのは $\chi(\mathcal{O}) = 4, 3$ の場合であ

る。これらの場合には標準写像の次数 $\deg \phi_{K_Y} = 2$ で、その像 $\phi_{K_Y}(Y)$ の次数が minimal degree 足す 1 となるような例を構成した。一方 $\chi(\mathcal{O}) = 2$ のときに $\deg \phi_{K_Y} = 2$ で例を作るのはおそらく無理で、今回構成した例では $\deg \phi_{K_Y} = 4$ となっている。当然写像度 4 の場合は写像度 2 の場合と異なり canonical resolution に対応する理論がない。そのためこの後どう追い詰めたら良いか困ってしまうのであるが、今回は $\chi(\mathcal{O}) = 4, 3$ の場合から類推して構成した。 $\chi(\mathcal{O}) = 2$ だけを見ているとどうやって良いか分からないものが、 $\chi(\mathcal{O}) = 4, 3$ の場合を見ることにより類推がつくのである。

さて曲面の構成を具体的に述べよう。以上の説明から何故この様に作れば良いかは容易に分かるはずである。なお以下の構成が二つの古典的構成法、すなわち Campedelli Construction (特別な特異点をもつ曲線にそっての 2 重被覆) と Godeaux Construction (自由作用による商)、を組合わせたものである旨、一言注意しておく ([10] も参照のこと)。以下 $\chi(\mathcal{O}) = 4 - k$ ($0 \leq k \leq 2$) とおく。

Step 1.

$W = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ (the first projection) を 0 次 Hirzebruch surface とし、その minimal section を Δ_0 で、fiber を Γ で表す。 W 上の点を 1 番目の \mathbb{P}^1 , 2 番目の \mathbb{P}^1 それぞれの斉次座標を用いて $((X_0 : X_1), (Y_0 : Y_1))$ で表すことにする。この時 W の対合 ι を

$$\iota : ((X_0 : X_1), (Y_0 : Y_1)) \mapsto ((X_1 : X_0), (Y_1 : Y_0))$$

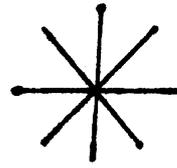
で定める。対合 ι の生成する 2 次巡回群を $G = \langle \iota \rangle \simeq \mathbb{Z}/2$ とおく。 G の W への作用の固定点は $((X_0 : X_1), (Y_0 : Y_1)) = ((1 : \pm 1), (1 : \pm 1))$ の丁度 4 点であることに注意する。

Step 2.

線型系 $|8\Delta_0 + 8\Gamma|$ の member で次の全ての条件を満たすもののうち general なもの B をとる：

- i) B は被約,
- ii) B は G の W への作用で不変
- iii) G の W への作用の固定点は B 上に一つも存在しない,
- iv) B は丁度 2 個の $[3, 3]$ -特異点と丁度 $2k$ 個の通常 4 重点を持ち、
その他の特異点は高々 negligible singularities 。

但し、ここに $[3, 3]$ -特異点とは非特異で既約な局所成分 3 つがそれぞれ丁度重複度 2 で交わってできる 3 重点のことである (下図を参照)。

[3,3]-特異点 \times 2 個通常 4 重点 \times $2k$ 個**Step 3.**

曲線 B にそって分岐する W の 2 重被覆をとり，その極小特異点解消として得られる曲面を Y とおく。群 G の作用の Y への持ち上げで，自由作用となるものが唯一存在する。 $G \simeq \mathbb{Z}/2$ のこの自由作用による Y の商を X とおくと， X は $c_1^2 = 2\chi(\mathcal{O}) - 1$ かつ $\chi(\mathcal{O}) = 4 - k$ で，ねじれ群 $\text{Tors}(X) \simeq \mathbb{Z}/2$ を満たす一般型極小曲面となる（構成完了）。

上の構成では，条件を満たす分岐因子 B が存在するか，曲面 Y が minimal か，群 G の作用が Y への自由作用に持ち上がるか，といった点が問題になるが，これらをすべて解決することにより曲面を構成した。構成の方法から $\mathbb{Z}/2 \subset \text{Tors}(X)$ が自明に従うが，この inclusion が実際に同型であることは定理 1 の評価の帰結である。

References

- [1] BARTH, W., PETERS, C. and VAN DE VEN, A. *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag (1984).
- [2] CATANESE, F. Surfaces with $K^2 = p_g = 1$, and their period mapping, in *Algebraic Geometry, Lect. Notes in Math.*, **732** (1979), pp 1–26.
- [3] CATANESE, F., CRAGNOLINI, P., OLIVERIO, P. Surfaces with $K^2 = \chi = 2$, and special nets of quartics in 3-space, *Contemporary Mathematics*, **162** (1994), pp 77–128.
- [4] CATANESE, F., DEBARRE, O. Surfaces with $K^2 = 2$, $p_g = 1$, $q = 0$, *Crelle's Journal reine angew. Math.*, **395** (1989), pp 1–55.
- [5] MIYAOKA, Y. Tricanonical Maps of Numerical Godeaux Surfaces, *Invent. Math.*, **34** (1976), 99–111.
- [6] MURAKAMI, M. Minimal algebraic surfaces of general type with $c_1^2 = 3$, $p_g = 1$ and $q = 0$, which have non-trivial 3-torsion divisors, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*, **43**.

- [7] MURAKAMI, M. The torsion group of a certain numerical Godeaux surface, *J. Math. Kyoto Univ.*, **41** (2001), pp 323–333.
- [8] MURAKAMI, M. A bound for the orders of the torsion groups of surfaces with $c_1^2 = 2\chi - 1$, *preprint* (2003).
- [9] REID, M. Surfaces with $p_g = 0$, $K^2 = 1$, *Journ. Fac. Sc. Univ. of Tokyo*, **25** (1978), 75–92.
- [10] REID, M. Campedelli versus Godeaux, in *"Problems in the theory of surfaces and their classification (Cortona, 1988)"*, Academic Press (1991), 309–365.
- [11] STAGNARO, E. On Campedelli branch loci, *Ann. Univ. Ferrara -Sez. VII -Sc. Mat.*, **XLIII** (1997), 1–26.
- [12] TODOROV, A. Surfaces of general type with $p_g = 1$ and $(K, K) = 1$, *Ann. E.N.S.*, **13** (1980), pp 1–21.